Poznámka k zápisu náhodných posloupností pomocí polynomů

Petr Lachout

MFF UK

ROBUST - leden 18-24, 2014 - Jetřichovice

e-mail: Petr.Lachout@mff.cuni.cz

Nástin obsahu

Příspěvek se týká zápisu náhodných procesů pomocí polynomů:

- Algebra posloupností $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Sčítání, odčítání, násobení, dělení.
- Dosazování, rozvoje.
- Implicitní a explicitní zápisy náhodných procesů.
- Jednoznačnost zápisu náhodných procesů.

Posloupnosti 0

Nejdříve si připomeňme algebru posloupností $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

Uvažujeme posloupnosti reálných čísel typu

$$a = (a_i, i \in \mathbb{N}_0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}.$$

Také můžeme použít symboliku:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Posloupnosti-operace

Takovéto posloupnosti můžeme sčítat

$$\begin{aligned} c &= a + b, \text{ kde} \\ &\forall\, i \in \mathbb{N}_0 \ \text{ je } \ c_i = a_i + b_i, \end{aligned}$$

odčítat

$$\begin{aligned} c &= a - b, \text{ kde} \\ &\forall\, i \in \mathbb{N}_0 \ \text{ je } \ c_i = a_i - b_i, \end{aligned}$$

násobit

$$\begin{aligned} c &= a * b, \text{ kde} \\ &\forall\, i \in \mathbb{N}_0 \ \text{ je } \ c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}. \end{aligned}$$

Posloupnosti-vlastnosti

Operace jsou asociativní, komutativní a platí distributivní zákon.
Máme významné prvky

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0,0,0,\ldots.), \\ 1 &= (1,0,0,0,\ldots.). \end{aligned}$$

Posloupnosti-krácení

Povšiměme si, že pro $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ je $a * b \neq 0$.

Důkaz.
Posloupnosti $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ nejsou samé nuly, proto můžeme najít jejich první nenulový člen. Označme je a_i, b_j.
Označme si $c := a * b$. Potom $c_{i+j} = a_i b_j$.
To však znamená $a * b \neq 0$. □

Odtud vyplývá, že můžeme krátit, tj. když
$a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, $a \neq 0$, $a * b = a * c$, pak $b = c$.

Důkaz.
Stačí si uvědomit, že máme $a * (b - c) = 0$.
Z předchozího pozorování dostáváme $b - c = 0$. □

Posloupnosti-dělení

Nyní se podívejme na dělení.
Když $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ a $a_0 \neq 0$, pak s a můžeme vydělit libovolné $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, tj. umíme nalézt $c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ tak, aby $a * c = b$.
Podíl je určen jednoznačně.

Vydělit jdou i jiné posloupnosti.
Posloupnost b lze vydělit posloupností a tehdy a jen tehdy, když a má na začátku nejvýše tolik nul jako má b.

Pokud podíl existuje budeme ho značit $b \oslash a$.

Posloupnosti-dělení-výpočet

Posloupnost $c = b \oslash a$ určíme tak, že nejdříve u čitatele i jmenovatele „vykrátíme, smažeme" zleva tolik nul, co má jmenovatel. Vznikne tak situace, že nový jmenovatel má $a_0 \neq 0$,
Pak postupně odčítáme vhodné násobky a tak, abychom nulovali posloupnost b zleva.

Krok 0 Položíme $k = 0$, $b^0 := b$, $c_0 := \frac{b_0}{a_0}$, a jdeme na krok 1.

Krok 1 Pro $k \in \mathbb{N}_0$ je určeno $c_0, c_1, \ldots, c_k$ a $b^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.
Určíme b^{k+1} tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ položíme
$b_i^{k+1} := b_{i+1}^k - c_k a_{i+1}$.
Jdeme na krok 2.

Krok 2 Položíme $c_{k+1} := \frac{b_0^{k+1}}{a_0}$.
Zvýšíme $k := k + 1$ a jdeme na krok 1.

Posloupnosti-inverze

S inverzí je to takto.
Posloupnost $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ má inverzi $a^{-1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ tehdy a jen tehdy, když $a_0 \neq 0$.
Inverze je určena jednoznačně a je to $a^{-1} = 1 \oslash a$.

