ROVNICE NA ČASOVÝCH ŠKÁLÁCH A NÁHODNÉ PROCESY

Michal Friesl

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Úvod

Analýzníkům při zkoumání jejich problémů

- vycházejí rozdělení,
- překvapeni, že v diskrétním i spojitém případě některé výsledky stejné

Obsah

- Časová škála a rovnice
- Transportní rovnice
- Difuzní rovnice

Zainteresovaní kolegové:

- Antonín Slavík (MFF UK)
- Petr Stehlík, Jonáš Volek (FAV ZČU)

Časová škála

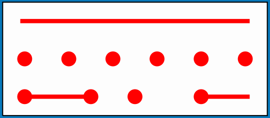
Množina $\mathbf{T}$ časových okamžiků

- libovolná uzavřená $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$

$T = R$

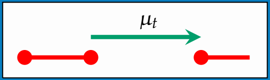
$T = Z$

obecná



Funkce zrnitosti

- $\mu_t =$ vzdálenost od t k dalšímu
- $\mu_t = 0$ — čas t zprava spojitý
- $\mu_t > 0$ — čas t zprava diskrétní



t $\quad t + \mu_t$

Zobecněná derivace

- $$u^{\Delta_t}(t) = \begin{cases} \dfrac{u(t+\mu_t) - u(t)}{\mu_t} & \text{(diference)} \\ \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{u(t+h) - u(t)}{h} & \text{(derivace)} \end{cases}$$

Dynamická rovnice

Uvažujme funkci $u : \mathbf{T} \times X \to \mathbf{R}$

- kde X je **diskrétní** stavový prostor, $X = \mathbf{Z}$ popř. $X = \mathbf{N}_0$
- $u(t) := (u(t,x), x \in \mathcal{X}) = (u_x(t))_{x \in \mathcal{X}} : \mathbf{T} \to \ell^\infty(X)$

Pro lineární omezený operátor $A : \ell^\infty(X) \to \ell^\infty(X)$ zkoumáme omezená řešení rovnice (soustavy rovnic — pro každé x jedna)

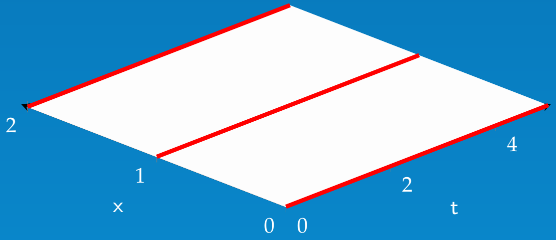
$$u^{\Delta_t}(t) = A\,u(t), \quad t \in \mathbf{T}$$

s „počáteční" podmínkou $u(t_0) = u^0$.

Řešením (předp. $I + A\mu_t$ pro každé $t \in \mathbf{T}$ invertibilní) hodnoty zobecněné exponenciely e_{A,t_0}

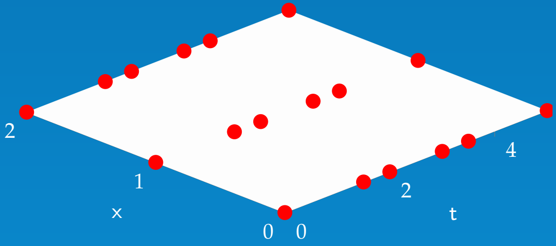
- $u(t) = \big(e_{A,t_0}(t)\big)(u^0)$

Obrázek



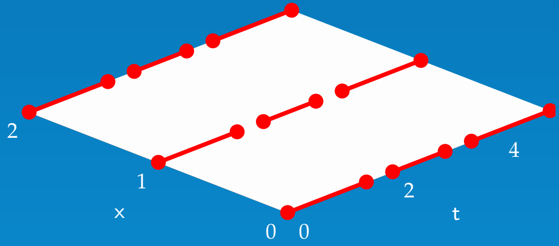
Prostor $T \times X$ (čas spojitý)

