

Jádrové odhady hustot v částicovém filtru

David Coufal

ÚI AV ČR, KPMS MFF UK

david.coufal@cs.cas.cz

ROBUST 2014

Jetřichovice, 20. ledna 2014

Agenda

- částečkový filtr
- jádrové odhady hustot
- jádrové odhady hustot v částečkovém filtru
- experimenty

Metody Monte Carlo

- **Aproximace integrálních charakteristik** rozdělení π na základě náh. výběru $\{X_i(\omega) = x_i\}_{i=1}^n$ z π , vychází ze SZVČ ($f \in L_1$):

$$\hat{I}_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f(X_1) dP_{X_1} = \mathbb{E}_\pi[f] \quad \text{s.j.}$$

- Náhodný výběr o rozsahu n z X_1 lze asociovat s **empirickou (náhodnou) mírou** definovanou jako uniformě vážený součet Diracových měr

$$\delta^n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(X_i(\omega))$$

- **Konvergenci MC aproximace** lze přeformulovat v rámci jazyka empirických měr:

$$\hat{I}_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \int f(x) \delta^n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\pi[f] \quad \text{s.j.}$$

Importance sampling

- Problematika MC aproximací kdy **neumíme z $\pi(dx)$ přímo vzorkovat**, hustota $p(x)$ je typicky známá až na normovací konstantu, tj., $p(x) \propto p^*(x)$
- Namísto přímého vzorkování z $\pi(dx)$ vzorkujeme z **návrhového rozdělení**, které má hustotu $q(x)$, nechť $w(x) = p^*(x)/q(x)$
- Aproximace integrálních charakteristik vede na

$$\hat{I}_n(f) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) w(X_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(X_i)} = \sum_{i=1}^n f(X_i) \tilde{w}(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\pi[f] \quad \text{s.j.}$$

kde $\tilde{w}(x_i)$ jsou váhy určené poměrem původní a návrhové hustoty a následně normalizované, tj. $\sum_i \tilde{w}(x_i) = 1$

Importance sampling

- Výraz $\hat{I}_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\tilde{w}(x_i)$ lze přepsat pomocí **empirické míry**. Definujeme-li

$$\hat{\pi}^n(dx) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}(x_i) \delta_{x_i}(dx),$$

dostáváme $\hat{\pi}^n(dx)$ jako vážený součet Dirakových měr.

- Aproximaci $\hat{I}_n(f)$ lze opět přepsat jako integrál funkce f vzhledem k empirické míře $\hat{\pi}^n(dx)$, tj.

$$\hat{I}_n(f) = \int f(x) \hat{\pi}^n(dx) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\tilde{w}(x_i).$$

Resampling

- **Výběr s vrácením** o rozsahu n s pravděpodobnostmi výběru odpovídajícím **jednotlivým vahám**. Na základě převzorkování pak sestavíme převzorkovanou **uniformě váženou** empirickou míru

$$\pi_t^n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(X^i).$$

- Hodnota integrálních charakteristik vzhledem k původní a převzorkované míře **zůstává zachována**, tj.

$$\mathbb{E}_{\pi_t^n | \hat{\pi}_t} [f] = \hat{I}_n(f).$$

- **Vzorky nejsou nadále i.i.d.**

Signál

- Necht' $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ je **Markovský řetězec** se spojitou množinou stavů $X_t \in \mathbb{R}^{n_x}$, $n_x \in \mathbb{N}$.
- Pravidelnostní chování MŘ je dáno **specifikací počátečního rozdělení X_0** pomocí příslušné hustoty p_0
- **Množinou přechodových jader $K_{t-1}(dx_t|x_{t-1})$** s hustotami $K_{t-1}(x_t|x_{t-1})$ pro $t = 1, \dots, T$.

Observační proces

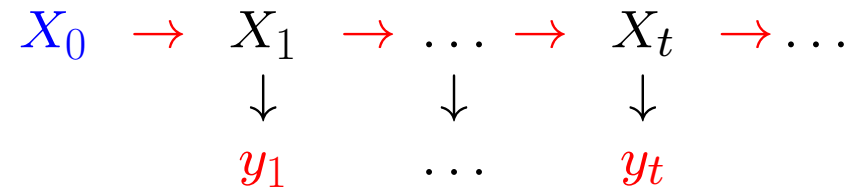
- **observační proces** $\{Y_t, t = 1, 2, \dots\}$, $Y_t \in \mathbb{R}^{n_y}$,
určen pomocí funkce h_t na základě hodnot signálu
a dále se pozorování předpokládá zašuměno
formálně je observační proces definován:

$$Y_t = h_t(X_t) + V_t, \quad t > 0$$

V_t je šum, tj. náhodná veličina o známé hustotě g_t .

