Limitní věty pro slabě závislá náhodná pole

Jana Klicnarová

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ROBUST 2014

Společná práce s Daliborem Volným a Yizao Wangem

Značení

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	–	pravděpodobnostní prostor s bijektivním biměřitelným míru zachovávajícím zobrazením T,
f	–	měřitelná regulární funkce s $\mathrm{E}(f) = 0$ a $f \in L_2(\mu)$,
$(X_i)_i$	–	(striktně) stacionární proses, $X_i = f \circ T^i$
U	–	unitární operátor na L^2, takový že $Uf = f \circ T$,
$\mathcal{F}_0$	–	σ-algebra $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{F}_0 \subset T^{-1}(\mathcal{F}_0)$,
$\mathcal{F}_i$	=	$T^{-i}(\mathcal{F}_0)$, tedy $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$

Notation

$$
\begin{array}{rcl}
(\epsilon_i)_i & - & \text{iid náhodné veličiny, } \epsilon_i = \epsilon \circ T^i, \\
e = g(\dots, \epsilon_{-1}, \epsilon_0) & - & \text{kde } g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R} \text{ je měřitelné,} \\
 & & \mathrm{E}e = 0 \text{ a } \operatorname{var} e = 1, \\
 & & \\
H_i & - & \text{Hilbertův prostor funkcí z } L_2(\mu) \\
 & & \text{kde jsou } T^{-i}(\mathcal{F}_0) \text{ měřitelné.} \\
 & & \\
P_i(X) & = & \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_i) - \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_{i-1}), \\
 & & \\
S_{\Gamma_n}(f) & = & \sum_{i \in \Gamma_n} f \circ T^i, \\
 & & \\
\sigma_n^2 & = & \mathrm{E}(S_{\Gamma_n}(f))^2.
\end{array}
$$

Limitní věty pro stacionární procesy

Základní přístupy

- mixingy – např. Bradley (2007), Tone (2010), ...
- asociované náhodné veličiny – např. Doukhan, Louchichi (1999)
- martingalové aproximace – Gordin (1963)
  - Hannan (1979) – CLV (Dedecker, Merlevede, Volný (2007) PI),
  - Maxwell a Woodroofe (2000) – CLV (Peligrad, Utev (2005) PI)
  - Zhao a Woodroofe (2008) – (Gordin a Peligrad (2011), Peligrad a Peligrad (2012) aj.)
  - mnoho a mnoho dalších

Základní definice

Regulární funkce

Řekneme, že funkce f je regulární, pokud $f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_i f$.

Martingalová aproximace

Řekneme, že funkce f (proces $(f \circ T^i)_i$) má **martingalovou aproximaci** vůči filtraci $(\mathcal{F}_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$, jestliže existuje martingalová diferenční posloupnost $(m \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ taková, že $P_0 m = m$ a $||S_n(f - m)||_2^2 = o(n)$.

Maxwellova-Woodroofeova podmínka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{||\mathsf{E}(S_k(f)|\mathcal{F}_0)||_2}{k^{3/2}} < \infty.$$

Hannanova podmínka

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||P_0 f||_2 < \infty.$$

Plus norma

Zhao a Woodroofe (2008): On Martingale Approximation

$$||f||_+^2 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}||S_n(f)||_2^2$$

Výsledek – ZW (2008), Gordin, Peligrad (2011)

An adapted process $(f \circ T^i)$ has a martingale approximation if and only if it satisfies:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} ||\mathsf{E}(f|\mathcal{F}_{-k})||_+^2 = 0.$$

Limitní věty pro slabě závislá náhodná pole

Mixingy

Bolthausen (1982), Goldie a Morrow (1986), Bradley (1989)

n-rozměrné martingaly

Problém, co to vlastně je vícerozměrný martingal, jak ho definovat. Problém, jak uspořádat $\mathbb{N}^d$. A tedy i různé výsledky v závislosti na definici – Nahapetian (1995), Basu a Dorea (1979), Poghosyan a Roelly (1998) aj.

Značení pro náhodná pole

$$
\begin{aligned}
(\Omega, \mathcal{A}, P) &= (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}, \mathsf{P}^{\mathbb{Z}^d}),\\
\epsilon_{\mathbf{k}}(\omega) &= \omega_{\mathbf{k}},\\
\mathcal{F}_{\mathbf{k}} &= \sigma\{\epsilon_{\mathbf{l}} : \mathbf{l} \le \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d\}, \text{ for all } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d,\\
\{T^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} &- \text{ shift operators on } \mathbb{R}^d\text{: } (T^{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{l}} = \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{l}},\\
\{f \circ T^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} &- \text{ random field, where } f \in L_2 \text{ and it has zero mean},\\
V_n &= \Pi_{i=1}^{d}\{1, \ldots, m_i^{(n)}\} \subset \mathbb{N}^d, \text{ kde } m_i^{(n)} \to \infty.
\end{aligned}
$$

