Opakované parciálne sumácie

Lívia Leššová, Michaela Koščová, Ján Mačutek

Univerzita Komenského v Bratislave
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

25. januára 2018

Obsah

Úvod

- Nech $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$, $\{P_x^{*}\}_{x=0}^{\infty}$ sú diskrétne jednorozmerné rozdelenia pravdepodobnosti na nezáporných celých číslach. Potom parciálna sumácia je definovaná ako

$$P^{(1)}(X = x) = P_x^{(1)} = c_1 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{*}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

  kde c_1 je normalizačná konštanta, $\{P_x^{*}\}_{x=0}^{\infty}$ je rodič a $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$ je potomok prvej generácie.
- Ak vezmeme $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$ ako rodiča novej generácie a funkciu $g(j)$ necháme nezmenenú, získame potomka druhej generácie

$$P_x^{(2)} = c_2 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(1)}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

  kde c_2 je normalizačná konštanta, $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$ je rodič.

- Nech je rodičom potomok $(k-1)$-vej generácie s funkciou $g(j)$. Potom potomok k-tej generácie má tvar

$$P_x^{(k)} = c_k \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(k-1)}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

  kde c_k je normalizačná konštanta.
- Aké je limitné rozdelenie pravdepodobnosti opakovaných parciálnych sumácií

$$P_x^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} P_x^{(k)}?$$

- Predpokladajme, že rodičovské rozdelenie je definované na konečnom nosiči veľkosti n. Potom je možný maticový zápis

$$\mathbb{P}^{(k)} = c_k G \mathbb{P}^{(k-1)} = c G^k \mathbb{P}^*,$$

kde

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} P_0^{(k)} \\ P_1^{(k)} \\ \vdots \\ P_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(0) & g(1) & g(2) & \cdots & g(n-1) \\ 0 & g(1) & g(2) & \cdots & g(n-1) \\ 0 & 0 & g(2) & \cdots & g(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g(n-1) \end{pmatrix}$$

a c_k, c normalizačné konštanty.

- Ak A je štvorcová matica s dominantnou vlastnou hodnotou λ a $\mathbf{x}_0$ je jednotkový vektor, ktorý nie je ortogonálny na priestor vlastnej hodnoty λ, potom postupnosť

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\|A\mathbf{x}_0\|_2}, \mathbf{x}_2 = \frac{A^2\mathbf{x}_0}{\|A^2\mathbf{x}_0\|_2}, \cdots, \mathbf{x}_k = \frac{A^k\mathbf{x}_0}{\|A^k\mathbf{x}_0\|_2}, \cdots$$

konverguje k jednotkovému dominantnému vlastnému vektoru a postupnosť

$$(A\mathbf{x}_0)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_0, (A\mathbf{x}_1)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_1, (A\mathbf{x}_2)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_2, \cdots, (A\mathbf{x}_k)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_k, \cdots$$

ide k dominantnej vlastnej hodnote λ.

Príklad

- Limitného potomka teda vieme nájsť pomocou dominantného vlastného vektora matice G.
- Vezmime funkciu g takú, že pri Poissonovskom rodičovskom rozdelení s parametrom a, necháva v parciálnej sumácii

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \cdots ,$$

  potomka $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ rovnakého ako rodiča, teda Poiss(a).
- Potom limitné rozdelenie takejto Poissonovskej sumácie závisí od parametra a a veľkosti n nosiča rozdelenia $\mathbb{P}^*$:
  - $a > \frac{2n}{n+1}$ - Poissonovo,
  - $a < \frac{2n}{n+1}$ - binomické,
  - $a = \frac{2n}{n+1}$ - neexistuje.

- Majme rodičovské rozdelenie $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ a nejakú reálnu funkciu $g(x,y), x,y = 0,1,2,\ldots$ Potom ak c_1 je normalizačná konštanta, tak potomka $\{P^{(1)}_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ definujeme ako

$$P^{(1)}_{x,y} = c_1 \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P^*_{i,j}.$$

- Potomka k-tej generácie získame analogicky pomocou potomka $(k-1)$-vej generácie a c_k bude normalizačná konštanta:

$$P^{(k)}_{x,y} = c_k \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P^{(k-1)}_{i,j}.$$

- Parciálne sumácie pre rodiča definovaného na konečnom nosiči rozsahu $n \times m$ môžeme zapísať podobne ako v jednorozmernom prípade.

