Statistická analýza obrazu a kontrola jakosti

ROBUST 2012

David Legát

MFF UK

14. září 2012

Obsah

Úlohy analýzy obrazu

- Předzpracování obrazu
  - Redukce šumu v obraze
  - Segmentace obrazu
  - Detekce hran v obraze
- Klasifikace obrazu
  - Zařazení obrazu do vhodné třídy
  - Identifikace objektů v obraze
- Aplikace analýzy obrazu
  - Detekce obličejů v obraze
  - Převádění ručně vyplňovaných formulářů do elektronické podoby
  - Analýza satelitních snímků povrchu Země
  - Identifikace vad v materiálech

Odstranění šumu z obrazu

Vztah pro podmíněné rozdělení původního obrazu $\boldsymbol{x}$, při pozorovaném $\boldsymbol{y}$ získáme z Bayesovy věty:

$$P(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = \frac{\Pi(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{\sum_{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{O}} \Pi(\boldsymbol{z})P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})}$$

- $\mathcal{O}$ značí prostor všech obrazů.
- Pro apriorní rozdělení $\Pi(\boldsymbol{x})$ původního obrazu $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}$ často volíme některý ze základních představitelů náhodných polí (Isingův model; Pottsův model).
- Podmíněné pravděpodobnosti $P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ závisí na způsobu zašumění původního obrazu.

MCMC simulace

Úloha

- Konečná množina stavů $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_N$
- Pravděpodobnostní rozdělení Π na množině $\mathcal{S}$
- Úloha: Vygenerovat posloupnost $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ reprezentující Π

Metropolisův-Hastingsův algoritmus

- Vygeneruj nový prvek x'_{k+1} z rozdělení $Q(x|x_k)$.
- Akceptuj $x_{k+1} = x'_{k+1}$ s pravděpodobností $\alpha(x'_{k+1}, x_k)$, jinak $x_{k+1} = x_k$.

$$\alpha(r,s) = \min\left(1\ ,\ \frac{\Pi(r)Q(r|s)}{\Pi(s)Q(s|r)}\right), \quad r,s \in \mathcal{S}$$

Gibbsův algoritmus

- Vyber složku vektoru $i \in \{1,\ldots,N\}$.
- Vygeneruj novou hodnotu $x_{k+1}^{(i)}$ z podmíněného rozdělení $\Pi(X^{(i)} = x_{k+1}^{(i)} | X^{(-i)} = x_k^{(-i)})$

Markovovy řetězce

Podmínka reversibility

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r})\mathbf{P}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{s})\mathbf{P}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}) \qquad \forall \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathcal{O}$$

- $\mathbf{P}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{r})$ – pravděpodobnost, že v jednom kroku MCMC simulace přejdeme z obrazu $\boldsymbol{r}$ na obraz $\boldsymbol{s}$
- Podmínka reversibility $\Rightarrow \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ je stacionárním rozdělení generovaného řetězce

Nerozložitelný, aperiodický na konečné množině stavů

$$\boldsymbol{\nu} \boldsymbol{P}^n \longrightarrow \boldsymbol{\Pi}$$

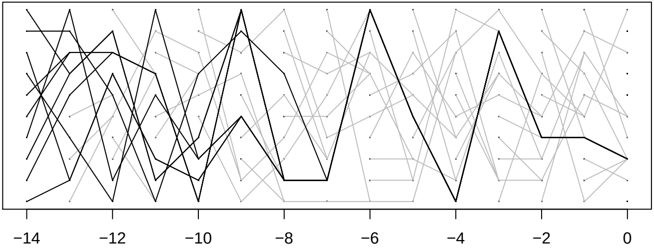
- $\boldsymbol{\nu}$ – Rozdělení prvního prvku $\boldsymbol{X}_0$ posloupnosti
- $\boldsymbol{P}^n$ – Pravděpodobnosti přechodu n kroků MCMC simulace

Coupling from the past

- Pro jak velké n je $\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{P}^n$ dostatečně blízko k Π?
- Jak generovat stacionární řetězec? Tj. $\boldsymbol{\nu} = \Pi$.

Coupling from the past

- Pro jak velké n je $\boldsymbol{\nu P}^n$ dostatečně blízko k Π?
- Jak generovat stacionární řetězec? Tj. $\boldsymbol{\nu} = \Pi$.



- Jdeme zpět v čase.
- Pro každý krok si pamatujeme přechody ze všech stavů.
- Dojde–li ke splynutí všech stavů do jednoho, potom dostaneme stacionární rozdělení Π.

