Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu

Ing. Eliška Cézová

eliskacqr@email.cz

ROBUST 2012

Němčičky 9.9. - 14.9. 2012

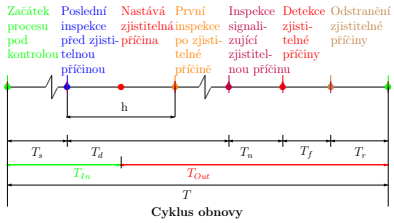
Abstrakt

Statistická regulace je jednou z metod, jak provádět kontrolu procesu v reálném čase a reagovat na případné změny a poruchy. Tyto změny v procesu se snažíme korigovat a předcházet jim včasnou údržbou. Vhodně zvolená údržbová strategie může uspořit značné prostředky, které by musely být vynaloženy na neplánované opravy a seřízení výrobního procesu a s tím spojené ztráty z nekvalitní výroby v době, kdy se proces díky neočekávaným poruchám dostane do stavu mimo statistickou kontrolu. Na druhé straně je třeba počítat s náklady na údržbu už ve fázi návrhu statistické regulace procesu. Příspěvek se zabývá modely pro ekonomickou optimalizaci regulačního diagramu zahrnujícími různé typy údržby. Tyto modely jsou rozšířením dnes už klasického modelu, který představili v roce 1986 T. J. Lorenzen a L. C. Vance.

Úvod

Před zahájením statistického řízení předpokládáme, že proces je ve stavu pod (statistickou) kontrolou. Tento stav trvá po dobu, kterou označíme T_{in}. Postupem času dojde v procesu ke vzniku vymezitelné příčiny (k poruše), která způsobí odchylku sledovaných charakteristik od požadované úrovně, čímž se proces dostane do stavu mimo statistickou kontrolu. Délku trvání toho stavu označíme T_{Out}. Sečteme-li tyto dvě doby, dostaneme celkovou délku cyklu $T = T_{in} + T_{Out}$. Pro účely optimalizace budeme uvažovat jemnější rozdělení cyklu T. Předpokládejme, že vymezitelná příčina a s ní související posun v chování procesu nastala mezi *s*-tou a *(s+1)*-ní inspekcí. Dobu od počátku běhu procesu do *s*-té inspekce označíme T_s.

V tomto období odebíráme vzorky a výrobní proces je ve stavu pod statistickou kontrolou. Dobu od *s*-té inspekce do *n*-té inspekce, při níž je posun detekován, označíme jako T_d. Dobu potřebnou pro odebrání *n* vzorků a zakreslení výsledku měření do regulačního diagramu při jedné inspekci označme T_n. Symbolem T_f označíme čas potřebný k nalezení příčiny, která způsobila posun ve výrobním procesu. Pátý časový úsek T_r představuje dobu potřebnou k opravě výrobního procesu a jeho navrácení do stavu pod kontrolou. Tato doba se do celkové délky cyklu započítává pouze tehdy, pokud výrobní proces vyrábí v průběhu opravy. Pokud proces po dobu opravy stojí, čas $T_r = 0$ a do celkové délky cyklu se nezapočítává. Na obr.1. je zobrazena celková délka cyklu výrobního procesu. V dalším textu budeme předpokládat, že časový interval *h* mezi inspekcemi se po dobu řízení nemění. Dále předpokládejme, že známe rozdělení doby do vzniku vymezitelné příčiny (doby do poruchy).



Obr.č.1: Celková délka cyklu procesu

Základní model

První ekonomický model, který vycházel z Shewhartova regulačního diagramu X, vytvořil v roce 1956 A. J. Duncan. V daném modelu uvažoval náklady na výběr vzorku a jeho kontrolu, náklady na vadné produkty, náklady na falešný poplach, náklady na vyhledání poruchy a náklady na opravu procesu.

Na začátku kvalitace procesu, který je ve stavu pod statistickou kontrolou se střední hodnotou sledované veličiny *W* na požadované úrovni μ_0. Inspekce provádíme po *h* hodinách. Po určitém čase nastane zjistitelná příčina, která způsobí posunutí střední hodnoty. Posun ve střední hodnotě je $\delta\,\sigma_W$, zatímco $\mu_0 \pm \delta\,\sigma_W$ je hodnota procesu po té, co nastala zjistitelná příčina. V uvažovaném modelu je sledovanou veličinou aritmetický průměr *n* měření provedených při jedné inspekci a tedy CL je rovna μ_0, UCL, resp. LCL, je rovno $\mu_0 + \sigma/\sqrt{n}$ resp. $\mu_0 - \sigma/\sqrt{n}$.