Úloha filtrace

- evoluce signálu a observačního procesu:



- sdružené rozdělení stavů a pozorování řetězce má tvar

$$p(x_{0:t}, y_{1:t}) = p_0(x_0) \prod_{k=1}^t g_k(y_k | x_k) K_{k-1}(x_k | x_{k-1}).$$

kde $g_k(y_k | x_k) = g_k(y_t - h(x_t))$.

- **úloha filtrování** je vypočítat podmíněné rozdělení $X_{0:t} = (X_0, \dots, X_t)$ na základě pozorování historie $Y_1 = y_1, \dots, Y_t = y_t$,

Filtrační rozdělení

- **podmíněné rozdělení** - popsáno podmíněnou hustotou $p(x_{0:t}|y_{1:t})$ počítanou ze združeného rozdělení

$$p(x_{0:t}|y_{1:t}) = \frac{p(x_{0:t}, y_{1:t})}{\int p(x_{0:t}, y_{1:t}) dx_{0:t}} = \frac{p(x_{0:t}, y_{1:t})}{Z_t(y_{1:t})}$$

- integrály $Z_t(y_{1:t}) = \int p(x_{0:t}, y_{1:t}) dx_{0:t}$ ve jmenovateli **nelze obecně určit v uzavřené formě**, ale jsou konstantní pro dané y_1, \dots, y_t .
- dostáváme tedy, že filtrační hustoty mají tvar

$$p(x_{0:t}|y_{1:t}) \propto p(x_{0:t}, y_{1:t})$$

a úlohu filtrování lze řešit pomocí sekvenčních MC metod

- **částicový filtr**

Částicový filtr - algoritmus

- **0. deklarace:**

n - počet vzorků,

T - výpočetní horizont,

$p_0(x_0)$ - hustota počátečního rozdělení $\pi_0 \sim X_0$,

$K_{t-1}(x_t|x_{t-1})$, $t = 1, \dots, T$, - podmíněné přechodové hustoty

- **1. inicializace:**

$t = 0$,

vzorkování $\{\bar{x}_0^i \sim p_0(dx_0)\}_{i=1}^n$,

sestavení emp. míry $\hat{\pi}_0^n(dx_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\bar{x}_0^i}(dx_0)$,

přiřazení $\pi_0^n(dx_0) = \hat{\pi}_0^n(dx_0)$, i.e., $\{x_0^i = \bar{x}_0^i\}_{i=1}^n$.

- **2. importance sampling:**

$t = t + 1,$

vzorkování $\{\bar{x}_t^i \sim K_{t-1}(dx_t | x_{t-1}^i)\}_{i=1}^n,$

pro $i = 1:n$ úprava vah

$$\tilde{w}(\bar{x}_t^i) = \frac{g_t(\mathbf{y}_t - h_t(\bar{x}_t^i))}{\sum_i g_t(\mathbf{y}_t - h_t(\bar{x}_t^i))},$$

sestavení emp. míry $\hat{\pi}_t^n(dx_t) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}(\bar{x}_t^i) \delta_{\bar{x}_t^i}(dx_t).$

- **3. resampling**

převzorkování $\{x_t^i\}_{i=1}^n$ pomocí $\mathcal{M}(n, \tilde{w}(\bar{x}_t^1), \dots, \tilde{w}(\bar{x}_t^n))$

a sestavení emp. míry $\pi_t^n(dx_t).$

- **4.** pokud $t = T$ konec, jinak návrat do kroku 2.

Konvergence částicového filtru

Věta. Nechť π_t^n , $t \geq 1$ je posloupnost empirických měr generovaných částicovým filtrem a π_t , $t \geq 0$ je posloupnost příslušných teoretických distribucí. Pak, pro všechna $t \geq 1$ a $f \in \mathcal{C}_b$ platí

$$\mathbb{E}[|\pi_t^n f - \pi_t f|^2] \leq \frac{c_t^2 \|f\|_\infty^2}{n}.$$

Důkaz. Doucet et. al. *SMC Methods in Practice*, Springer 2001.

Intermezzo - 1

- Empirické míry generované časticovým filtrem aproximují teoretické distribuce které **mají hustoty**.
- **Otázka**. Lze na základě těchto empirických měr tyto hustoty rekonstruovat?