Symbol sumy

Již jsme seznámeni se základními vlastnostmi algebry posloupností $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, +, *, 0, 1\right)$.

Nyní zavedeme jiné symbolické označení posloupnosti

$$a = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \lessdot i \gtrdot,$$

které evokuje „dosazování“, které představíme za chvíli.
Značka $\lessdot i \gtrdot$ označuje pouze pozici na níž je a_i.

Příklad 1

Uveďme si příklady.
Pro $q \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} a &= 1 \lessdot 0 \gtrdot + q \lessdot 1 \gtrdot, \\ a^{-1} &= 1 \lessdot 0 \gtrdot - q \lessdot 1 \gtrdot + q^2 \lessdot 2 \gtrdot - q^3 \lessdot 3 \gtrdot + \ldots\ldots \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i q^i \lessdot i \gtrdot . \end{aligned}$$

Příklad 2

Pro $q, r \in \mathbb{R}$, $q \neq r$ platí

$$\begin{aligned}
a &= 1 \lessdot 0 \gtrdot + q \lessdot 1 \gtrdot, \\
b &= 1 \lessdot 0 \gtrdot + r \lessdot 1 \gtrdot, \\
c &= a * b, \\
c^{-1} &= \frac{q}{q-r} a^{-1} - \frac{r}{q-r} b^{-1}, \\
c^{-1} &= \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \left(\frac{q^{i+1}}{q-r} - \frac{r^{i+1}}{q-r} \right) \lessdot i \gtrdot .
\end{aligned}$$

Dosazování v R

Nyní za značku $\lessdot i \gtrdot$ začneme dosazovat „mocniny“.
Začneme s reálnými čísly.
Vezměme $x \in \mathbb{R}$ a dosaďme $\lessdot i \gtrdot := \prec x, i \succ$.

Dosazením dostaneme symbolickou sumu

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec x, i \succ .$$

Dosazování v R s topologií

Pokud zapojíme přirozenou topologii na $\mathbb{R}$, můžeme součet $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec x, i \succ$ reprezentovat jako $S \in \mathbb{R}$, jestliže

$$S = \lim_{K \to +\infty} \sum_{i=0}^{K} a_i x^i .$$

Jinými slovy $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec x, i \succ$ reprezentujeme jako $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ pokud tento nekonečný součet existuje konečný.

Mocninné řady

Nyní dosadíme funkce $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : u \mapsto u^i$.
Dosazujeme tedy $\lessdot i \gtrdot := \prec f_i, i \succ$.

Dosazením dostaneme symbolickou sumu

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec f_i, i \succ,$$

kterou můžeme interpretovat jako mocninou řadu $A(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i u^i$ definovanou pro taková $u \in \mathbb{C}$, pro která je tento nekonečný součet konečný (případně je řada absolutně sčitatelná).

SHIFT 0

Nyní budeme uvažovat (oboustraně) nekonečné posloupnosti $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ a operátor zpětného posunutí $\mathrm{L} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, který je definován tak, že pro $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ a pro každý index $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$ je $(\mathrm{L}x)_{\mathrm{t}} = x_{\mathrm{t}-1}$.
Dosadíme $\lessdot i \gtrdot := \prec \mathrm{L}, i \succ$ a získáme tak symbolickou sumu

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec \mathrm{L}, i \succ .$$

SHIFT 1

Sumu můžeme interpretovat jako operátor $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \mathrm{L}^i$ definovaný pro taková $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, pro která pro každý index $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$ je součet

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(\mathrm{L}^i x\right)_{\mathrm{t}} \quad \text{konečný,}$$

neboli

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x_{\mathrm{t}-i} \quad \text{je sčitatelná.}$$

