

NĚKTERÉ KVANTITATIVNÍ ASPEKTY PENZÍ

Tomáš Cipra

Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha

1. ÚVOD

Tento příspěvek se zabývá problematikou **penzí**:

- a to především **penzí starobních**, které označují příjem vyplácený od okamžiku penzionování (tj. od okamžiku odchodu do penze či kladně vyřízené žádosti o vyplácení penze);
- aktivní populace v řadě zemí (např. zaměstnanci v České republice) na penze většinou pohlíží jako na důležitou součást systému odměn (**benefitů**) odložených během aktivního života na stáří;
- značná publicita věnovaná této problematice se odrazila ve **zvýšené informovanosti o penzích** včetně zájmu jednotlivců o **finanční plánování** související s důchodovým věkem.

Velmi ***komplexní téma zasahující do celé řady oborů:***

- politika, právo, sociologie, ekonomie, finance, demografie, matematika aj.

a daleko více ***podoborů:***

- sociální politika, charita, důchodová legislativa, sociální gerontologie, geriatrie, národní účetnictví, teorie užitku, veřejné finance, finanční trhy, investiční management, populační projekce, teorie rizika, aktuárské vědy aj.

Příspěvek se zaměřuje na ***kvantitativní problematikou penzí:***

- nejen konkrétní numerické kalkulace, ale i prezentace abstraktnějších postupů založených na ***matematickém modelování;***
- ***matematika ve společenských vědách*** má dnes jak své zastánce, tak své odpůrce:

Odpůrci:

- exaktnost matematických předpokladů je se společenskou praxí neslučitelná (v matematických formulích se ztrácí ***lidský faktor***);
- dnešní penzijní systémy jsou „***přektuarizované***“ a v různých situacích, které může život přinést, se začnou od matematických modelů a šablon fatálně odchylovat.

Zastánci:

- v kontextu penzí je vždy nutné nakonec něco *spočítat, odhadnout, předpovědět* (s předepsanou spolehlivostí takové předpovědi), *rezervovat* (s předepsanou pravděpodobností eliminace „ruinování“);
 - to sebelepší politické či morální proklamace nedokážou.
- ⇓
- Zmíněné obory včetně *penzijní matematiky* by měly *koexistovat v určité symbióze* a navzájem profitovat na svých přednostech.

Důsledky **ekonomického a demografického vývoje**:

- ***problém priorit*** pro rozpočty vyspělých ekonomik a jejich politické reprezentace v příštích desetiletích: ***upřednostňovat výdaje na vzdělání a potřeby mladých lidí, nebo sociální a zdravotní péči pro lidi staré?***
- ***výdaje na podporu starších rostou úměrně se stárnutím populace*** ⇒
 - tlak na zajištění toho, co se v moderní společnosti označuje jako ***důstojné stáří***;
 - ***rodinná podpora*** přestala být v řadě zemí sociální jistotou;
 - napětí, které se začíná projevovat v ***mezigeneračních konfliktech a neshodách*** včetně volebních výsledků.