Obrázek



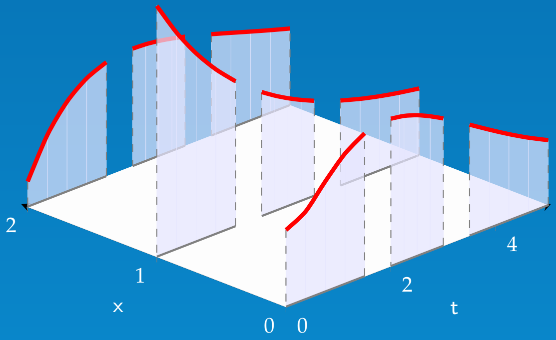
Prostor $T \times X$ (čas diskrétní)

Obrázek



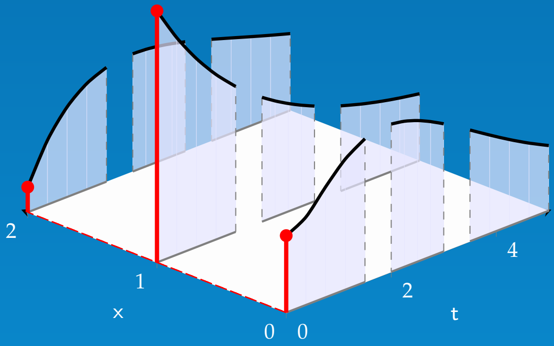
Prostor $T \times X$ (čas obecný)

Obrázek



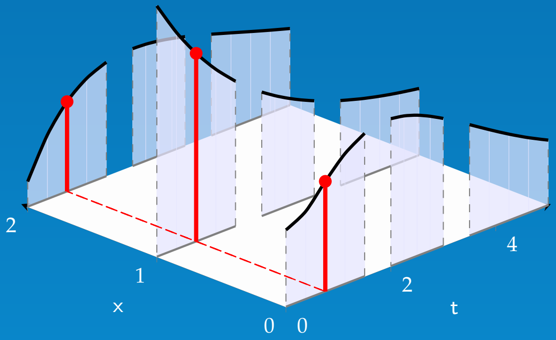
Funkce $u(t, x)$ na $\mathbf{T} \times X$

Obrázek



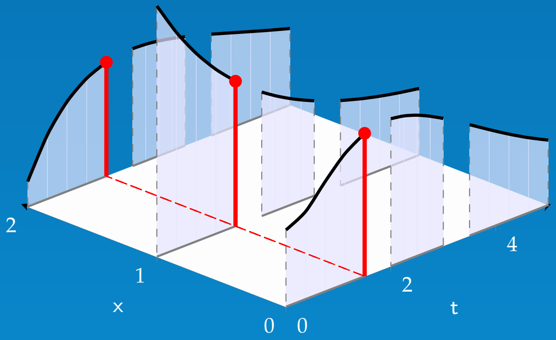
Při pevném t chápeme $u(t) = (u_x(t))$ jako prvek ℓ^∞

Obrázek



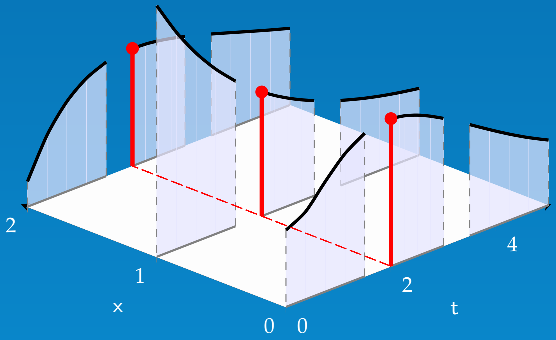
Při pevném t chápeme $u(t) = (u_x(t))$ jako prvek ℓ^∞

Obrázek



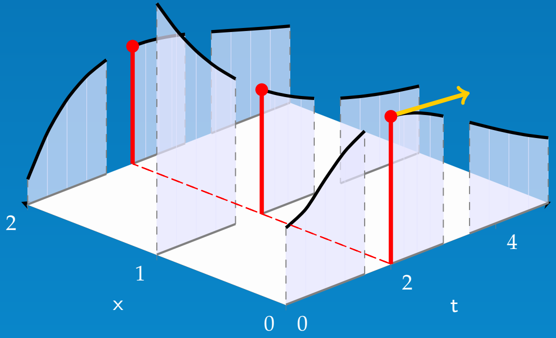
Při pevném t chápeme $u(t) = (u_x(t))$ jako prvek ℓ^∞