Zavedení jádrových odhadů

- Necht' $\{X_i\}_{i=1}^n$ je náhodný výběr o rozsahu n z rozdělení s hustotou f . Pak obecný jádrový odhad této hustoty má tvar

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

kde K je spojitá vhodná funkce a $h > 0$ je parametr který se označuje jako šířka pásma (bandwidth)

- (Parzen 1962) podmínky za kterých je $\hat{f}_n(x)$ konzistentním odhadem $f(x)$

Mean Squared Error

- chyba odhadu v daném bodě x

$$\text{MSE}_x(\hat{f}_n) = \mathbb{E}[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2.$$

- na základě standardních vlastností stř. hodnoty a rozptylu

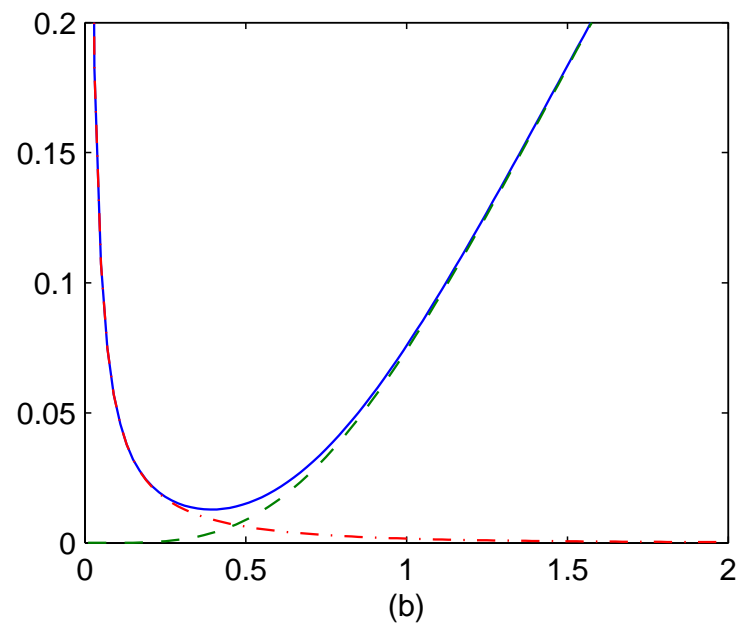
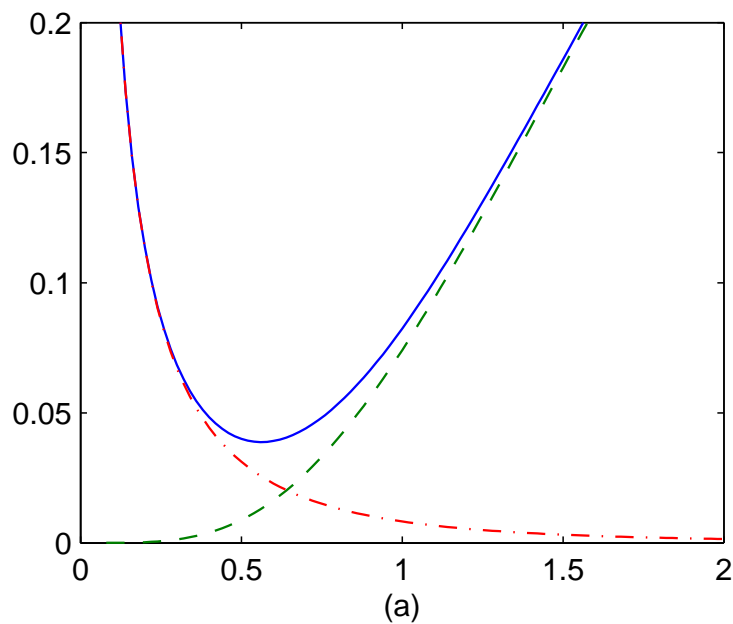
$$\begin{aligned}\text{MSE}_x(\hat{f}_n(x)) &= \mathbb{E}[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 \\ &= (\mathbb{E}[\hat{f}_n(x) - f(x)])^2 + \text{var}[\hat{f}_n(x) - f(x)] \\ &= (\mathbb{E}[\hat{f}_n(x)] - f(x))^2 + \text{var}[\hat{f}_n(x)] \\ &= (b[\hat{f}_n(x)])^2 + \sigma^2[\hat{f}_n(x)].\end{aligned}$$

Mean Integrated Square Error

- MSE_x udává chybu aproximace ve zvoleném bodě. Globální míra chyby je pak **integrovaná verze MSE_x** definovaná jako

$$\text{MISE}(\hat{f}_n) = \mathbb{E} \int (\hat{f}_n(x) - f(x))^2 dx.$$

Bias variance trade-off



vychýlení (zeleně) a rozptyl (červeně) jádrového odhadu pro
 $n = 10$; $n = 100$.