Při hledání zjistitelné příčiny výrobní proces nezastavujeme, snažíme se pouze upravovat parametry daného procesu. Předpokládáme, že známe parametry μ_0, δ a σ, zatímco *n, h* a *k* jsou neznámými parametry, které optimalizujeme.

Úkolem optimalizace je minimalizovat ztrátovou funkci vzhledem k proměnným *n,h* a *k*. Proto pro minimalizaci použijeme ztrátovou funkci ve tvaru:

$$L = \frac{\lambda MB + \frac{\alpha C_f}{h} + \lambda C_r}{1+\lambda B} + \frac{C_s}{h},$$

$$\lambda h \frac{\partial B}{\partial n}\left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r\right) + C_V(1+\lambda B)^2 = 0,$$

$$\lambda h^2 \frac{\partial B}{\partial h}\left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r\right) - \alpha C_f(1+\lambda B) - C_s(1+\lambda B)^2 = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial B}{\partial k}\left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r\right) + \frac{C_f}{h}\frac{\partial \alpha}{\partial k}(1+\lambda B) = 0,$$

kde

$$\frac{\partial B}{\partial n} = -\frac{h}{P^2}\frac{\partial P}{\partial n} + g,$$

$$\frac{\partial B}{\partial h} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{6}\right),$$

$$\frac{\partial B}{\partial k} = -\frac{h}{P^2}\frac{\partial P}{\partial k}.$$

Příklad

Předpokládejme, že máme zadány vstupní parametry procesu, z kterých chceme vypočítat optimální náklady za hodinu daného výrobního procesu pomocí regulačního diagramu *X*.

Předpokládáme posunutí ve střední hodnotě δ = *2*, pravděpodobnost vzniku poruchy λ = *0.01*, náklady za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou snížené o náklady ve stavu mimo kontrolu *M = 100 Kč*.

Předpokládejme dobu mezi inspekcemi *g = 0.05 hod* a dobu k nalezení zjistitelné příčiny T_A *= 2 hod*.

Dále známe náklady na falešný poplach C_I *= 50 Kč*, náklady na hledání zjistitelné příčiny C_r *= 25 Kč*, náklady na odebírání vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu C_F *= 0.50 Kč* a náklady na měření odebraného vzorku C_V = *0.10 Kč*.

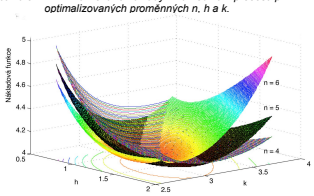
a) Pokud vycházíme z rovnic navržené Duncanem tak, že postupně volíme rozsah výběru *n* od 1 do 25 a dopočítáváme hodnoty *k, h* a *L* dostaneme tabulku z níž vybereme řádek s nejnižší hodnotou *L*, viz. tabulka 1.

b) Použitím Nelder-Meadovy simplexové metody dostaneme řešení, které je nejblíže minimu ztrátové funkce *L*. Toto řešení ovšem nerespektuje celočíselnost proměnné *n* a je tedy pro nás spíše orientační. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je *L = 4.012* pro hodnoty *n = 4.8, h = 1.386, k = 3.057*.

c) Pro srovnání uvádím výsledek prohledávání dvojrozměrné oblasti pro *h* a *k* s krokem 0.001 při různých volbách *n = 1, ..., 25*. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je *L = 4.013* pro hodnoty *n = 5, h = 1.407, k = 3.082*. V tomto případě jsou výsledky nejblíže výsledkům uvedeným v [2].

n	k	α	P	h	B	L
1	3.4609	0.00053843	0.0720	0.2164	4.9467	7.8426
2	3.3592	0.00078157	0.2978	0.5085	3.5536	5.1239
3	3.2983	0.00097260	0.5658	0.8183	3.1876	4.3666
4	3.2544	0.0011	0.7720	1.0969	3.0733	4.0950
5	**3.2200**	**0.0013**	**0.8947**	**1.3126**	**3.0621**	**4.0230**
6	3.1915	0.0014	0.9561	1.4645	3.1012	4.0484
7	3.1673	0.0015	0.9832	1.5714	3.1647	4.1210
8	3.1461	0.0017	0.9940	1.6530	3.2388	4.2143
9	3.1274	0.0018	0.9980	1.7217	3.3168	4.3151
10	3.1105	0.0019	0.9993	1.7840	3.3958	4.4175

Tabulka č.1: Minimalizované náklady L za hodinu v procesu při optimalizovaných proměnných n, h a k.