Obrázek



Při pevném t chápeme $u(t) = (u_x(t))$ jako prvek ℓ^∞

Obrázek



Hodnoty $u(t)$ v čase t určují derivaci u^{Δ_t} v čase t

Příklady rovnic

Transportní rovnice

$$u^{\Delta_t} = -ku^{\nabla_x} \qquad \text{neboli} \qquad u_x^{\Delta_t} = -k(u_x - u_{x-1})$$

Difuzní rovnice

$$u^{\Delta_t} = (u^{\nabla_x})^{\Delta_x} \qquad \text{neboli} \qquad u_x^{\Delta_t} = u_{x+1} - 2u_x + u_{x-1}$$

Či obecněji

$$u_x^{\Delta_t} = bu_x + au_{x-1}$$

$$u_x^{\Delta_t} = au_{x-1} + bu_x + cu_{x+1}$$

V tomto příspěvku rovnice

- na **nezáporné** časové škále $\mathbf{T} \subset \langle 0, \infty)$, $\min \mathbf{T} = 0$, $\sup \mathbf{T} = \infty$,
- předp. počet diskrétních bodů na omezených intervalech konečný
- s počáteční podmínkou v čase 0

Zkoumané vlastnosti

Cílem vyšetřit u omezených řešení

- zachování znaménka $u(0) \geqq 0 \implies u(t) \geqq 0$
- princip maxima $u(0) \leqq K \implies u(t) \leqq K$

A vlastnosti integrálů

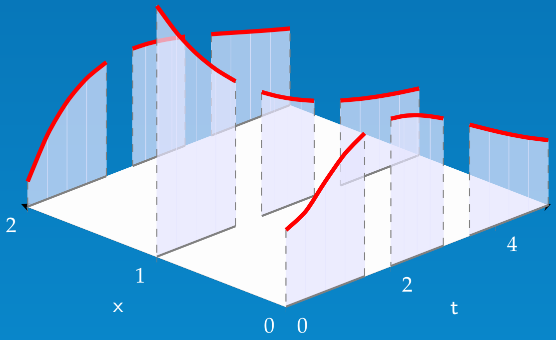
- zachování prostorového integrálu $\sum_x u_x(t) = \sum_x u_x(0)$
- časové integrály $\int_{\mathbf{T}} u_x(t)\,\Delta t$ — konečnost, stejné pro všechna x

Stačí při počáteční podmínce

- $u(0,x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

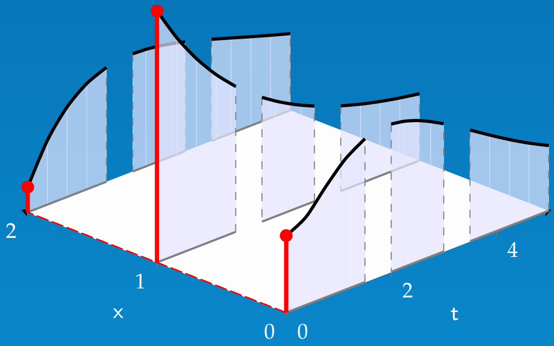
(při ostatních přenásobením/nakombinováním)

Zkoumané vlastnosti



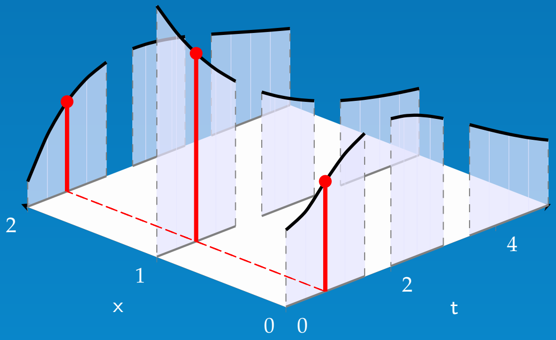
Funkce $u(t,x)$ na $\mathbf{T} \times X$