Lze obecně vyjádřit **závislost MISE na h** ?

Fourierův obraz jádrového odhadu

- Necht' $\delta^n(d\mathbf{x}) = 1/n \sum_{j=1}^n \delta_{\mathbf{x}_j}(d\mathbf{x})$ je **empirická míra** určená i.i.d. vzorkem $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1}^n$. **Char. fce empirické míry** má tvar

$$\phi_n(\boldsymbol{\omega}) = \int e^{i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \rangle} \delta^n(d\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X}_j \rangle}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d.$$

- Fourierův obraz jádrového estimátoru vzniká **konvolucí** empirické míry a **zvoleného konvolučního jádra**

$$\mathcal{F}[\hat{f}_n](\boldsymbol{\omega}) = \phi_n(\boldsymbol{\omega}) K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega}).$$

Výpočet MISE ve Fourierově transformaci

- za předpokladu i.i.d. charakteru vzorku platí

$$\begin{aligned} \text{MISE}(h) = & \frac{1}{(2\pi)^d} \left[\int |1 - K_{\mathcal{F}}(h\omega)|^2 |\phi(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{n} \int |K_{\mathcal{F}}(h\omega)|^2 d\omega \right] \\ & - \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{n} \int |\phi(\omega)|^2 |K_{\mathcal{F}}(h\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

- horní mez

$$\text{MISE}(h) \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \left[\int |1 - K_{\mathcal{F}}(h\omega)|^2 |\phi(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{n} \int |K_{\mathcal{F}}(h\omega)|^2 d\omega \right]$$

Sobolevovy třídy hustot

- **Definice.** Necht' $\beta \geq 1$ je přirozené a $L > 0$, $i = 1, \dots, d$. Sobolevova třída hustot $\mathcal{P}_{S(\beta, L)}$ obsahuje všechny hustoty $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ takové že

$$\int \|\omega\|^{2\beta} |\phi(\omega)|^2 d\omega \leq (2\pi)^d L^2$$

- omezenost parciálních derivací

Řád ℓ konvolučního jádra

- **Definice.** Nechť $\ell \geq 1$ je přirozené. Řekneme, že jádro $K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je řádu ℓ když $K \in L^2(\mathbb{R}^d)$ je symetrické a jeho Fourierova transformace $K_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega})$ splňuje $K_{\mathcal{F}}(\mathbf{0}) = 1$ a má spojitě všechny smíšené parciální derivace $K_{\mathcal{F}, i_1, \dots, i_m}^{(m)} = \partial^m K_{\mathcal{F}} / \partial_{i_1} \dots \partial_{i_m}$ do ℓ -tého řádu takové, že $K_{\mathcal{F}, i_1, \dots, i_m}^{(m)}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ pro všechna $m = 1 \dots \ell$.

Omezenost prvního členu F-MISE

Lemma. Nechť $K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je konvoluční jádro řádu $\ell \geq 1$, $\ell \in \mathbb{N}$. Pak existuje konstanta $A \geq 0$ taková, že pro každou hustotu f s Fourierovou transformací $\phi(\omega)$ a $h > 0$,

$$\int |1 - K_{\mathcal{F}}(h\omega)| |\phi(\omega)|^2 d\omega \leq A^2 h^{2\ell} \int \|\omega\|^{2\ell} |\phi(\omega)|^2 d\omega.$$

Druhý člen F-MISE

z Plancherelovy formule

$$\frac{1}{n} \int |K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega} = \frac{(2\pi)^d}{nh^{2d}} \int K^2(\mathbf{x}/h) d\mathbf{x} = \frac{(2\pi)^d}{nh^d} \int K^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

MISE pro Sobolevovu třídu hustot

Věta. Necht' n je počet **i.i.d. vzorků** z distribuce s d -dimenzionální hustotou $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, která je **Sobolevovy třídy řádu $\beta \geq 1$** , tj. $f \in \mathcal{P}_S(\beta, L)$. Necht' K je konvoluční **jádro řádu $\ell = \beta$** . Necht' pro nějaké $\alpha > 0$ je šířka pásma **$h(n) = \alpha n^{-\frac{1}{2\beta+d}}$** . Pak pro $n \geq 1$ jádrový estimátor \hat{f}_n splňuje

$$\sup_{f \in \mathcal{P}_S(\beta, L)} \text{MISE}(h) \leq C n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d}}$$

kde $C > 0$ je konstanta závislá pouze na A, L, α a jádru K .