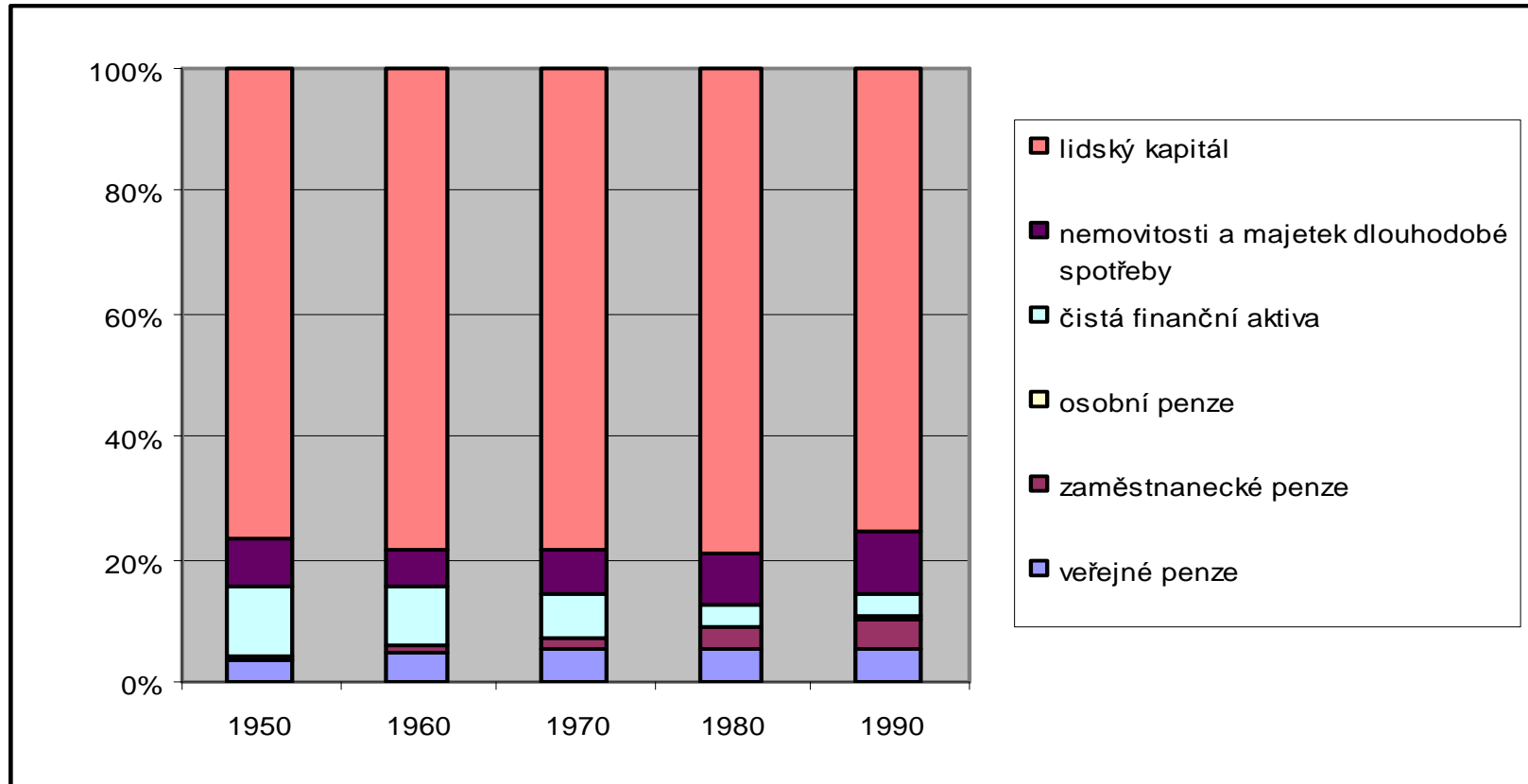
2. ZABEZPEČENÍ VE STÁŘÍ

Základní opory: ***stát, rodina, trh***

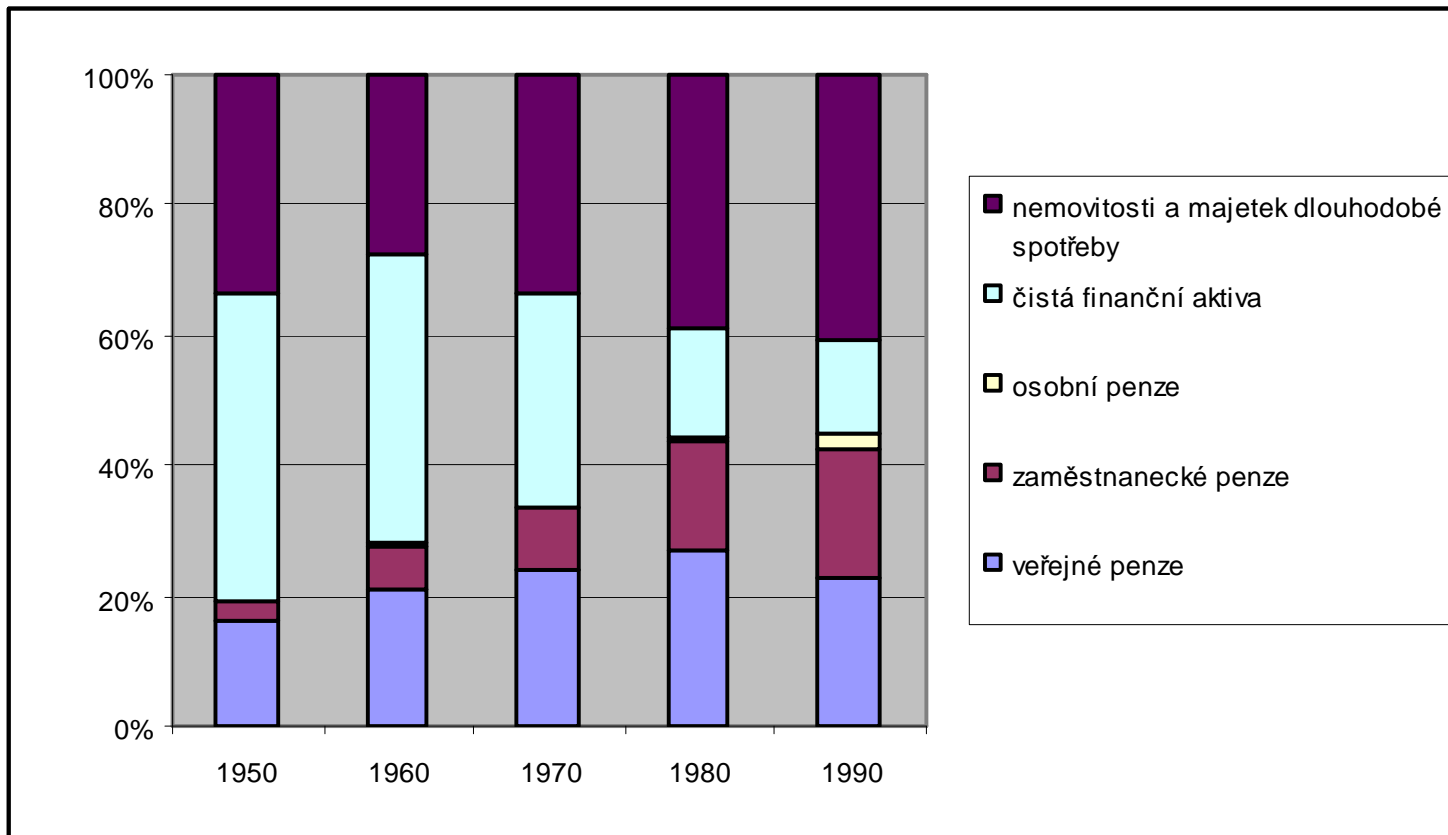
Stát (či vláda):

- = *přerozděluje příjmy a služby* jak v čase (tj. v průběhu lidského života), tak mezi jednotlivci;
- tato *přerozdělovací úloha státu* bývá ve srovnání s ostatními zdroji dominantní.

Procentní složení osobních aktiv v UK ve vybraných letech:



Procentní složení osobních aktiv v UK ve vybraných letech bez dominující složky lidského kapitálu:



Rodina:

- = hraje významnou roli zvláště co se týče **pečovatelských služeb**:
- **skandinávské země** jsou výjimečné téměř univerzální veřejnou péčí nerodinného typu o starší spoluobčany
- v **USA** existuje široká tržní nabídka placených pečovatelských služeb;
- **soužití s dětmi** nejen vypovídá o rodinné péči, ale i o ekonomickém postavení starších lidí obecně:
 - **Itálie a Španělsko**: zhruba 30 % starších žije s dětmi;
 - **Dánsko**: soužití generací již spíše výjimkou;
 - jestliže se stárnutí populace bude zčásti kompenzovat **větším zaměstnáváním žen**, pak péče rodinného typu o starší je v budoucnu neudržitelná.

Tržní investování úspor:

- = má v *různých zemích různou váhu*;
- role úspor posiluje tam, kde dochází k *oklešťování státního důchodového zdroje* nebo při *zvyšování daňových či jiných stimulů* zvýhodňujících firemní nebo soukromé důchodové spoření (*anglosaské země, Holandsko*).