Zkoumané vlastnosti



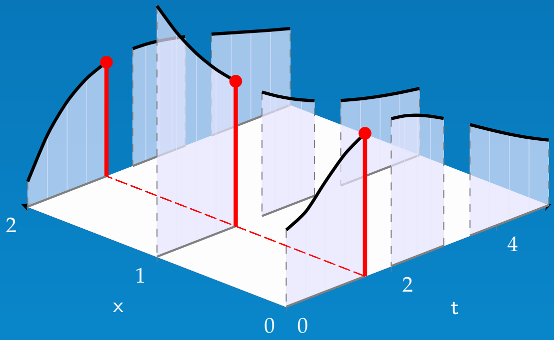
Prostorový integrál (součet)

Zkoumané vlastnosti



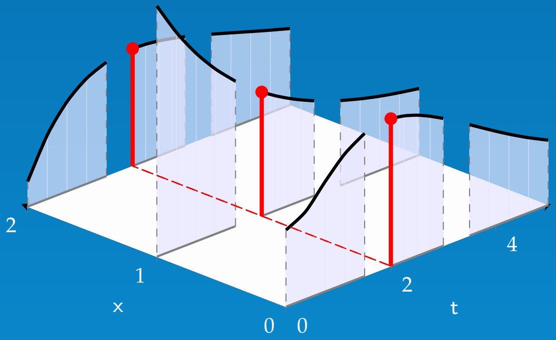
Prostorový integrál (součet)

Zkoumané vlastnosti



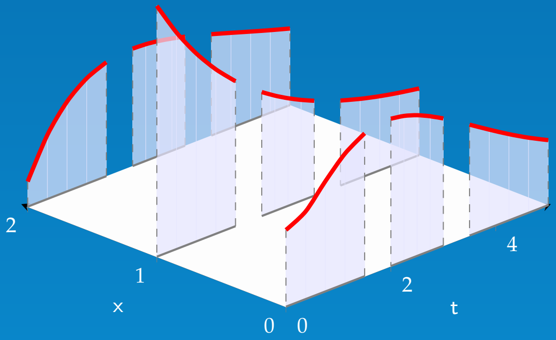
Prostorový integrál (součet)

Zkoumané vlastnosti



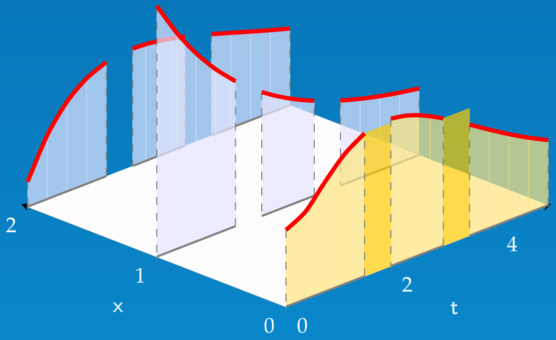
Prostorový integrál (součet)

Zkoumané vlastnosti



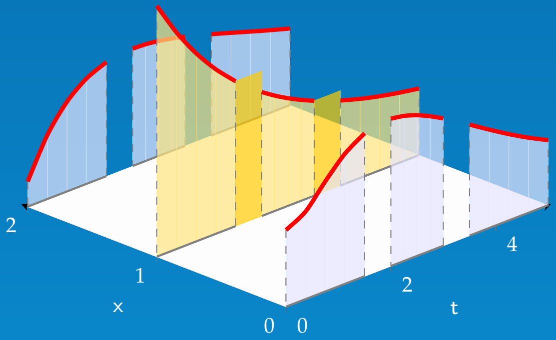
Funkce $u(t,x)$ na $\mathbf{T} \times X$