Náhodný proces 0

Nyní budeme uvažovat (oboustraně) nekonečné posloupnosti reálných náhodných veličin z $\mathcal{L}_{2,0}$; tímto symbolem budeme označovat náhodné veličiny z $\mathcal{L}_2$ s nulovou střední hodnotou. Všechny veličiny jsou definovány na stejném prevděpodobnostním prostoru.
Uvažujeme operátor zpětného posunutí $\mathrm{L} : \mathcal{L}_{2,0}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{L}_{2,0}^{\mathbb{Z}}$, který je definován tak, že pro $X \in \mathcal{L}_{2,0}^{\mathbb{Z}}$ a pro každý index $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$ je $(\mathrm{L}X)_{\mathrm{t}} = X_{\mathrm{t}-1}$.
Dosadíme $\lessdot i \gtrdot := \prec \mathrm{L}, i \succ$ a získáme tak symbolickou sumu

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \prec \mathrm{L}, i \succ .$$

Náhodný proces 1

Sumu můžeme interpretovat jako operátor $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \mathrm{L}^i$ definovaný pro taková $X \in \mathcal{L}_{2,0}^{\mathbb{Z}}$ pro která pro každý index $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$ je součet

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(\mathrm{L}^i X\right)_{\mathrm{t}} \quad \text{konečná v } \mathcal{L}_2,$$

neboli

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X_{\mathrm{t}-i} \quad \text{je sčitatelná v } \mathcal{L}_2.$$

ARMA process

Let us recall the definition of ARMA process.

A random process $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ is called $\mathrm{ARMA}(p, q)$ if:

1. It is stationary.
2. It is causal.
3. It fulfills an equation

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad \Phi(L)\, Y_t = \Theta(L)\, Z_t, \tag{1}$$

ARMA process - comment 1

Where

$$\Phi(z) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots + \phi_p z^p,$$
$$\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q$$

are polynomials, $p, q \in \mathbb{N}_0$, L is the backward shift operator acting from $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ to $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, and, Z is a White Noise with zero mean and positive variance σ_Z^2.

ARMA process - comment 2

To guarantee uniqueness of polynomials, it is assumed that the polynomials Φ, Θ are possessing no common root.
Let us recall that autoregression, moving averages and uncorrelated sequences (i.i.d. is a particular uncorrelated sequence) belong among ARMA processes. Particularly,

$$\mathrm{AR}(p) = \mathrm{ARMA}(p, 0),$$

$$\mathrm{MA}(q) = \mathrm{ARMA}(0, q),$$

$\mathrm{ARMA}(0, 0)$ means white noise (i.e. uncorrelated sequence).

ARMA process - expansion

Because, the ARMA process is stationary and causal, all roots of Φ must be outside of the unit circle; i.e. their norm is larger then 1. Moreover, the process can be written as an infinite sum

$$Y_t = \frac{\Theta}{\Phi}(L)Z_t = \Gamma\left(L\right)Z_t = \sum_{\tau=0}^{+\infty} \gamma_\tau Z_{t-\tau}, \tag{2}$$

where

$$\Gamma\left(z\right) = \frac{\Theta}{\Phi}(z) = \sum_{\tau=0}^{+\infty} \gamma_\tau z^\tau,\ \gamma_0 = 1$$

and $\frac{\Theta}{\Phi}$ denotes division of the polynomial Θ by the polynomial Φ.

ARMA process - division

The equality (1) can be rewritten in many equivalent forms. It is because, the formula can be divided by any polynomial with roots outside of the unit circle without any loss of information. Let us consider a polynomial

$$\mathrm{Q}(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_\kappa z^\kappa$$

with roots outside of the unit circle.
For simplicity we also require $q_0 = 1$.

ARMA process - division 1

Dividing the equality (1) by Q we are receiving its equivalent form

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad \widetilde{\Phi}\left(\mathrm{L}|\mathrm{Q},+\infty\right)\mathrm{Y}_t = \widetilde{\Theta}\left(\mathrm{L}|\mathrm{Q},+\infty\right)\mathrm{Z}_t, \tag{3}$$

where

$$\widetilde{\Phi}\left(z|\mathrm{Q},+\infty\right) = \frac{\Phi}{\mathrm{Q}}(z) = \sum_{\tau=0}^{+\infty} \widetilde{\phi}_\tau z^\tau, \ \widetilde{\phi}_0 = 1,$$

$$\widetilde{\Theta}\left(z|\mathrm{Q},+\infty\right) = \frac{\Theta}{\mathrm{Q}}(z) = \sum_{\tau=0}^{+\infty} \widetilde{\theta}_\tau z^\tau, \ \widetilde{\theta}_0 = 1.$$