- Zadefinujme si zobrazenie $v : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{nm}$ také, že pre maticu M typu $n \times m$

$$v(M) = v\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \cdots & M_{0,m-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \cdots & M_{1,m-1} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & \cdots & M_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,0} & M_{n-1,1} & \cdots & M_{n-1,m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{0,0} \\ M_{0,1} \\ \vdots \\ M_{0,m-1} \\ M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{1,m-1} \\ \vdots \\ M_{n-1,0} \\ M_{n-1,1} \\ \vdots \\ M_{n-1,m-1} \end{pmatrix}.$$

- Pre dvojrozmerné rozdelenie pravdepodobnosti a $n = m = 2$

$$v(\mathbb{P}^*) = v\left(\begin{pmatrix} P^*_{0,0} & P^*_{0,1} \\ P^*_{1,0} & P^*_{1,1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P^*_{0,0} \\ P^*_{0,1} \\ P^*_{1,0} \\ P^*_{1,1} \end{pmatrix}.$$

- Vytvoríme maticu $\tilde{G}$ z prvkov matice G.

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ 0 & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & 0 & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ 0 & 0 & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & 0 & 0 & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{0,m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{n-1,m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \ldots & g_{n-1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & g_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

- Vezmime $D = diag(g(0,0), g(0,1), ..., g(n-1, m-1))$. Nech A je horná trojuholníková jednotková matica $m \times m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Potom

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} A & A & A & \cdots & A \\ 0 & A & A & \cdots & A \\ 0 & 0 & A & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} D.$$

$\tilde{G}$ je horná trojuholníková matica $nm \times nm$, v každom stĺpci sa nachádza iba jedno konkrétne $g(i,j)$ (môže viackrát). Na diagonále sa vyskytujú všetky $g(i,j)$ práve raz.

- Využijúc uvedený zápis

$$v\left(\mathbb{P}^{(1)}\right) = \frac{\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{*}\right)}{\|\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{*}\right)\|_1}.$$

- Pre potomka k-tej generácie môžeme písať

$$v\left(\mathbb{P}^{(k)}\right) = \frac{\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(k-1)}\right)}{\|\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(k-1)}\right)\|_1} = \frac{\tilde{G}^k v\left(\mathbb{P}^{*}\right)}{\|\tilde{G}^k v\left(\mathbb{P}^{*}\right)\|_1}.$$

- Limitné rozdelenie pravdepodobnosti v tomto prípade bude

$$v(\mathbb{P}^{(\infty)}) = \lim_{k\to\infty} \frac{v(\mathbb{P}^{(k)})}{\|v(\mathbb{P}^{(k)})\|_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{G}^k v(\mathbb{P}^{*})}{\|(\tilde{G}^k v(\mathbb{P}^{*}))\|_1}.$$

- Pri splnení predpokladov (konečný nosič, jediná dominantná vlastná hodnota matice $\tilde{G}$, vhodný štartovací vektor $\mathbb{P}^*$) postupnosť

$$\frac{\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^*\right)}{\|\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^*\right)\|_2}, \frac{\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(1)}\right)}{\|\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(1)}\right)\|_2}, \ldots, \frac{\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(k)}\right)}{\|\tilde{G}v\left(\mathbb{P}^{(k)}\right)\|_2}, \ldots$$

  konverguje k jednotkovému dominantnému vlastnému vektoru matice $\tilde{G}$.
- Vlastné čísla hornej trojuholníkovej matice sú prvky na diagonále, preto je dominantné vlastné číslo jediné práve vtedy, keď je práve jedna najväčšia absolútna hodnota $g(i,j)$.
- Po vynásobení konštantou dostávame hľadané rozdelenie pravdepodobnosti.

Referencie

- Anton H., Rorres Ch. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, Wiley: 872-883
- Mačutek J. (2006).*A Limit Property of the Geometric Distribution*, Theory of Probability and its Applications, 50(2), 316–319

- Ďakujem za pozornosť a prajem pekný deň.