Zkoumané vlastnosti



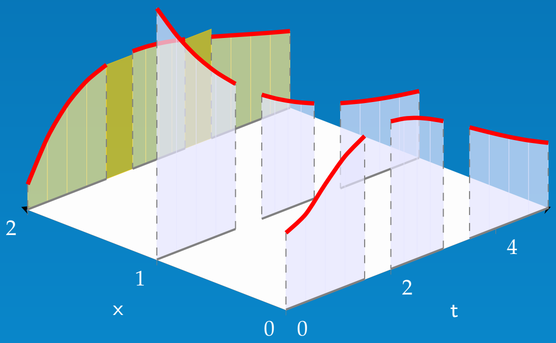
Časový integrál

Zkoumané vlastnosti



Časový integrál

Zkoumané vlastnosti



Časový integrál

Zkoumané vlastnosti

Cílem vyšetřit u omezených řešení

- zachování znaménka $u(0) \geqq 0 \implies u(t) \geqq 0$
- princip maxima $u(0) \leqq K \implies u(t) \leqq K$

A vlastnosti integrálů

- zachování prostorového integrálu $\sum_x u_x(t) = \sum_x u_x(0)$
- časové integrály $\int_{\mathbf{T}} u_x(t)\,\Delta t$ — konečnost, stejné pro všechna x

Stačí při počáteční podmínce

- $u(0,x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

(při ostatních přenásobením/nakombinováním)

Transportní rovnice

$$u_x^{\Delta_t} = -k(u_x - u_{x-1}) \qquad (k > 0)$$

Rozepsáno pro bod t diskrétní:

$$\frac{u_x(t+\mu_t) - u_x(t)}{\mu_t} = -k\big(u_x(t) - u_{x-1}(t)\big)$$
$$u_x(t+\mu_t) = (1 - k\mu_t)\, u_x(t) + k\mu_t\, u_{x-1}(t)$$

Pro bod t spojitý:

$$u_x'(t) = -ku_x(t) + ku_{x-1}(t)$$

Předpokládáme $k\mu_t < 1 \ \forall_t$

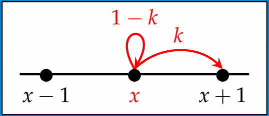
S jednotkovým diskrétní časem

Pro $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $k \leqq 1$

$$u_x(t+1) = (1-k)u_x(t) + k u_{x-1}(t)$$

Tedy soustava $u(t+1) = P^\mathsf{T} u(t)$ diferenčních rovnic pro pravděpodobnosti homogenního markovského řetězce $(X_0, X_1, \dots)$ s diskrétním časem a maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1-k & k & & \\ & 1-k & k & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$



(Bernoulliův proces)

Řešením: $u_x(t) = \binom{t}{x} k^x (1-k)^{t-x}$

Vlastnosti

Zachování znaménka a prostorový integrál

- $(u_x(t))_{x\in X}$ tvoří pro každé t rozdělení
- automaticky $0 \leqq u_x(t) \leqq 1$
- automaticky $\sum_x u_x(t) = 1$

Princip maxima

- pravděpodobnosti přechodu $p_{xy}(t)$ po t krocích závisí jen na $x - y$
- $u_x(t) = \sum_k u_{x-k}(0) \underbrace{p_{x-k,x}(t)}_{= p_{x,x+k}(t)} \leqq \sup_x u_x(0) \cdot 1$

Časové integrály

- $\sum_t u_x(t)$ je očekávaná doba strávená řetězcem ve stavu x
- každý stav navštíven jednou, doba τ setrvání geometricky rozdělená
- $\sum_t u_x(t) = \mathrm{E} \sum I_{X_t=x} = \mathrm{E}\,\tau = 1/k$, tedy konečné a $\forall_x$ stejné

Se spojitým časem

Pro $\mathbf{T} = \mathbf{R}$

$$u'_x(t) = -ku_x + ku_{x-1}$$

Tedy soustava $u'(t) = Q^\mathsf{T} u(t)$ Kolmogorovových prospektivních rovnic pro pravděpodobnosti homogenního markovského řetězce $(X_t, t \geqq 0)$ se spojitým časem a s maticí intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -k & k & & \\ & -k & k & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