ARMA process - division 2

Seeking for a process ARMA($\widetilde{\mathrm{p}}, \widetilde{\mathrm{q}}$), we actually allow an inaccuracy in the equation

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad \widetilde{\Phi}\left(\mathrm{L}|\mathrm{Q}, \widetilde{\mathrm{p}}\right) \mathrm{Y}_t = \widetilde{\Theta}\left(\mathrm{L}|\mathrm{Q}, \widetilde{\mathrm{q}}\right) \mathrm{Z}_t + \varepsilon_t, \tag{4}$$

where

$$\widetilde{\Phi}\left(z|\mathrm{Q}, \widetilde{\mathrm{p}}\right) = \sum_{\tau=0}^{\widetilde{\mathrm{p}}} \widetilde{\phi}_\tau z^\tau, \; \widetilde{\Theta}\left(z|\mathrm{Q}, \widetilde{\mathrm{q}}\right) = \sum_{\tau=0}^{\widetilde{\mathrm{q}}} \widetilde{\theta}_\tau z^\tau,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{\tau=\widetilde{\mathrm{q}}+1}^{+\infty} \widetilde{\theta}_\tau \mathrm{Z}_{t-\tau} - \sum_{\tau=\widetilde{\mathrm{p}}+1}^{+\infty} \widetilde{\phi}_\tau \mathrm{Y}_{t-\tau}.$$

Competitive Models

Taking $\widetilde{\mathrm{p}}, \widetilde{\mathrm{q}} \in \mathbb{N}_0$ large enough, the variance of the inaccuracy ε_t becomes to be smaller than a prescribed level.
Hence, we are in trouble to distinguish between models $\mathrm{ARMA}(\mathrm{p},\mathrm{q})$ and $\mathrm{ARMA}(\widetilde{\mathrm{p}},\widetilde{\mathrm{q}})$.
We must employ simultaneously two criteria: "fit" and "model complexity", or better a convenient combination of these two criteria.
Several such combinations are used in practice, e.g. criterion AIC or criterion BIC. The approach is suggested in monographs; e.g. [1], [2], [3], [4], [5].

Competitive Models 1

Standard suggestion is to consider a set of competitive models

$$\mathrm{ARMA}(\widetilde{p}, \widetilde{q}), 0 \leq \widetilde{p} \leq \widehat{p}, 0 \leq \widetilde{q} \leq \widehat{q},$$

or,

$$\mathrm{ARMA}(\widetilde{p}, \widetilde{q}), 0 \leq \widetilde{p}, 0 \leq \widetilde{q}, \widetilde{p} + \widetilde{q} \leq \Delta,$$

where $\widehat{p}, \widehat{q} \in \mathbb{N}$ (resp. $\Delta \in \mathbb{N}$) are properly chosen.

Competitive Models 2

We intend to employ larger family of competitive models. We suggest to incorporate also models where some coefficients are vanishing. For such a model, number of coefficients decrease and the criterion can decrease, also. Our suggestion is to consider a set of competitive models

$$\mathrm{ARMA}(\widehat{\mathrm{p}}, \widehat{\mathrm{q}}), \phi_i = 0, i \in I, \theta_j = 0, j \in J$$

for each selection $I \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{p}}\}$, $J \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{q}}\}$.

ARIMA

Similar idea can be implemented for estimation of ARIMA model. Since, a random process $(\mathrm{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$ is $\mathrm{ARIMA}(\mathrm{p}, \mathrm{d}, \mathrm{q})$ if and only if random process $(\Delta^{\mathrm{d}}\mathrm{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$ fulfills $\mathrm{ARMA}(\mathrm{p}, \mathrm{q})$. Recall that Δ^{d} denotes the d-difference, i.e. $\Delta^0\mathrm{Y}_t = \mathrm{Y}_t$, $\Delta^{\mathrm{d}+1}\mathrm{Y}_t = \Delta^{\mathrm{d}}\mathrm{Y}_{t+1} - \Delta^{\mathrm{d}}\mathrm{Y}_t$.