Stochastické proudy (stochastic flows)

Náhodné zobrazení

- Náhodná veličina φ na pravděpodobnostním prostoru $(\Phi, \mathbb{P})$,
  - kde $\Phi = \{\varphi : S \to S\} \equiv S^S$.
- φ je náhodné zobrazení vzhledem k matici přechodů $\boldsymbol{P}$, když

$$\mathbb{P}(\{\varphi : \varphi(r) = s\}) = p(s|r), \quad \forall r, s \in S. \qquad \text{(P)}$$

Stochastický proud

- Náhodná veličina $\bar{\varphi}$ na prostoru oboustranných posloupností náhodných zobrazení $\Omega = \Phi^{\mathbb{Z}}$

$$\bar{\varphi} = \{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} = (\dots, \varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1}, \dots).$$

- Prostor Ω vybaven součinnovou pravděpodobnostní mírou $\bar{\mathbb{P}}$

$$\bar{\mathbb{P}}(\{\bar{\varphi} \in \Omega : \varphi_i = \psi_i,\ i \in I\}) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(\psi_i).$$

- Značíme $\varphi_{n+1}^{n+m} = \varphi_{n+m} \circ \dots \circ \varphi_{n+1}$

Splynutí stavů

Kompletní splynutí v čase n

- Uvažujme jednu posloupnost zobrazení $\bar{\varphi} \in \Omega$

$$\exists k \in \mathbb{N}^0, \exists \omega \in \mathcal{S}, \forall s \in \mathcal{S} \quad \varphi_{n-k}^{n}(s) = \omega.$$

Kompletní splynutí skoro jistě

- F_n množina všech proudů s kompletním splynutím v čase n

$$\mathbb{P}(F) = 1. \tag{F}$$

kde $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n$.

Splynutí stavů

Vlastnosti stochastických proudů:

(P) $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ jsou náhodná zobrazení vzhledem k matici přechodů $\boldsymbol{P}$.

(F) Nastává kompletní splynutí skoro jistě.

Stav splynutí

$$W_n(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \lim_{m\to-\infty} \varphi_m^n(s), \ s \in S, & \bar{\varphi} \in F_n, \\ \omega_0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

Věta:

Za podmínek (P) a (F) je náhodný proces $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ stacionární homogenní Markovův řetězec s maticí přechodů $\boldsymbol{P}$.

Jak simulovat náhodná zobrazení

Obecný princip

- Uvažujme
  - funkci $f : S \times \Theta \to S$
  - iid $U_i, i \in \mathbb{Z}$ s hodnotami v Θ.
- Pak $\varphi_i = f(\cdot, U_i)$ je náhodné zobrazení

Běžná konstrukce

$\Theta =< 0, 1 >$ a $U_i \sim U(< 0, 1 >)$

$$
\begin{aligned}
f(s_i, u) &= s_1 \quad \text{if } u \in [0, p(s_i, s_1)] \\
f(s_i, u) &= s_2 \quad \text{if } u \in (p(s_i, s_1), p(s_i, s_1) + p(s_i, s_2)] \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
f(s_i, u) &= s_n \quad \text{if } u \in (1 - p(s_i, s_n), 1].
\end{aligned}
$$

Jak ověřit podmínku (F)

Definice:

Nechť $\bar{\varphi} \in \Omega$ je stochastický tok. Pak náhodná veličina

$$T_n(\bar{\varphi}) = sup\{m \leq n : \exists \omega \in S \text{ such that } \varphi_m^n(s) = \omega \ \forall s \in S\}$$

je nazývána *čas nejpozdějšího splynutí* před časem n.

Věta:

Nechť $(\Omega, \bar{\mathbb{P}})$ je prostor stochastických toků. Pak následující podmínky jsou všechny ekvivalentní podmínce (F)

1) $\bar{\mathbb{P}}\{\bar{\varphi} \in \Omega : T_n(\bar{\varphi}) > -\infty\} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2) $\exists \tau \in \mathbb{N}$ takové, že $\bar{\mathbb{P}}\{\bar{\varphi} \in \Omega : T_0(\bar{\varphi}) > -\tau\} > 0$
3) $\forall r, s \in S \ \exists n_{rs} \in \mathbb{N}$ tak, že $\bar{\mathbb{P}}\{\bar{\varphi} \in \Omega : \varphi_1^{n_{rs}}(r) = \varphi_1^{n_{rs}}(s)\} > 0$

Částečně uspořádané množiny stavů

Definice:

Částečné uspořádání na množině S je relace $r \preceq s$ mezi prvky $r, s \in S$ se dvěma vlastnostmi

- **reflexivita** - $s \preceq s \ \forall s \in S$
- **transitivita** - $r \preceq s$ a $s \preceq t$ implikuje $r \preceq t$

Definice:

Říkáme, že náhodné zobrazení $\varphi = (\Phi, \mathbb{P})$ zachovává uspořádání skoro jistě, jestliže platí

$$\mathbb{P}(\Gamma) = 1, \tag{M}$$

kde $\Gamma = \{\varphi \in \Phi : r \preceq s \Rightarrow \varphi(r) \preceq \varphi(s), \forall r, s \in S\}$

Splynutí extrémů

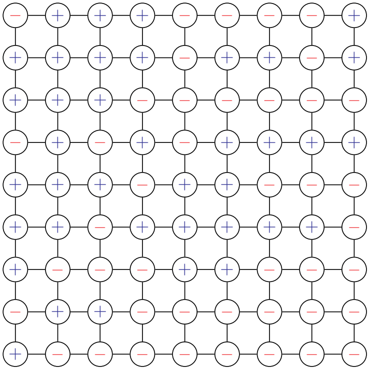
Věta:

Předpokládejme, že $\boldsymbol{P}$ je jádro nerozložitelného Markovova řetězce na částečně uspořádané množině stavů $(S, \preceq)$ takové, že existují minimální a maximální stavy $\underline{m}, \overline{m} \in S$ a

$$r \preceq s \text{ and } s \preceq r \;\Leftrightarrow r = s, \quad \forall r, s \in S.$$

Mějme dále prostor $(\Phi, \mathbb{P})$ náhodných zobrazení, který splňuje podmínku (F) a (M). Nechť $(\Omega, \bar{\mathbb{P}})$ je prostor náhodných toků složených z náhodných zobrazeních Φ (tj. $\Omega = \Phi^{\mathbb{Z}}$ a $\bar{\mathbb{P}}$ je součinová míra $\mathbb{P}^{\mathbb{Z}}$). Pak splynutí extrémů $\underline{m}, \overline{m}$ je postačující podmínkou pro úplné splynutí.

Jak vypadá Isingův model?



- Obraz $\boldsymbol{y} = \{y_b \in \mathcal{G}\}_{b \in B}$
  - B – pravoúhlá mřížka bodů

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i \leq N, j \leq M\}$$

  - $\mathcal{G}$ – množina možných intezit
- Isingův model černobílého obrazu

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{y}) \sim \exp\left(\beta \sum_{a \sim b} y_a y_b\right)$$

  - $\mathcal{G} = \{-1, 1\}$
  - $a \sim b$ značí sousední body v mřížce
  - Energie obrazu $E = -\beta \sum_{a \sim b} y_a y_b$

Swendsonův–Wangův algoritmus

Gibbsův a Metropolisův–Hastingsův algoritmus:

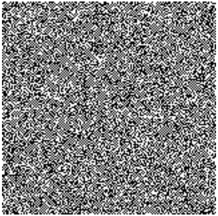
- Obměňují v každém kroku pouze jeden bod.
- Přechod od tmavého obrazu ke světlému je nepravděpodobný pro vysoké hodnoty parametru β.

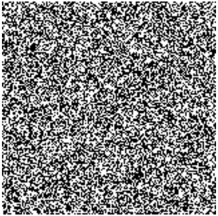
Swendsonův–Wangův algoritmus:

- Generuje nejenom sekvenci obrazů $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ale také sekvenci mikrohran $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
- V každém kroku může změnit všechny body obrazu.
- Konverguje rychleji ke rozdělení Isingova modelu.
- V každém kroku provede dva úkony:
  - Nastavení mikrohran
  - Volba nového obrazu