(Poissonův proces)

Řešením: $u_x(t) = \mathrm{e}^{-kt} \dfrac{(kt)^x}{x!}$

Vlastnosti

Zachování znaménka a prostorový integrál

- $(u_x(t))_{x\in X}$ tvoří pro každé t rozdělení
- automaticky $0 \leqq u_x(t) \leqq 1$
- automaticky $\sum_x u_x(t) = 1$

Princip maxima

- pravděpodobnosti přechodu $p_{xy}(t)$ pro interval délky t závisí na $x - y$
- $u_x(t) = \sum_k u_{x-k}(0)\, \underbrace{p_{x-k,x}(t)}_{= p_{x,x+k}(t)} \leqq \sup_x u_x(0) \cdot 1$

Časové integrály

- $\int u_x(t)\,\mathrm{d}t$ je očekávaná doba strávená řetězcem ve stavu x
- každý stav navštíven jednou, doba τ setrvání exponenciálně rozdělená
- $\int u_x(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{E} \int I_{X_t = x}\,\mathrm{d}t = \mathrm{E}\,\tau = 1/k$, tedy konečné a $\forall_x$ stejné

Obecný čas

Pro obecný okamžik t s $\mu = \mu_t$ (všechna $\mu_t < 1/k$)

t spojitý ($\mu_t = 0$): $$u'_x(t) = -ku_x(t) + ku_{x+1}(t)$$

t diskrétní ($\mu_t > 0$): $$u_x(t+\mu_t) = (1 - \boldsymbol{k\mu_t})u_x(t) + \boldsymbol{k\mu_t}\, u_{x+1}(t)$$

Tedy rovnice pro markovský řetězec se **smíšeným časem**

- ve **vnořeném řetězci** přechod $x \longrightarrow x+1$ s pravděpodobností 1
- a **doba čekání** na výstup ze stavu:
  - ve spojitých časech s intenzitou k
  - v diskrétních s pravděpodobností $k\mu_t$

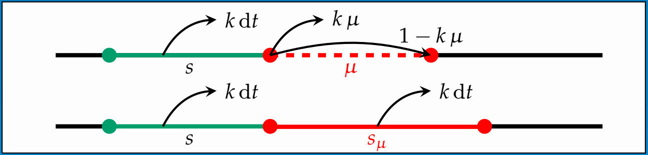
Vlastnosti

- znaménko, prostorový integrál, princip maxima zůstávají
- časový integrál s menším zamyšlením. . .

Doba ve stavu

Jsme-li na začátku intervalu ve stavu, do střední doby interval přispěje:

- je-li spojitý délky s: $\int_0^s \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-ks} \cdot$(následující)
- je-li diskrétní délky μ: $\mu + (1 - k\mu) \cdot$ (následující)
- tj. diskrétní délky μ stejně jako spojitý délky $\boldsymbol{s_\mu} = -\frac{1}{k}\ln(1 - k\mu)$



Místo diskrétních intervalů vložíme do $\mathbb{T}$ spojité $(s_\mu > \mu)$

- řešení u se **změní** (na Poissonův proces), ale střední doby **stejné**
- časový integrál na struktuře časové škály $\mathbb{T}$ nezávisí

Rovnice difuzního typu

$$u_x^{\Delta_t} = au_{x+1} + bu_x + cu_{x-1}$$

Předpokládáme

- $a, c \geqq 0$, u diskrétních bodů navíc $-b\mu_t < 1$

Speciální případy

- transportní rovnice $a = 0$, $b = -c$
- difuzní rovnice $a = c = 1$, $b = -2$

Postup

- nejprve „pravděpodobnostní“ případ $a + b + c = 0$
- obecný případ převedením na pravděpodobnostní, předvedeme pro $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $\mathbf{T} = \langle 0, \infty)$