Competitive Models for ARIMA

Hence for ARIMA process, we suggest to consider a set of competitive models

$$\mathrm{ARIMA}(\widehat{\mathrm{p}}, \mathrm{d}, \widehat{\mathrm{q}}), \phi_i = 0, i \in I, \theta_j = 0, j \in J$$

for each selection $I \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{p}}\}$, $J \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{q}}\}$.
Moreover, if we hesitate between ARMA and ARIMA we can join both cases and, for example, consider competitive models

$$\mathrm{ARIMA}(\widehat{\mathrm{p}}, \mathrm{d}, \widehat{\mathrm{q}}), \phi_i = 0, i \in I, \theta_j = 0, j \in J$$

for each selection $I \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{p}}\}$, $J \subset \{1, 2, \ldots, \widehat{\mathrm{q}}\}$, $\mathrm{d} \in \{0, 1\}$.

Example

Let us consider daily closing prices of major European stock indices, 1991-1998. Particularly, we concentrate to the stock index CAC (France). The data are freely available, e.g. in the software package R under the name "EuStockMarkets".
In the sequel, we will analyze CAC index in years 1991-1998. Numerical computations are done using the software package R.
Extracting a trend and a seasonal part we receive a time series possessing stationary features. This time series we try to fit with an ARMA model. We consider a set of competitive models

$$\text{ARMA}(3,3), \phi_i = 0, i \in I, \theta_j = 0, j \in J$$

for each selection $I \subset \{1,2,3\}$, $J \subset \{1,2,3\}$.
Thus, we receive $2^6 = 64$ competitive models.

Example 2

Now, we use AIC criterion to order them. Ordered values of the AIC criterion look like:

13376.15	13377.40	13380.20	13380.70	13380.87	13381.39	13381.44	13381.61
13381.63	13381.73	13381.95	13382.27	13382.41	13382.65	13382.66	13382.69
13382.72	13382.72	13382.80	13382.84	13382.84	13382.85	13383.02	13383.21
13383.23	13383.26	13383.31	13383.31	13383.33	13383.34	13383.38	13383.49
13383.62	13384.23	13384.23	13384.27	13384.61	13384.79	13384.99	13385.11
13385.18	13385.24	14251.00	14386.76	14437.97	14439.51	14439.85	14440.96
14507.44	14683.33	14806.87	14984.58	15024.94	15026.94	15925.37	15964.66
16024.95	16153.41	16300.86	17532.96	NA	NA	NA	NA

Example

The best model according to AIC criterion differs to the second one at 1.25. Then the difference between the second and the third one is 2.80. Hence AIC criterion is slowly increasing to the 42^{th} model. Then AIC criterion jumps to the 43^{th} model for 865.76. After that AIC criterion is visibly increasing and the last four models are inconvenient because they are giving estimate forming a polynomial with a root in the unit circle.

Example 3

Let us introduce the first twenty models:

	AIC		choice phi		choice theta
1 ...	13376.147	...	• • •	...	• • 0
2 ...	13377.403	...	• • •	...	• • •
3 ...	13380.199	...	0 • •	...	• • 0
4 ...	13380.695	...	• 0 0	...	• 0 •
5 ...	13380.868	...	• • 0	...	0 0 •
6 ...	13381.392	...	• • 0	...	0 0 0
7 ...	13381.442	...	• 0 0	...	• 0 0
8 ...	13381.609	...	• • 0	...	• 0 •
9 ...	13381.631	...	• 0 0	...	0 0 •
10 ...	13381.727	...	0 • •	...	• • •
11 ...	13381.950	...	• 0 •	...	0 0 •
12 ...	13382.266	...	• 0 0	...	0 0 0
13 ...	13382.413	...	• 0 •	...	0 0 0
14 ...	13382.653	...	• 0 0	...	• • •
15 ...	13382.662	...	• 0 •	...	• 0 •
16 ...	13382.689	...	0 • •	...	• 0 0
17 ...	13382.716	...	• • 0	...	• • •
18 ...	13382.724	...	• 0 •	...	0 • •
19 ...	13382.803	...	• • •	...	• 0 •
20 ...	13382.839	...	• • 0	...	• • 0

Symbol '•' means no restriction on the coefficient and '0' means that the coefficient is fixed as zero.