Příklady Isingova modelu

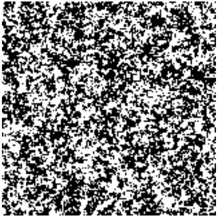
$\beta = -0.3$

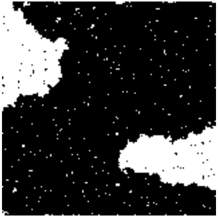




$\beta = 0$

$\beta = 0.3$

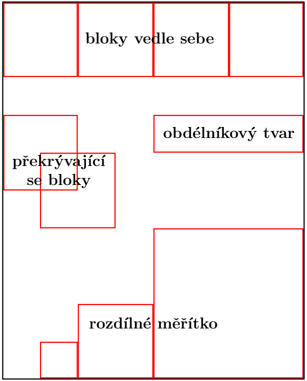




$\beta = 0.6$

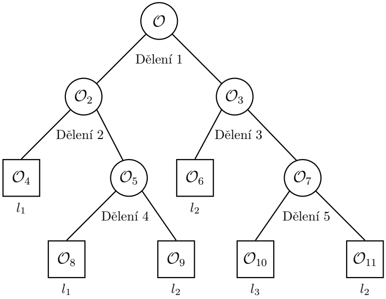
Klasifikace obrazu

Rozdělení obrazu na bloky



- Postup klasifikace
  - Rozdělit obraz na bloky
  - Každému bloku přiřadit texturu
- Bayesovský přístup
  - Pottsův, případně Isingův model volen jako apriorní rozdělení textur
- Zkoumaných bloků je zpravidla mnoho, proto záleží nejenom na přesnosti použitého klasifikátoru, ale také na rychlosti klasifikace.

Klasifikační stromy



- Časová náročnost $W(t)$ listu t je časem potřebným pro spočtení chrakteristik v děleních nad ním.
- Střední časová náročnost stromu T je vážený průměr

$$W(T) = \sum_{t \in \mathcal{T}} W(t) P(\mathbf{Y} \in \mathcal{O}_t).$$

Zohlednění střední časové náročnosti stromu při učení klasifikátoru

- Modifikace kritéria pro volbu vhodného dělení
- Nová zastavovací pravidla
- Zohlednění střední časové náročnosti při prořezávání stromu

Identifikace vad ve tkaných textiliích

Popis problému

- Vizuální kontrola textilií je časově náročná a v případě malých vad i nepřesná.
- Při automatické detekci vad je nasnímán obraz látky.
- Klasifikační algoritmus musí být kalibrován pro konkrétní stroj na detekci vad.

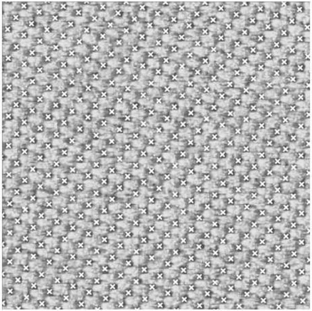
Vady podle směru:

- ve směru osnovy
- ve směru útku
- směrově nezávislé

Vady podle závažnosti:

- nezávažné – stačí vyznačit místo výskytu
- závažné – potřeba zastavit stroj a opravit vadu

Popis látky bez vad



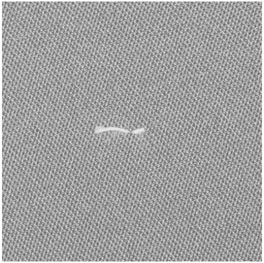
Základní body

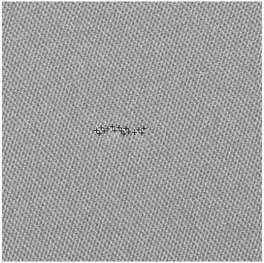
- Středy tmavých oblastí v obraze
- Obraz aproximován pomocí diskrétní Fourierovy transformace

Popis obrazu látky bez vad

- Vzájemná poloha sousedních základních bodů ve směru útku
- Vzájemná poloha sousedních základních bodů ve směru osnovy
- Vzhled obrazu látky v okolí základních bodů

Identifikace vad





Identifikace vad

- Postupně procházíme kandidáty na základní body.
- Vyznačíme vadu, když se zvolený výřez výrazně liší od průměrného okolí základních bodů v látce bez vad.

Klasifikace vad

- Každé identifikované vadě manuálně přiřadíme její typ.
- Máme–li pro nějaký typ vady dostatečné množství vzorků, vytvoříme model pro jeho rozpoznání.

Děkuji...

Literatura

1. Fieguth P. (2011): Statistical Image Processing and Multidimensional Modeling. Springer, New York.
2. Hastings W.K. (1970): Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. Biometrika 57, 97–109.
3. Roberts, Ch. P., Casella, G.(2005): Monte Carlo Statistical Methods, Springer, Heidelberg.
4. Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A. a Stone, C. J. (1984): Classification and Regression Trees. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey.
5. Linka, A., Volf, P. (2001): Statistické metody pro hodnocení homogenity textilních materiálů. ROBUST'2000, JČMF, 2001, 164–175.
6. Tunák, M. (2011): Detekce vad v plošných textíliích. Disertační práce, Technická univerzita v Liberci.