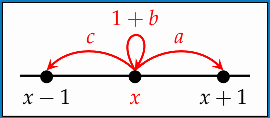
Pravděpodobnostní případ

Pro $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $-b \leqq 1$, resp. $\mathbf{T} = \langle 0, \infty)$, a $\boldsymbol{a + b + c = 0}$

$$t \text{ diskrétní:} \qquad u_x(t+1) = a u_{x-1}(t) + (1+b) u_x(t) + c u_{x+1}(t)$$

$$t \text{ spojitý:} \qquad u_x'(t) = a u_{x-1}(t) + b u_x(t) + c u_{x+1}(t)$$

Tedy rovnice pro pravděpodobnosti markovského řetězce s maticí pravděpodobností resp. s maticí intenzit



$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & c & 1{+}b & a & & \\ & & c & 1{+}b & a & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & c & b & a & & \\ & & c & b & a & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Z vlastností rozepišme snad jen časové integrály...

Časové integrály

Vnořeným řetězcem známá náhodná procházka

- odpovídá $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $a^* = \frac{a}{a+c}$, $1 + b^* = 0$, $c^* = \frac{c}{a+c}$
- $a = c$: stavy trvalé nulové, $\sum_t u_x^*(t) = \infty$
- $a > c$: stavy přechodné, do $x \geqq 0$ vždy a $\sum_t u_x^*(t) = (a^* - c^*)^{-1}$, do $x < 0$ s pravděpodobností $(\frac{c^*}{a^*})^x$ a $\sum_t u_x^*(t) = (\frac{c^*}{a^*})^x (a^* - c^*)^{-1}$

Původní řetězec při návštěvě stavu v něm setrvá po dobu průměrně $1/(-b)$, tedy při $a = c$ zůstává $\int u_x(t)\,\Delta t = \infty$,

$$\text{při } a > c: \quad \int u_x(t)\,\Delta t = \frac{1}{-b} \sum_t u_x^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{a-c} & x \geqq 0, \\ \frac{(c/a)^x}{a-c} & x < 0 \end{cases}$$

Podobně jako v případě transportní rovnice se nahlédne, že stejný výsledek platí i pro ostatní časové škály.

Obecný diskrétní případ

Jednotkový čas $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $a, c > 0$, $-b < 1$ libovolné

$$a + (1 + b) + c + \boldsymbol{d} = 1 \qquad \text{tj.} \qquad d = -(a + b + c)$$

Dosazením: rovnici splňuje funkce

$$u(t) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{d})^{\boldsymbol{t}}\, \widetilde{u}(t)$$

kde $\widetilde{u}$ je řešením pravděpodobnostní rovnice s

$$\widetilde{a} = \frac{a}{1-d}, \quad 1 + \widetilde{b} = \frac{1+b}{1-d}, \quad \widetilde{c} = \frac{c}{1-d}.$$

V případě $d > 0$ ($a + (1 + b) + c < 1$) můžeme interpretovat jako řetězec s dodatečným absorpčním stavem.

Obecný spojitý případ

$\mathbf{T} = \langle 0, \infty)$, $a, c > 0$, b libovolné

$$a + b + c + d = 0$$

Dosazením: rovnici splňuje funkce

$$u(t) = \mathrm{e}^{-dt}\widetilde{u}(t)$$

kde $\widetilde{u}$ je řešením pravděpodobnostní rovnice s $\widetilde{a} = a, \widetilde{c} = c$, $\widetilde{b} = -(a + c)$.

V případě $d > 0$ $(a + b + c < 0)$

- můžeme interpretovat jako řetězec s přidaným absorpčním stavem
- vlastnosti platí, dokonce lépe $0 \leqq u_x(t) \leqq \mathrm{e}^{-dt}$, $\sum_x u_x(t) = \mathrm{e}^{-dt}$

V případě $d < 0$

- v nerovnostech $\mathrm{e}^{-dt} \to \infty$
- kdy bude $\int u_x(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, můžeme spočítat...