Historie:

- = může být inspirativní pro současné pokusy o důchodové reformy;
- v 17. a 18. st. např. ve Francii a Nizozemsku tzv. *tontiny*:
 - = půjčky státu (jejich motivací byly prázdné státní pokladny);
 - každým rokem byl žijícím věřitelům rozdělen stanovený úrok připadající na složený kapitál;
 - při úmrtí připadla příslušná jistina ve prospěch zbývajících věřitelů;
 - tj. vlastně doživotní důchod, který s rostoucím věkem rostl vzhledem k postupnému vymírání počátečního souboru věřitelů (tedy jakási *sázka na přežití*).

– **Německo 1889:**

- koncem 19. st. sociální problém vyvolaný *významným nárůstem počtu starších chudých lidí*;
- *demograficky začalo prodlužovat období stáří* (ovšem z dnešního pohledu velmi nízké hodnoty: např. počet občanů starších než 60 let z celkové populace kolem roku 1900 tvořil přibližně ve Velké Británii 6 % a ve Francii 12 %);
- díky **Bismarckovi** Německo prvním státem s povinným veřejným systémem starobních důchodů:
 - 1889: *starobní důchodové pojištění*:
 - týkalo se všech dělníků a některých úředníků s platem do určitého stropu;

- *důchod vyplácen až od věku 70 let* (tím pádem starobní důchod pobíral jen omezený počet pojištěnců);
 - fondový systém financovaný stejně vysokými příspěvky zaměstnanců a zaměstnavatelů a na každý důchod přispíval paušální částkou také stát.
-
- ***Rakousko-Uhersko 1906:***
 - v prvorepublikovém *Československu* bylo dělnické důchodové pojištění zavedeno až v roce 1924.

- ***UK a Beveridgeův model národního pojištění:***
 - uplatnil se v plném rozsahu až po 2. světové válce (viz tzv. Beveridgeovu zprávu z roku 1942);
 - britský ekonom Beveridge zastával názor, že *nezasloužená chudoba ve vyšším věku* může být minimalizována jen na základě *penze vyplácené univerzálně všem občanům od jistého věku a financované ze státních daňových výnosů*;
 - *příspěvky*: nezávislé na výši pracovních příjmů;
 - *dávky*: velmi nízké ← *sociální pojištění má sloužit jen k odstranění nejhorší nouze a nemá podryvat odpovědnost občanů spolupodílet se na svém vlastním zabezpečení ve stáří především formou zaměstnaneckého či soukromého pojištění.*

- **Období po 2. světové válce:**
 - *politizace problematiky*: rychlá expanze státních důchodových systémů znamenala krátkodobě bezpracné navyšování příjmů do státních rozpočtů (každý nový kmen pojištěnců musel nejprve do systému platit dlouhou dobu příspěvky, než se kvalifikoval pro výplatu důchodů);
 - *lákavé pro politiky* (shánějící před volbami politické hlasy) jako známý „*oběd zadarmo*“ (*free lunch*);
 - *60. léta 20. století*: pracovní síla většiny průmyslových zemí téměř *kompletně pokryta státními důchodovými systémy*;

- **80. léta 20. století:** státní sociální systémy většiny vyspělých zemí dosáhly své **zralosti**: zatímco počet plátců (tj. aktivních pojištěnců) se stabilizoval, počet příjemců (tj. důchodců) začal postupně růst;
⇓
- naplňuje se tušení, že ***oběd zadarmo je vlastně velmi drahé jídlo.***

3. DŮCHODOVÁ REFORMA

- tento aktuální pojem v řadě zemí značně *zpolitizován*;
- předem jasný je fakt, že *žádné univerzální reformní řešení neexistuje*;



- ***OECD 2011 - „tři řešení důchodového paradoxu“:***

(1) *První řešení = prodloužení pracovní periody lidského života (tj. delší pracovní život):*

- pro svou jednoduchost již realizováno v řadě zemí:

Počet let strávených v důchodu (zdroj: OECD (2011))

| | <i>Muži</i> | | <i>Ženy</i> | |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | <i>2010</i> | <i>2050</i> | <i>2010</i> | <i>2050</i> |
| <i>Česko</i> | 17,0 | 18,1 | 23,8 | 22,5 |
| <i>Finsko</i> | 16,8 | 19,8 | 21,0 | 24,7 |
| <i>Francie</i> | 21,7 | 24,8 | 26,5 | 29,5 |
| <i>Japonsko</i> | 18,8 | 21,6 | 24,1 | 27,7 |
| <i>Mad'arsko</i> | 16,5 | 16,3 | 22,6 | 21,1 |
| <i>Německo</i> | 17,0 | 20,3 | 20,7 | 24,4 |
| <i>Polsko</i> | 14,4 | 17,2 | 23,1 | 26,6 |
| <i>Rakousko</i> | 17,5 | 21,1 | 25,1 | 24,5 |
| <i>Řecko</i> | 24,0 | 24,1 | 27,1 | 28,3 |
| <i>Slovensko</i> | 14,9 | 18,6 | 24,9 | 23,9 |
| <i>Švédsko</i> | 17,9 | 21,1 | 21,1 | 24,2 |
| <i>UK</i> | 16,9 | 16,9 | 24,5 | 21,9 |

- podle OECD bude *v budoucnu hlavním řešením* jak snížit výdaje na důchody.

(2) ***Druhé řešení*** = státní důchodové systémy se zaměří (výlučně nebo přednostně) na ty složky populace, které jsou z ***hlediska důchodů nejvíce zranitelné***;

– souvisí s ***přerozdělováním*** prostředků vyplácených jako penze.

(3) ***Třetí řešení*** = ***větší podpora vlastních úspor na stáří*** prostřednictvím (soukromých) penzijních fondů či jiných forem spoření:

– většinou zde důležitou roli hrají ***daňové úlevy či jiné pobídky státu***;

– úspěchem je fakt, že v řadě zemí (např. v Německu) se daří pro toto řešení získávat i ***mladší ročníky a nízkopříjmové zaměstnance***;

– v ČR se začne realizovat od 1. ledna 2013 (zatím ***dobrovolně***).

4. DEMOGRAFICKÉ ASPEKTY PENZIJNÍCH PLÁNŮ

Fertilita:

- *úhrnná plodnost* = počet dětí, které by se živě narodily v průměru jedné ženě během jejího reprodukčního období (15-49 let);
- úhrnná plodnost *pod 2,1* vede k dlouhodobému snižování populace.

Úhrnná plodnost ve vybraných zemích (*United Nations 2008*):

| | <i>2005-2010</i> | <i>2015-2020</i> | <i>2025-2030</i> | <i>2035-2040</i> | <i>2045-2050</i> |
|------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| <i>Česká republika</i> | 1,41 | 1,57 | 1,67 | 1,77 | 1,85 |
| <i>Japonsko</i> | 1,27 | 1,30 | 1,40 | 1,50 | 1,60 |
| <i>Maďarsko</i> | 1,35 | 1,47 | 1,57 | 1,67 | 1,77 |
| <i>Mexiko</i> | 2,21 | 1,89 | 1,85 | 1,85 | 1,85 |
| <i>Německo</i> | 1,32 | 1,39 | 1,49 | 1,59 | 1,69 |
| <i>Rakousko</i> | 1,38 | 1,46 | 1,56 | 1,66 | 1,76 |
| <i>Slovensko</i> | 1,28 | 1,40 | 1,50 | 1,60 | 1,70 |
| <i>Švédsko</i> | 1,87 | 1,85 | 1,85 | 1,85 | 1,85 |
| <i>UK</i> | 1,84 | 1,85 | 1,85 | 1,85 | 1,85 |
| <i>USA</i> | 2,09 | 1,95 | 1,85 | 1,85 | 1,85 |
| <i>EU27</i> | 1,53 | 1,61 | 1,67 | 1,74 | 1,79 |
| <i>OECD34</i> | 1,69 | 1,71 | 1,73 | 1,77 | 1,80 |
| <i>Brazílie</i> | 1,90 | 1,60 | 1,50 | 1,60 | 1,75 |
| <i>Čína</i> | 1,77 | 1,84 | 1,85 | 1,85 | 1,85 |
| <i>Indie</i> | 2,76 | 2,30 | 1,96 | 1,85 | 1,85 |
| <i>Rusko</i> | 1,37 | 1,53 | 1,63 | 1,73 | 1,83 |

Střední délka života:

- *střední délka života v daném věku* = počet roků, které v průměru ještě prožije jedinec v daném věku, pokud by míry úmrtnosti zůstaly na úrovni roku, za který je střední délka života počítána;
- *střední délka života* = střední délka života při narození (tj. ve věku 0);
- zhruba *za 40 let se střední délky života ve věku 65 u mužů a žen zvýší o 3 až 4 roky* (OECD: 19,5 a 23,5; EU: 18,6 a 22,9; ČR: 17,7 a 22,0);
- za minulých 150 let se *střední délka života žen* v „nejzdravějších“ zemích zvyšovala stabilním tempem o tři měsíce ročně.