Wang a Woodroofe, 2013 – značení

$$
\begin{aligned}
W_{d,p}(f) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \frac{||\mathsf{E}(f\circ T_{\mathbf{k}}|\mathcal{F}_{\mathbf{1}})||_p}{\Pi_{i=1}^d \sqrt{k_i}}, \\
B_{n,t}(f) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \lambda(V_n(t)\cap R_{\mathbf{k}}) f\circ T_{\mathbf{k}}, \\
S_n(f) &= \sum_{\mathbf{k}\in V_n} f\circ T_{\mathbf{k}},
\end{aligned}
$$

kde pro $t \in [0,1]$: $V_n(t) = \Pi_{i=1}^d [0, m_i^{(n)} t]$, $R_k = \Pi_{i=1}^d (k_i - 1, k_i]$ a λ je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.
Připomeňme, že $\{\mathbb{B}(t)\}_{t\in[0,1]^d}$ je gaussovské náhodné pole s nulovou střední hodnotou a kovarianční strukturou $\mathsf{E}(\mathbb{B}(\mathbf{k})\mathbb{B}(\mathbf{l})) = \Pi_{i=1}^d min(k_i, l_i)$, kde $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in [0,1]^d$.

WW (2013) – CLV a PI

Mějme součinový (iid) pravděpodobnostní prostor $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}, \mathrm{P}^{\mathbb{Z}^d})$ s filtrací definovanou výše. Pokud $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbf{0}}$, $f \in \mathcal{F}_0$ a $W_{d,2}(f) < \infty$, potom

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{||S_n||^2}{|V_n|} < \infty$$

a

$$\frac{S_n}{\sqrt{|V_n|}} \Rightarrow N(0, \sigma^2).$$

Pokud navíc $f \in \mathcal{L}^p_0$ a $W_{d,p}(f) < \infty$ pro nějaké $p > 2$, potom

$$\frac{B_{n,\cdot}(f)}{\sqrt{|V_n|}} \Rightarrow \sigma \mathbb{B}(\cdot)$$

v $C([0,1]^d)$.

Volný a Wang (2014)

zobecněná Hannanova podmínka (1973) (pro vícerozměrný případ)

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d} ||P_{\mathbf{0}}X_{\mathbf{i}}||_2 < \infty.$$

PI za Hannanovy podmínky s p=2

Za Hannanovy podmínky:

$$\left\{\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right\}_{t\in[0,1]^d} \Rightarrow \{\mathbb{B}_t\}_{t\in[0,1]^d},$$

pro $n \to \infty$ v $D([0,1]^d)$.

Obecné množiny

El Machkouri, Volný, Wu (2013)

S využitím fyzické míry závislosti. Předp. $X_{\mathbf{i}} = g(\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}; \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$ a $(\varepsilon_{\mathbf{i}}^{'})_{\mathbf{i}}$ iid kopii $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}$. Potom $X_{\mathbf{i}}^*$ je verze $X_{\mathbf{i}}$ taková,že $X_i^* = g(\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}^*; \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$, kde $\varepsilon_{\mathbf{i}}^* = \varepsilon_{\mathbf{i}}$ pro všechna $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$ a $\varepsilon_{\mathbf{0}}^* = \varepsilon_{\mathbf{0}}^{'}$.
Např. z Ledoux a Talagrand (1991) známe luxemburgskou normu $|| \cdot ||_\psi$:

$$||Z||_\psi = inf\{c > 0; \mathrm{E}(\psi(|Z|/c)) \leq 1\},$$

kde $\psi(\cdot)$ je Youngova funkce - teď nám bude stačit p-norma.

$$\delta_{i,p} = ||X_{\mathbf{i}} - X_{\mathbf{i}}^*||_p,$$

$$\Delta_p = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \delta_{\mathbf{i},p}.$$

Pro kolekci borelovských podmnožin $\mathcal{A} \subset [0,1]^d$ definují

$$S_n(A) = \sum \lambda(nA \cap R_{\mathbf{i}}) X_{\mathbf{i}},$$

El Machkouri, Volný, Wu (2013)

CLV

Když $(X_{\mathbf{i}})$ je centrované stacionární náhodné pole s $\Delta_2 < \infty$ a $\sigma_n^2 = ||S_{\Gamma_n}||^2 \to \infty$. Když $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je taková posloupnost podmnožin v $\mathbb{Z}^d$, že $|\Gamma_n| \to \infty$, potom Lévyho vzdálenost:

$$L\left(S_{\Gamma_n}/\sqrt{|\Gamma_n|}, N(0, \sigma_n^2/|\Gamma_n|)\right) \to 0$$

pro $n \to \infty$.

