III. Limita posloupnosti

III.1. Úvod

Definice. Zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazýváme *posloupnost* reálných čísel. Obraz čísla n značíme a_n, celou posloupnost značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_n nazveme *n-tým členem* této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N} \colon a_n = x\},$$

tedy obor hodnot zobrazení a.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *shora omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- *zdola omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- *omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *rostoucí*, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající*, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *nerostoucí*, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající*, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je *monotónní*, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je *ryze monotónní*, pokud je rostoucí či klesající.

Definice. Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- *Součtem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme *rozdíl* a *součin posloupností*.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak *podílem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

III.2. Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní*, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.

Věta 9 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

Věta 10. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je *vybranou posloupností* z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Věta 11 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.*

Poznámka. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \; |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 12 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) je-li $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 13. *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 14 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) Nechť $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 15 (o dvou policajtech)**.** *Buďte* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

III.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (*plus nekonečno*), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \; a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (*minus nekonečno*), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \; a_n < K.$$

Věta 9 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní* limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní* limitu.

Věta 10 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 10'.

- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

Věta 11 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.

Definice. *Rozšířenou reálnou osou* rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,

- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Věta 12' (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$*, pokud je pravá strana definována.*

Věta 16. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$*,* $A > 0$*,* $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$*.*

Věta 14 (limita a uspořádání) a Věta 15 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

Věta 15' (o jednom policajtovi)**.** *Buďte* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *dvě posloupnosti.*

- *Jestliže* $\lim a_n = +\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$ *platí* $b_n \geq a_n$*, pak* $\lim b_n = +\infty$*.*
- *Jestliže* $\lim a_n = -\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$ *platí* $b_n \leq a_n$*, pak* $\lim b_n = -\infty$*.*

Definice. Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 17. *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná množina,* $G \in \mathbb{R}^*$*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $G = \sup M$*.*

(ii) Číslo G je horní závorou M *a existuje posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodů z* M*, pro kterou* $\lim x_n = G$*.*

III.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 18 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li* $\{a_n\}$ *neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*. Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*.*

Věta 19 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*