Intermezzo - 2

- **Odpověď.** Empirické míry generované částicovým filtrem lze použít k rekonstrukci hustot příslušných teoretických rozdělání a to i přesto, že tyto míry nejsou konstruovány na základě i.i.d vzorků.

Částicový filtr a jádrové estimátory

Věta. Nechť $\{\pi_t^n, t \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost empirických měr generovaných částicovým filtrem. Nechť p_t^n je posloupnost odpovídajícím **jadrových odhadů hustot** s šířkou pásma danou v závislosti na n jako $h(n) = \alpha n^{-\frac{1}{2\beta+d}}$ pro nějaké $\alpha > 0$. Nechť π_t je posloupnost odpovídajících teoretických distribucí s hustotami p_t . Jestliže $p_t \in \mathcal{P}_{S(\beta, L_t)}$, $t \in \mathbb{N}_0$ pro nějaké $\beta \in \mathbb{N}$ a **použité konvoluční jádro má řád β** pak pro MISE jádrových odhadů platí

$$\mathbb{E} \left[\int (p_t^n(\mathbf{x}) - p_t(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right] \leq C_t^2 \cdot n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d}}$$

kde

$$C_t = (AL_t\alpha^\beta + c_t\alpha^{-d/2}||K||)$$

Důkaz tvrzení - 1

$$\mathbb{E}[|\pi_t^n f - \pi_t f|^2] \leq \frac{c_t^2 \|f\|_\infty^2}{n}$$

speciální volba $f = (x_{0:t}) = f(\mathbf{x}) = e^{i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_t \rangle}$ pak $\|f\|_\infty = 1$.

$$\mathbb{E}[|\psi_t^n(\boldsymbol{\omega}) - \psi_t(\boldsymbol{\omega})|^2] \leq \frac{c_t^2}{n},$$

$$|K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 \cdot \mathbb{E}[|\psi_t^n(\boldsymbol{\omega}) - \psi_t(\boldsymbol{\omega})|^2] \leq |K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 \cdot \frac{c_t^2}{n},$$

$$\mathbb{E}[|\psi_t^n(\boldsymbol{\omega})K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega}) - \psi_t(\boldsymbol{\omega})K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2] \leq |K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 \cdot \frac{c_t^2}{n},$$

$$\mathbb{E} \left[\int |\psi_t^n(\boldsymbol{\omega})K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega}) - \psi_t(\boldsymbol{\omega})K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega} \right] \leq \frac{c_t^2}{n} \int |K_{\mathcal{F}}(h\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbb{E} \left[\int (p_t^n(\mathbf{x}) - p_t^*(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right] \leq \frac{c_t^2}{nh^d} \int K^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Komentář

- **Není nutný** předpoklad o **i.i.d. charakteru vzorků** nesoucích empirickou míru π_t^n . To je důležité z pohledu toho, že víme že díky převzorkování vzorky nejsou i.i.d.
- **Konvergence.** Pro $t \in \mathbb{N}$ fixní, okamžitě vidíme, že **empirická hustota konverguje ke skutečné** v MISE, se vzrůstajícím počtem vzorků, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int (p_t^n(\mathbf{x}) - p_t(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = 0$.
- **Dimenze hraje roli.** Pro $d_1 < d_2$, $n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d_1}} < n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d_2}}$ se zvyšující se dimenzí musíme zvýšit počet vzorků pro dosažení požadované přesnosti.

Komentář

- Věta předpokládá, že skutečné hustoty p_t jsou β -Sobolevovské pro nějaké β **pro každé** t . **Platí to v případě částicového filtru?**
- Řád jádra β je volitelný parametr. Existují techniky jak **lze konstruovat jádra libovolných řádů.**

Sobolevův charakter částicového filtru

Věta. Nechť v částicovém filtru je $p_0 \in \mathcal{P}_{S(\beta, L_0)}$. Nechť pro přechodové jádro a jeho Fourierovu transformaci platí že je omezená nějakou β -Sobolevovou funkcí $K_b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $K_b \in \mathcal{P}_{S(\beta, L_{K_b})}$. Pak hustoty p_t jsou β -Sobolevské pro každé $t \in \mathbb{N}_0$.