Example 4

The models leads to estimation of their coefficients. These estimates are:

		$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{\phi}_2$	$\widehat{\phi}_3$		$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\theta}_2$	$\widehat{\theta}_3$
1	...	0.53562	-0.54279	-0.88112	...	1.53368	0.95138	0.00000
2	...	0.54808	-0.54175	-0.88902	...	1.56477	0.99573	0.02450
3	...	-0.00000	-0.57452	-0.34447	...	1.02026	0.42784	0.00000
4	...	-0.96819	-0.00000	-0.00000	...	0.045494	0.000000	-0.044267
5	...	-1.012549	0.042983	-0.000000	...	0.000000	0.000000	-0.042714
6	...	-1.010695	0.043764	-0.000000	...	0	0	0
7	...	-0.96555	-0.00000	-0.00000	...	0.044348	0.000000	0.000000
8	...	-0.52697	-0.42874	-0.00000	...	0.477771	0.000000	-0.058177
9	...	-0.97089	-0.00000	-0.00000	...	0.000000	0.000000	-0.043754
10	...	-0.00000	-0.56611	-0.35537	...	1.013480	0.418849	-0.018818
11	...	-0.992952	-0.000000	0.023576	...	0.00000	0.00000	-0.04228
12	...	-0.96833	-0.00000	-0.00000	...	0	0	0
13	...	-0.991445	-0.000000	0.024749	...	0	0	0
14	...	-0.96778	-0.00000	-0.00000	...	0.0461018	0.0053509	-0.0434824
15	...	-0.9726982	-0.0000000	0.0045586	...	0.041231	0.000000	-0.043731
16	...	-0.000000	-0.963770	0.030197	...	1.0005	0.0000	0.0000
17	...	-0.44877	-0.50116	-0.00000	...	0.564738	0.030783	-0.044593
18	...	-1.01341	-0.00000	0.04262	...	0.000000	-0.039433	-0.045252
19	...	-0.492517	-0.486769	0.026708	...	0.520576	0.000000	-0.047138
20	...	-0.26757	-0.67149	-0.00000	...	0.74677	0.06496	0.00000

The coefficients estimates are similar for the first and the second model. The consequent models are giving estimates which are very different.

Conclusion

We possess several different models which are describing the same process up to a given uncertainty.

Presented numerical example is showing this phenomenon on a real data set. Let us list some models together with their order:

- ARMA$(3, 2)$ is the best model for the data set,
- ARMA$(3, 3)$ is the second best,
- ARMA$(3, 2)$ with $\phi_1 = 0$ is the third best,
- ARMA$(1, 3)$ with $\theta_2 = 0$ is the 4^{th},
- ARMA$(2, 3)$ with $\theta_1 = \theta_2 = 0$ is the 5^{th},
- AR(2) is the 6^{th},
- ARMA$(1, 1)$ is the 7^{th},
- ARMA$(3, 3)$ with $\phi_1 = 0$ is the 10^{th},
- AR(1) is the 12^{th},
- ARMA$(1, 3)$ is the 14^{th}.

Considering estimated acf (autocorrelation function) and pacf (partial autocorrelation function), We can see that the estimate pacf possesses only two significant values for lag 1 and 2. Therefore, the rough rule suggested in monographs leads to the AR(2).

Bibliography

Box, G.E.P.; Jenkins, G.M.: *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, 1976.

Brockwell, P.J.; Davis, R.A.: *Time Series: Theory and Methods* Springer-Verlag, New York, 1987.

Cipra, T.: *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. SNTL/ALFA, Praha, 1986.

Durbin, J.; Koopman, S.J.: *Time Series Analysis by State Space Models*. Oxford University Press, Oxford, 2001.

Wei, W.W.S.: *Time Series Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, 1994.