Střední délka života ve vybraných zemích (UN 2008)

| | <i>Muži 2006</i> | <i>Ženy 2006</i> | <i>Muži 65 2045-2050</i> | <i>Ženy 65 2045-2050</i> |
|------------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|
| <i>Česká republika</i> | 73,4 | 79,5 | 17,7 | 22,0 |
| <i>Japonsko</i> | 79,0 | 86,2 | 21,3 | 27,3 |
| <i>Maďarsko</i> | 69,2 | 77,4 | 15,8 | 20,7 |
| <i>Mexiko</i> | 73,8 | 78,7 | 18,8 | 21,7 |
| <i>Německo</i> | 77,1 | 82,4 | 19,9 | 24,0 |
| <i>Polsko</i> | 71,3 | 79,8 | 16,8 | 21,8 |
| <i>Rakousko</i> | 77,2 | 82,6 | 20,7 | 24,0 |
| <i>Slovensko</i> | 70,7 | 78,5 | 16,3 | 21,1 |
| <i>Švédsko</i> | 78,7 | 83,0 | 20,7 | 23,8 |
| <i>UK</i> | 77,2 | 81,6 | 19,6 | 23,4 |
| <i>USA</i> | 76,9 | 81,4 | 19,4 | 23,3 |
| <i>EU27</i> | 74,5 | 80,9 | 18,6 | 22,9 |
| <i>OECD34</i> | 76,1 | 81,8 | 19,5 | 23,5 |
| <i>Brazílie</i> | 68,7 | 76,0 | 18,1 | 21,9 |
| <i>Čína</i> | 71,3 | 74,8 | 17,1 | 20,1 |
| <i>Indie</i> | 62,1 | 65,0 | 15,4 | 17,4 |
| <i>Rusko</i> | 60,3 | 73,1 | 14,2 | 18,6 |

Migrace a pracovní mobilita:

- ***Čistá migrace (net migration)*** = rozdíl mezi celkovými a přirozenými změnami počtu obyvatel dané země;
- efekt stárnutí populace může být zmírněn nebo naopak posílen populační migrací;
- čistý migrační průměr pro země ***EU 2005*** činil **3,6** na 1 000 obyvatel;
- odpovídalo situaci v ***ČR*** s čistým migračním přírůstkem **3,5**;
- tato čísla pro Evropu jsou velmi nízká ← přetrvávající ***rozdíly mezi regionálními trhy práce*** (např. co se týče mezd);
- současná úroveň mobility v Evropě ***není dostačující pro efektivní alokaci práce***;
- ale nezahrnuty počty ***dojíždějících (commuters)***.

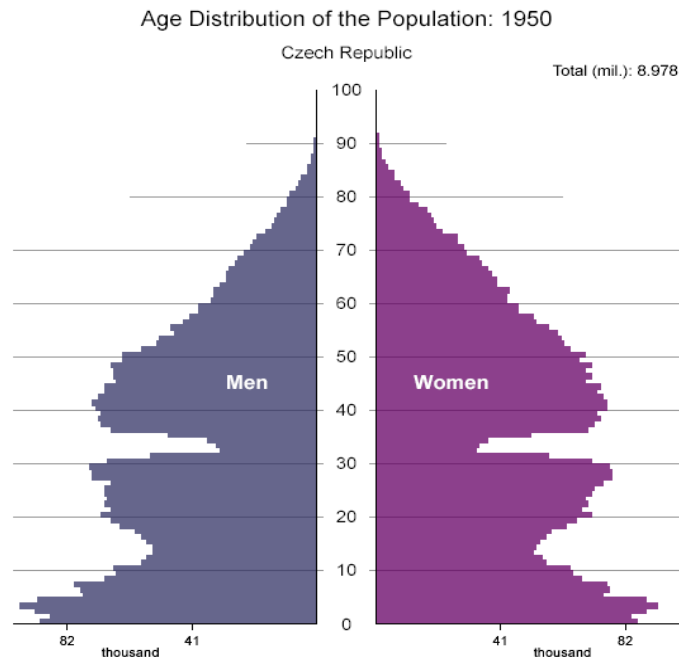
Čistá migrace na tisíc obyvatel v evropských zemích v roce 2005
(Eurostat 2008)