Intermezzo - 3

- Věta 2 říká **za jakých předpokladů částicový filtr splňuje předpoklady věty 1** a tudíž platí odhady MISE chyby dokázané ve větě 1.
- **Otázka.** Jak to vypadá s prakticku aplikací uvedených teoretických výsledků?

Experimenty

- filtrace Gaussovského procesu se skrytými stavy
- jedno a více-dimenzionální varianta
- analytické řešení - Kalmánův filtr
- porovnání výstupů z částicového a Kalmánova filtru
- implementace a experimenty v MATLABu

1D - Gaussovský proces

- 1D - Gaussovský signál/observační proces

$$X_t = aX_{t-1} + b + cW_t, \quad Y_t = hX_t + gV_t, \quad t \geq 1.$$

- a, b, c, h, g reálné parametry, $c, g > 0$
- $X_0, W_1, V_1, W_2, V_2, \dots$ 1D - normálně rozdělené n.v.
- $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, ostatní i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $\{X_t, t \geq 0\}$ Gaussovský Markovský řetězec
- evoluce řetězce

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X_t & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & y_1 & & \dots & & y_t & & \end{array}$$

1D - Gaussovský proces, úloha filtrace

- **filtrační rozdělení** - podmíněná rozdělení: $P_{X_t|Y_{1:t}}$
- rozdělení jsou **normální**
tj. určená odpovídajícími momenty (int. charakteristikami):

$$\hat{\mu}_t = \mathbb{E}[X_t | Y_{1:t}]$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2 | Y_{1:t}]$$

- analytické řešení ve formě rekurenčních rovnic

1D - Kalmánův filtr

- 1D - Kalmánův filtr

$$\hat{\mu}_t = \frac{g^2}{v^2}b + \frac{c^2}{v^2}hy_t + \frac{g^2}{v^2}a \frac{\hat{\sigma}_{t-1}^2 ah(y_t - bh) + v^2 \mu_{t-1}}{h^2 \hat{\sigma}_{t-1}^2 a^2 + v^2},$$

$$\sigma_t^2 = \frac{g^4}{v^2}a^2 \frac{\hat{\sigma}_{t-1}^2}{h^2 \hat{\sigma}_{t-1}^2 a^2 + v^2} + \frac{g^2 c^2}{v^2}$$

pro $v^2 = c^2 h^2 + g^2$, $\hat{\mu}_0 = \mu_0$, $\hat{\sigma}_0 = \sigma_0$

Sobolevův charakter 1D - Gaussovského SMC filtru

- $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}, \sigma_0 > 0$. pro příslušnou hustotu p_0 máme:

$$\begin{aligned} \int (p_0'(x))^2 dx &= \int \frac{(x - \mu_0)^2}{\sigma_0^6 2\pi} \exp\left[-\frac{(x - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right] dx = \frac{\sigma_0}{\sigma_0^4 2\pi} \int z^2 \exp(-z^2) dz \\ &= \frac{1}{\sigma_0^3 4\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

tj. p_0 is **1-Sobolevská** pro $L_0 = 1/(\sigma_0^3 4\sqrt{\pi})$

- Fourierova transformace jádra dává:

$$\begin{aligned} |K_{\mathcal{F}}(\omega)| &= e^{-\frac{1}{2}(\omega c)^2} |e^{i\omega(ax_{t-1}+b)}| \leq e^{-\frac{1}{2}(\omega c)^2}. \\ (2\pi)^{-1} \int \omega^{2\beta} |e^{-\frac{1}{2}(\omega c)^2}|^2 d\omega &= (2\pi)^{-1} \int \omega^2 e^{-(\omega c)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2c^3} = \frac{1}{c^3 4\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

- tedy $|K_{\mathcal{F}}(\omega|x_{t-1})|^2 \leq |K_b(\omega)|$, kde $K_b(\omega) = e^{-\frac{1}{2}(\omega c)^2}$, která je **1-Sobolevská** s konstantou $L_{K_b} = 1/(c^3 4\sqrt{\pi})$.