Obr.č.2: Průběh ztrátové funkce v Duncanově modelu pro různé hodnoty n = 4, 5, 6.

Rozšířený model

V roce 1986 T. J. Lorenzen a L. C. Vance uvedli svůj ekonomický model, který v sobě zahrnuje náklady během opravy procesu, náklady na vyhledání falešného poplachu, náklady na hledání zjistitelné příčiny, náklady na opravu procesu, náklady na odběr vzorků a náklady na inspekce. Ztrátová funkce v tomto případě má tvar:

$$E(L) = \frac{E(C_Q) + E(C_D) + E(C_S)}{E(T_{in}) + E(T_{out})},$$

Náklady plynoucí z nekvalitní výroby za cyklus označíme C_Q. Náklady na detekci a opravu zjistitelné příčiny, které zahrnují i náklady na vyšetření falešného signálu označíme C_D. Náklady na odběr vzorků za cyklus označíme C_S. Průměrnou dobu pod kontrolou označíme T_{in} a dobu mimo kontrolu T_{out}.

$$E(C_Q) = \frac{C_I}{\lambda} + C_O\left(-\tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2\right),$$

$$E(C_D) = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_r,$$

$$E(C_S) = \frac{C_s\left(\frac{1}{\lambda} - \tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2\right)}{h},$$

$$E(T_{in}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1-\gamma_1)sT_0}{ARL_0},$$

$$E(T_{out}) = -\tau + ng + h(ARL_\delta) + T_1 + T_2.$$

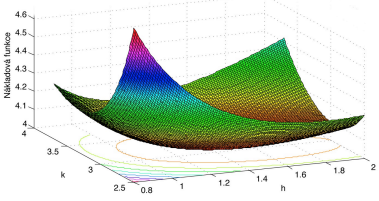
Příklad

Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem X s těmito parametry: zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě δ = *2*, pravděpodobnost doby do vzniku poruchy má exponenciální rozdělení s parametrem λ = *0.01*, náklady za hodinu v procesu pod kontrolou jsou C_I = *0 Kč*, náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí C_Q = *100 Kč*. Dále známe náklady na vyšetření falešného poplachu C_I = 50 Kč, náklady na vyhledání zjistitelné příčiny a její odstranění C_r = *25 Kč*. Variabilní náklady za vzorek jsou C_V = *0.10 Kč*, fixní náklady za vzorek jsou C_F = *0.50 Kč*. Předpokládejme dobu mezi odebíráním vzorku *g = 0.05 hod* a dobu k nalezení zjistitelné příčiny T_2 = *2 hod*.

Dobu na hledání falešného poplachu a dobu na odhalení zjistitelné příčiny neuvažujeme.

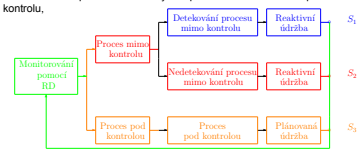
a) Použitím Nelder-Meadovy simplexové metody dostaneme řešení, které je nejblíže minimu ztrátové funkce *L*. Toto řešení ovšem nerespektuje celočíselnost proměnné *n* a je tedy pro nás spíše orientační. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je *L = 4.0116* pro hodnoty *n = 4.802, h = 1.387, k = 3.0547*. V tomto případě vychází nejminimálnější náklady.

b) Pro srovnání uvádím výsledek prohledávání dvojrozměrné oblasti pro *h* a *k* s krokem 0.001 při různých volbách *n = 1,..., 25*. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je *L = 4.0128* pro hodnoty *n = 5, h = 1.408, k = 3.08*.



Model s údržbou

Jak je vidět z obr. 4., systém řízení procesu a údržby vychází ze tří scénářů. Průběh procesu zaznamenáváme do regulačních diagramů, z kterých zjišťujeme, zda je proces pod statistickou kontrolou nebo není. Pokud je ve stavu pod kontrolou, provedeme v plánovaném čase údržbu procesu, která předchází poruše v procesu a reaktivní údržbě. Reaktivní údržbu provádíme tehdy, kdy regulační diagram detekuje proces mimo kontrolu. Po provedení reaktivní nebo plánované údržby se proces vrací do stavu pod statistickou kontrolu,



Obr.č.4: Model s údržbou pro tři scénáře.