Poznámka

Přidáme-li podmínku $|\delta\Gamma_n|/|\Gamma_n| \to 0$ a $\sigma^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{E}(X_{\mathbf{0}}, X_{\mathbf{k}}) > 0$ potom

$$\frac{S_{\Gamma_n}}{\sqrt{|\Gamma_n|}} \Rightarrow N(0, \sigma^2).$$

Princip invariance – EM-V-Wu (2013)

Nechť $(X_{\mathbf{i}})$ je centrované stacionární náhodné pole a $\mathcal{A}$ kolekce regulárních borelovských podmnožin $[0,1]^d$. Když je splněna jedna z následujících podmínek

- $\mathcal{A}$ je VC třída s indexem V a existuje $p > 2(V-1)$ takové, že $X_{\mathbf{0}} \in L^p$ a $\Delta_p < \infty$,
- „podmínka na konečný integrál z entropické funkce a konečnou fyzickou míru založenou na obecnější Youngově funci" podrobněji viz EM-V-W (2011) a Dudley (1973) nebo Van der Vaart a Wellner (1996) a Ledoux a Talagrand (1991).
- $X_{\mathbf{0}} \in L^\infty$, $\mathcal{A}$:

$$\int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\mathrm{d}\varepsilon < \infty$$

  a $\Delta_\infty < \infty$.

potom

$$\{n^{-d/2} S_n(A),\ A \in \mathcal{A}\} \Rightarrow \sigma W \quad \text{v} \quad \mathcal{C}(\mathcal{A}),$$

kde $\sigma^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{E}(X_{\mathbf{0}} X_{\mathbf{k}})$.

CLV při sčítání přes obecné množiny

Nechť f je regulární funkce splňující Hannanovu podmínku:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \| P_0 f \circ T^i \|_2 < \infty.$$

a

$$\| S_{\Gamma_n}(f) \|_2 \to \infty, \quad \liminf_{n \to \infty} \| S_{\Gamma_n}(f) \|_2 / \sqrt{|\Gamma_n|} > 0.$$

Potom

$$S_{\Gamma_n}(f)/\sigma_n \Rightarrow N(0,1).$$

Základní podmínky pro náhodná pole

- Filtrace $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}})$ je komutující (see (Khoshnevisan (2002)), potom i projekce $(P_{\mathbf{i}})$ komutují. A můžeme definovat orthomartingaly vůči komutující filtraci.
- Zobecněná Hannanova podmínka:

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d} ||P_{\mathbf{0}}U^{\mathbf{i}}f||_2 < \infty.$$

- Kolekce podmnožin $(\Gamma_n) \subset \mathbb{Z}^d$ splňuje:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\delta\Gamma_n|}{|\Gamma_n|} = 0 \quad \text{and} \quad |\Gamma_n| \nearrow \infty.$$

Výsledky pro náhodná pole při sčítání přes obecné množiny

Centrální limitní věta pro martingalová náhodná pole

Nechť $(f \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2}$ je 2-rozměrné pole martingalových diferencí a $f \in L_2$, potom pro $\Gamma_n \subset \mathbb{Z}^2$ s $\lim_{n \to \infty} \frac{|\delta \Gamma_n|}{|\Gamma_n|} = 0$ platí:

$$\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_n|}} \sum_{(i,j) \in \Gamma_n} f \circ T^{(i,j)} \to N(0, ||f||_2).$$

Idea důkazu: aproximovat funkci f funkcemi $f_m := \mathrm{E}(f|\mathcal{F}_{[m]})$, kde $\mathcal{F}_{[m]} = \sigma(\epsilon_{\mathbf{j}} : \mathbf{j} \in \{-m, \ldots, m\}^d)$. Potom $(f_{(m)} \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}$ jsou m'-závislé a můžeme aplikovat CLV od Bolthausena (1982).

Mezivýsledek – budoucí téma

Omezení druhého momentu

Pro $f \in L_2$ regulární s nulovou střední hodnotou platí:

$$||S_{\Gamma_n}(f)||_2 \leq \sqrt{|\Gamma_n|} \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d} ||P_{\mathbf{0}} f \circ T^{\mathbf{i}}(f)||_2$$

Poznámka

Ve skutečnosti v našich důkazech potřebujeme omezení pro $||S_{\Gamma_n}(f)||_2/\sqrt{|\Gamma_n|}$, otázka tedy zní, za jakých podmínek je tato řada konvergentní.

Zobečněná plus norma

Definice

$$||f||_{+\Gamma} = \limsup_{n\to\infty} \frac{||S_{\Gamma_n}(f)||_2}{\sqrt{|\Gamma_n|}}$$

Tvrzení

Nechť $f \in L_2$ má nulovou střední hodnotu, je regulární a splňuje Hannnanovu podmínku. Mějme $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\delta\Gamma_n|}{|\Gamma_n|} = 0 \quad \text{and} \quad |\Gamma_n| \nearrow \infty$$

Potom

$$\lim_{m\to\infty} ||f - f_m||_{+\Gamma} = 0.$$

A tedy $\sigma := \lim_{m\to\infty} ||f_m||_{+\Gamma} < \infty$ existuje a $S_{\Gamma_n}(f)/\sqrt{|\Gamma_n|} \Rightarrow N(0, \sigma^2)$.

Děkuji za pozornost.