Vlastnosti Gaussovského konvolučního jádra

- standardní **normální jádro** použité pro jádrové odhady

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

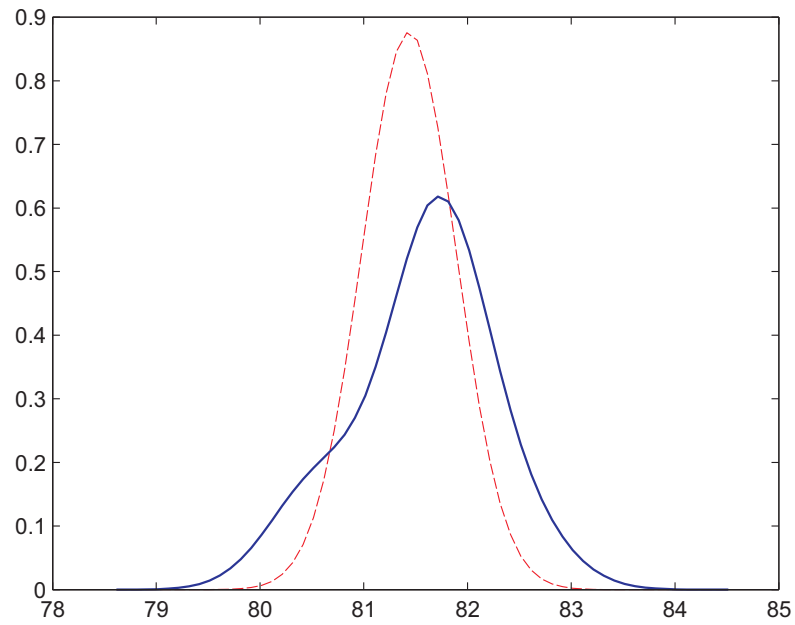
- **řád jádra je $\ell = \beta = 1$** : $K_{\mathcal{F}}(\omega) = e^{-0.5\omega^2}$, $K_{\mathcal{F}}(0) = 1$. $K'_{\mathcal{F}}(\omega) = -\omega e^{-0.5\omega^2}$, tj., $K'_{\mathcal{F}}(0) = 0$. $K''_{\mathcal{F}}(\omega) = (\omega^2 - 1)e^{-0.5\omega^2}$, tj., $K''_{\mathcal{F}}(0) = -1 \neq 0$.
- konstanta A , dána řešením rovnice $(\omega^2 + 1)e^{-0.5\omega^2} = 1$ určující bod maxima $(1 - K_{\mathcal{F}}(\omega))/\omega$, $\omega > 0$. Řešení $\omega^* \approx 1.5852$ z toho $|1 - K_{\mathcal{F}}(\omega^*)|/|\omega^*| \approx 0.4513$ tj. možno volit **$A = 0.5$**

1D - implementace v MATLABu

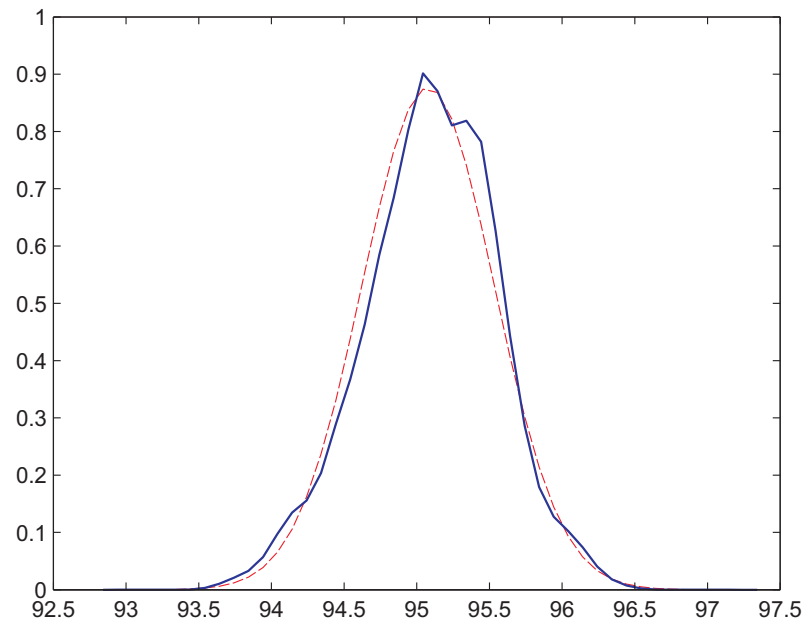
- funkce ve skriptovacím jazyce MATLABu
[SMCm,SMCvar,KFm,KFvar]=**uvsmc**(HMM,T,n)
- výsledky z experimentů

$T = 100$	$\hat{\mu}_T$	μ_T	$ \hat{\mu}_T - \mu_T $	$\hat{\sigma}_T^2 - \text{SMC}$	$\sigma_T^2 - \text{KF}$	$ \hat{\sigma}_T^2 - \sigma_T^2 $
$n=10$	81.57	81.44	0.13	0.3485	0.2071	0.1414
$n=100$	97.84	97.74	0.10	0.1976	0.2071	0.0095
$n=1000$	95.10	95.08	0.02	0.2033	0.2071	0.0038