Ztrátovou funkci pro jednotlivé scénáře vyjádříme ve tvaru:

$$E(L) = \frac{E(C)}{E(T)},$$

kde

$$E(T) = E[T|S_1]P(S_1) + E[T|S_2]P(S_2) + E[T|S_3]P(S_3),$$
$$E(C) = E[C|S_1]P(S_1) + E[C|S_2]P(S_2) + E[C|S_3]P(S_3).$$

Pravděpodobnosti jednotlivých scénářů jsou:

$$P[S_1] = F(mh)P(\text{signál}\,|\,\text{stav mimo kontrolu})$$
$$P[S_2] = F((m+1)h) - F(mh)P(\text{signál}\,|\,\text{stav mimo kontrolu})$$
$$P[S_3] = 1 - F((m+1)h)$$

$$E[T|S_1] = \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1)dt + (1-\gamma_A)\frac{sT_0}{ARL_0} + hARL_\delta - \tau + gn + T_A + T_R,$$

$$E[C|S_1] = C_I \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1)dt + C_O\left[hARL_\delta - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R\right] + C_s\frac{\int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1)dt + h(ARL_\delta) - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R}{h} + \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R,$$

$$E[T|S_2] = \int_0^{(m+1)h} t f^{Tr}(t; m+1)dt + (1-\gamma_A)\frac{sT_0}{ARL_0} + (m+1)h - \int_0^{(m+1)h} t f^{Tr}(t; m+1)dt + T_R,$$

$$E[C|S_2] = C_I \int_0^{(m+1)h} t f^{Tr}(t; m+1)dt + C_O\left[(m+1)h - \int_0^{(m+1)h} t f(t)dt + \gamma_R T_R\right] + mC_s + \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R,$$

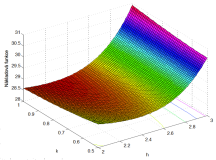
$$E[T|S_3] = (m+1)h + (1-\gamma_A)\frac{mT_0}{ARL_0} + T_P,$$

$$E[C|S_3] = C_I[(m+1)h + \gamma_P T_P] + mC_s + \frac{mC_f}{ARL_0} + C_P.$$

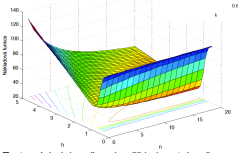
Příklad

Uvažujme proces řízený Shewhartovým diagramem X s těmito parametry: zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě δ = 2, pravděpodobnost doby vzniku do poruchy má weibullovo rozdělení s parametrem měřítka λ = 0.05 a tvaru v = 1. Z dlouhodobého sledování procesu můžeme určit průměrné náklady za hodinu v procesu pod kontrolou, které jsou C_I = 0 Kč, náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí C_Q = 100 Kč. Dále známe náklady na vyšetření falešného poplachu C_I = 5 Kč, náklady na provedení reaktivní údržby C_R = 50 Kč, náklady na provedení plánované údržby C_P = 75 Kč. Variabilní náklady na odebírání vzorků jsou C_V = 1 Kč, fixní náklady za vzorek jsou C_F = 5 Kč. Dále předpokládáme počet vzorků před plánovanou údržbou m = 300. Předpokládaná doba na odběr a jejich zakreslení do diagramu g = 0.05 hod. Z jednotlivých předcházejících měření známe dobu strávenou hledáním falešného signálu T_0 = 1 hod, dobu k určení výskytu zjistitelné příčiny T_A = 1 hod, dobu k provedení reaktivní údržby T_R = 3 a dobu k provedení plánované údržby T_P = 8. Pokračuje-li proces během hledání příčiny, reaktivní údržby a plánované údržby stanovíme parametr $\gamma_A = \gamma_R = \gamma_P = 1$.

Průběh ztrátové funkce pro n = 5 je na obrázku 5. Minimální hodnoty L = 28.4632 je dosaženo při h = 2.7 a k = 0.7



Obr.č.5: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře se stanovenou hodnotou n = 5.



Obr.č.6: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře se stanovenou hodnotou k = 3.024.