Časové integrály

Pro řetězec $(\widetilde{X}_t)$ z pravděpodobnostní rovnice s $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ označme

- T_n = okamžik n-té změny stavu; $T_0 = 0$
- τ_n = doba strávená ve stavu po n-té změně stavu, $T_n = \sum_0^{n-1} \tau_k$

Integrál poskládáme z příspěvků jednotlivých přechodů (vnořeného řetězce)

$$\int u_x(t)\,\Delta t = \int D(0,t)\widetilde{u}_x(t)\,\Delta t = \mathrm{E}\int D(0,t) I_{\widetilde{X}_t = x}\,\Delta t$$

$$= \sum_n \underbrace{\mathrm{E}\left(\int_{T_n}^{T_{n+1}} D(0,t)\,\Delta t\right)}_{I_n} \cdot u_x^*(n) = \sum_n I_n u_x^*(n)$$

kde $D(t_1, t_2) = (1-d)^{t_2 - t_1}$ resp. $\mathrm{e}^{-d(t_2 - t_1)}$ označuje „diskontní faktor“ a I_n je střední diskontovaná doba strávená řetězcem $(\widetilde{X}_t)$ po n-té změně stavu do příští změny

Výpočet

Příspěvek n-tého přechodu

- $I_n = \mathrm{E} \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(0,t)\, \Delta t = \overbrace{\mathrm{E}\, D(0,T_n)}^{D_n} \overbrace{\mathrm{E}\Big(\int_0^{\tau_n} D(T_n,t)\, \Delta t \mid T_n \Big)}^{e_n}$
- D_n je střední diskontní faktor do n-té změny stavu, $D_n = (D_1)^n$
- e_n je střední diskontovaná doba do opuštění stavu (diskontovaná k okamžiku vstupu do stavu), $e_n = e_1$

V diskrétním resp. spojitém případě (předp. $-b > 0$)

$$E_1 = \mathrm{E}(1-d)^{T_i} = \sum_1^\infty (1-d)^k (-\widetilde{b})(1+\widetilde{b})^{k-1} = \frac{-b-d}{-b} = \frac{a+c}{-b}$$

$$E_1 = \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-dT_i} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-dt} \cdot \widetilde{b}\, \mathrm{e}^{-\widetilde{b}t}\, \mathrm{d}t = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{b}+d} = \frac{a+c}{-b}$$

$e_1 = \mathrm{E} \sum_0^{\tau_0 - 1} (1-d)^k$ resp. $\mathrm{E} \int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{-dt}\, \mathrm{d}t$, tedy $e_1 = \frac{1}{d}(1 - D_1) = \frac{1}{-b}$

Výsledek

V případě $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ i $\mathbf{T} = \langle 0, \infty)$ stejné hodnoty (tak by vyšlo i pro jiné časové škály), v řadě pro časový integrál

$$\int u_x(t)\,\Delta t = \sum_n I_n u_x^*(n)$$

je n-tý člen při $n \to \infty$

$$I_n\, u_x^*(n) = e_1\, u_x^*(n)\, D_1^{n-1} = \frac{1}{-b} \cdot \binom{n}{\frac{n+x}{2}} (a^*)^{\frac{n+x}{2}} (c^*)^{\frac{n-x}{2}} \cdot \left(\frac{a+c}{-b}\right)^n$$

$$\asymp \text{konst} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{4a^* c^*})^n \left(\frac{-b-d}{-b}\right)^n = \text{konst} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{4ac}}{-b}\right)^n$$

a součet konečný právě když $\sqrt{4ac} < -b$

Shrnutí

Použití výsledků z markovských řetězců

- v pravděpodobnostním případě automatické vlastnosti
- transformací i nepravděpodobnostní případ
- časové integrály nezávisí na konkrétní časové škále
- nezabývali jsme se $a, c < 0$ ani $t < 0$

Analogicky

- pro náhodnou procházku s více možnostmi kroků než $-1, 0, 1$
- ve vícerozměrných prostorech (místo X mít X^2, X^3)

Nelineární případ?

- rovnice $u^{\Delta_t}(t) = A\, u(t)$ s nelineárním operátorem A

ROVNICE NA ČASOVÝCH ŠKÁLÁCH A NÁHODNÉ PROCESY

Michal Friesl

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

- http://home.zcu.cz/~friesl/Rob14.html