1D - jádrové odhady



jádrový odhad pro $n=10$



jádrový odhad pro $n=1000$

dD - Gaussovský SMC filtr

- d -dimenzionální Gaussovský proces

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{F}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{W}_t, \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{H}\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t, \quad t \geq 1$$

\mathbf{F} , \mathbf{H} - parametry, $\mathbf{W}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{V}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$,
počáteční rozdělení $\mathbf{X}_0 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$,

- d -dimenzionální Kalmánův filtr

$$\boldsymbol{\mu}_{t|t-1} = \mathbf{F}\boldsymbol{\mu}_{t-1}$$

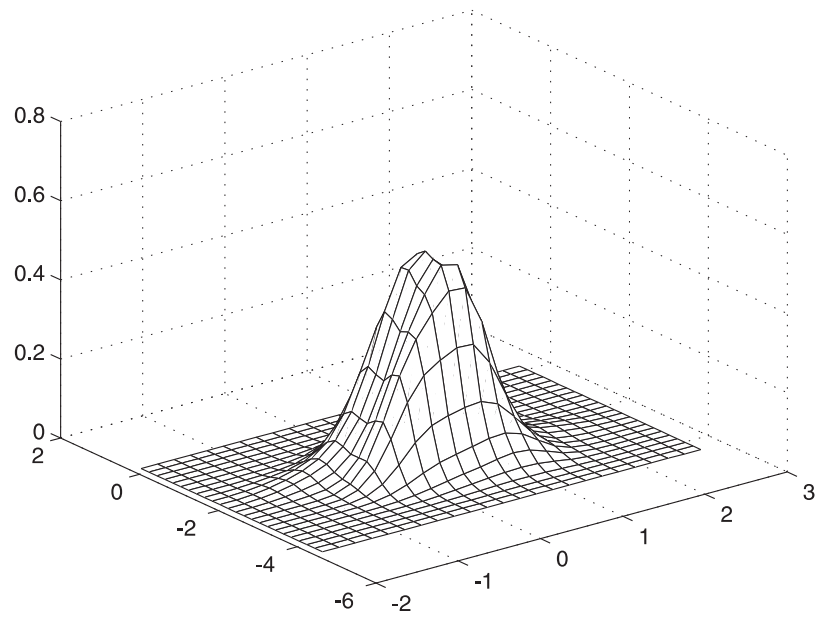
$$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{K}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

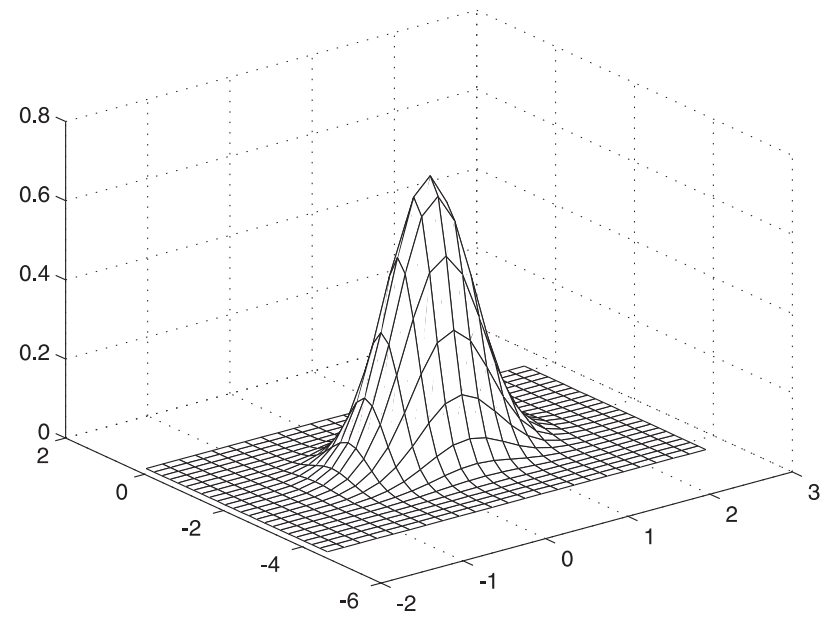
$$\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{Y}_t - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{t|t-1})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = (\mathbf{I}_d - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}$$

2D - jádrové odhady



SMC filter, $T=100$, $n=100$



Kalman filter, $T=100$, $n=100$

Děkuji za pozornost !!!