Tento výsledek ovšem je příkladem toho, že samotná ekonomická optimalizace nevede vždy k nejlepším výsledkům. V daném případě by nízká hodnota k vedla k nepřijatelně nízké hodnotě ARL_0 = *3.621*, tedy k velmi četným falešným poplachům. V tomto případě je potřeba provést ekonomicko-statistickou optimalizaci. Nejprve určíme optimální hodnotu k_0 pro požadovanou minimální hodnotu ARL_0. Potom provedeme ekonomickou optimalizaci pro tuto optimální hodnotu *k*. V našem příkladu jsme dostali k_0 = *3.024* pro požadovanou hodnotu ARL_0 = *400*. Následná ekonomická optimalizace dala tyto výsledky: *L = 31.3277, n = 11, h = 2.4*, výsledná hodnota ARL_0 = *400.8716*.

Použité symboly:

k – regulační meze v násobcích směrodatné odchylky [-]
n – rozsah výběru při jedné inspekci [-]
h – inspekční interval (doba mezi jednotlivými inspekcemi) [hod]
m – počet vzorků před plánovanou údržbou
τ – předpokládaná doba do výskytu zjistitelné příčiny [hod]
s – počet inspekcí do výskytu vymezitelné příčiny [-]
λ – průměrný počet poruch za jednotku času [-]
δ – velikost posunu v procesu [-]
P – pravděpodobnost, že vymezitelná příčina bude detekčním schématem detekována [-]
α – pravděpodobnost, že zakreslený bod do regulačního diagramu padne mimo regulační meze, i když je proces pod statistickou kontrolou [-]
L – celkové očekávané náklady za jednotku času [Kč/hod]
T_A - doba od počátku běhu procesu do s-té inspekce, kdy je proces pod kontrolou [hod]
T_d – doba od *s*-té inspekce do *n*-té inspekce při níž je posun detekován [hod]
T_n – doba potřebná pro odebrání *n* vzorků a zakreslení výsledků měření do regulačního diagramu při inspekci [hod]
T_0 – očekávaná doba na vyhledání falešného alarmu [hod]
T_1 – očekávaná doba na odhalení [hod]
T_2 – očekávaná doba na opravení zjistitelné příčiny [hod]
T_f – doba potřebná k nalezení zjistitelné příčiny, která způsobila posun v procesu [hod]
T_r – doba potřebná k opravení zjistitelné příčiny [hod]
T_A – doba k detekování zjistitelné příčiny po spuštění signálu [hod]
T_R – doba k provedení reaktivní údržby [hod]
T_P – doba k provedení plánované údržby [hod]
T_{In} – doba procesu pod kontrolou [hod]
T_{Out} – doba procesu mimo kontrolu [hod]
T – celková doba procesu [hod]
g – doba potřebná k měření a zaznamenání jednoho výsledku při inspekci [hod]
C_s – náklady na jednu inspekci [Kč]
C_I – náklady na vyhledání zjistitelné příčiny [Kč]
C_r – náklady na hledání zjistitelné příčiny [Kč]
C_P – náklady na provedení plánované údržby [Kč]
C_R – náklady na provedení reaktivní údržby [Kč]
C_F – fixní náklady [Kč]
C_V – variabilní náklady [Kč]
C_Q – náklady za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou [Kč]
C_O – náklady za hodinu procesu ve stavu mimo kontrolu [Kč]
γ_1 = 1 proces běží během vyhledání zjistitelné příčiny v procesu jinak 0 [-]
γ_2 = 0 proces je zastaven během opravy v ostatních případech 1 [-]
γ_A = 1 proces pokračuje během hledání příčiny v ostatních případech 0 [-]
γ_R = 1 proces pokračuje během reaktivní údržby v ostatních případech 0 [-]
γ_P = 1 proces pokračuje během plánované údržby v ostatních případech 0 [-]
F(t) – distribuční funkce doby do poruchy [-]
f(t) – hustota rozdělení pravděpodobnosti doby do poruchy [-]

Seznam publikací:

[1] Linderman K., Anderson J. C., McKone-Sweet K.E. (2005), An integrated systems approach to process control and maintenance. Europen Journal of Operational Research 164, pp. 324 - 340

[2] Duncan, A. J. (1956), The economic design of X-charts used to maintain current control of a process. Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, No. 274, pp. 228-242

[3] Duncan, A. J. (1971), The economic design of X-charts when there is a multiplicity of assignable causes. Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, No. 333, pp. 107-121

[4] Lorenzen, T. J. and Vance, L.C. (1986), The economic design of control charts: a unified approach. Technometrics 28, pp. 3-10

[5] Cézová, E. (2008) Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu, Request 08, CQR VUT Brno