| | |
|------------------|-------------|
| <i>EU27</i> | 3,6 |
| <i>Belgie</i> | 4,7 |
| <i>Česká</i> | 3,5 |
| <i>Finsko</i> | 1,7 |
| <i>Francie</i> | 3,0 |
| <i>Holandsko</i> | -1,4 |
| <i>Irsko</i> | 15,0 |
| <i>Itálie</i> | 5,2 |
| <i>Maďarsko</i> | 1,7 |
| <i>Německo</i> | 1,0 |
| <i>Polsko</i> | -0,3 |
| <i>Rakousko</i> | 6,1 |
| <i>Rumunsko</i> | -0,3 |
| <i>Řecko</i> | 3,6 |
| <i>Slovensko</i> | 0,6 |
| <i>Španělsko</i> | 14,8 |
| <i>Švédsko</i> | 3,0 |
| <i>Švýcarsko</i> | 4,3 |
| <i>Turecko</i> | 0,0 |
| <i>UK</i> | 3,8 |

Věkové rozdělení populace:

- většinou znázorňuje pomocí tzv. *věkových pyramid* (*age pyramid*);
- **ČR: za necelých šedesát let tvar smrku změnil na tvar lípy.**

Věkové rozdělení populace v České republice v roce 1950 a 2008



Míra podpory ve stáří:

- *míra podpory ve stáří (dependency ratio)* = počet osob v pracovním věku 20-64 na jednu osobu v (penzijním) věku 65 a více;
- tj. s nadsázkou „*kolik aktivních osob bude živit jednoho důchodce*“;
- *země OECD 2008-2050*: průměrná míra podpory ve stáří *klesne na polovinu z hodnoty 4,2 na hodnotu 2,1* (v některých zemích dokonce na hodnotu blízkou 1);
- *ČR 2008-2050*: tento pokles bude ještě výraznější z *hodnoty 4,4 na 1,9*.

Úmrtnostní tabulky:

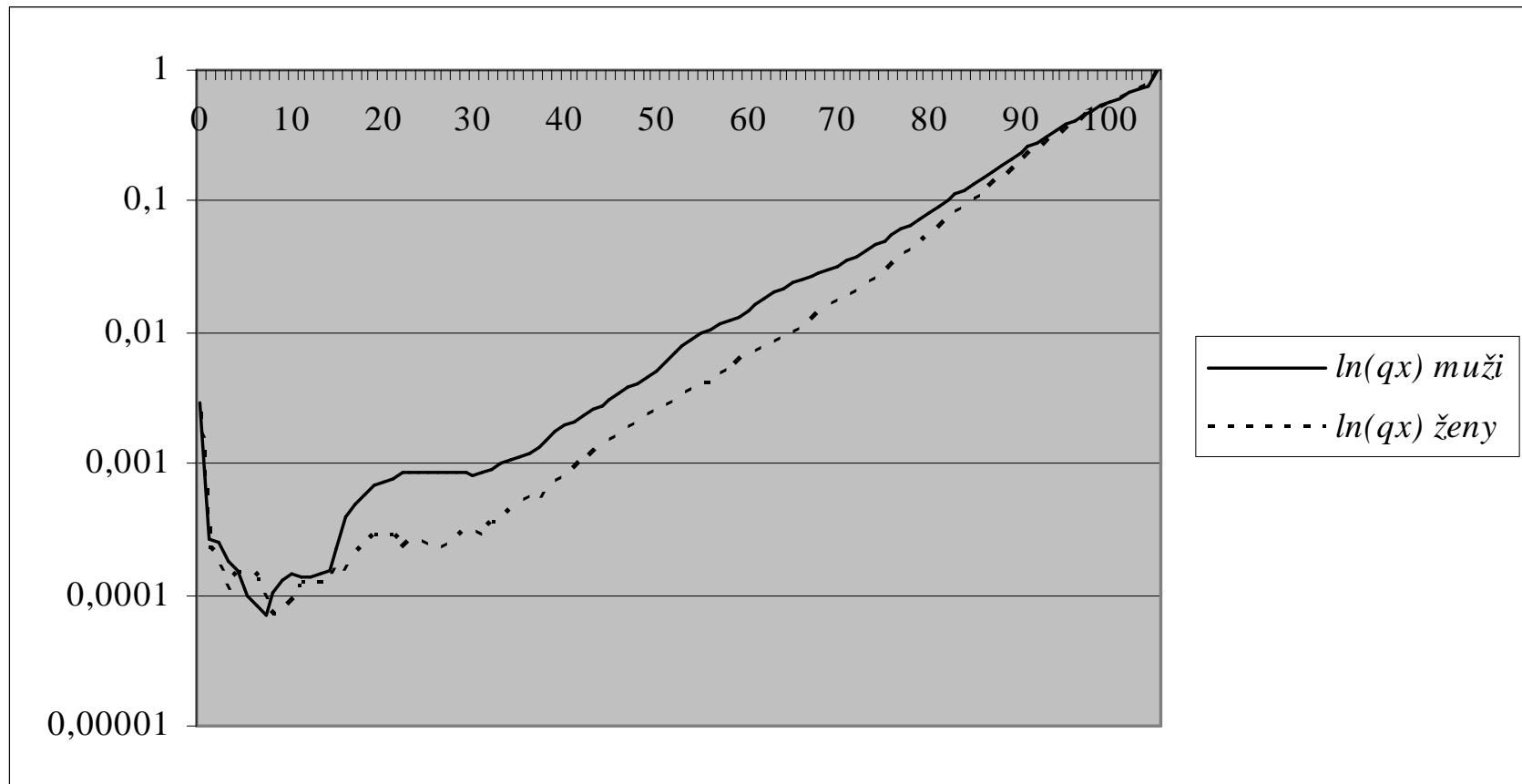
Klasické úmrtnostní tabulky:

- základním výpočetní nástroj penzijního (a obecněji životního) pojištění mimo dalších aplikací (např. v lékařství, ekonomii aj.);

| 2010 Česká republika – muži (ČSÚ) | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-------|-------|-----------|---------|-------|-------|--------|-------|
| x | D_x | P_x | q_x | l_x | d_x | L_x | T_x | e_x |
| 0 | 172 | 60443 | 0,002 856 | 100 000 | 286 | 99758 | 743720 | 74,37 |
| 65 | 1288 | 55161 | 0,023 804 | 78363 | 1865 | 77430 | 119563 | 15,26 |
| 105 | 1 | 20 | 1,000 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,50 |

| 2010 Česká republika – ženy (ČSÚ) | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-------|-------|-----------|---------|-------|-------|--------|-------|
| y | D_y | P_y | q_y | l_y | d_y | L_y | T_y | e_y |
| 0 | 141 | 57624 | 0,002 477 | 100 000 | 248 | 99798 | 805973 | 80,60 |
| 65 | 674 | 65134 | 0,010 114 | 90047 | 911 | 89592 | 168463 | 18,71 |
| 105 | 12 | 36 | 1,000 000 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,50 |

Pravděpodobnosti úmrtí q_x pro muže a q_y pro ženy ČR 2010



Rektangularizace dožívání:

- stále více lidí se dožívá mimořádně vysokého věku, který je ale zároveň *stropem možností lidského organismu*;
- tímto stropem je z hlediska pokroků ve výživě a medicíně během 20. století *věk 115 let*:
 - 8 z posledních 9 držitelů titulu „nejstarší žijící člověk“ (z pohledu roku 2011) získalo tento primát ve věku 114 let a 1 ve věku 115 let;
 - v Japonsku v roce 1990 žilo zhruba 3 000 lidí starších 100 let, přičemž tomu nejstaršímu bylo 114, zatímco v roce 2010 zde žije již 44 000 lidí starších 100 let, přičemž tomu nejstaršímu je opět 114 let.

Generační úmrtnostní tabulky:

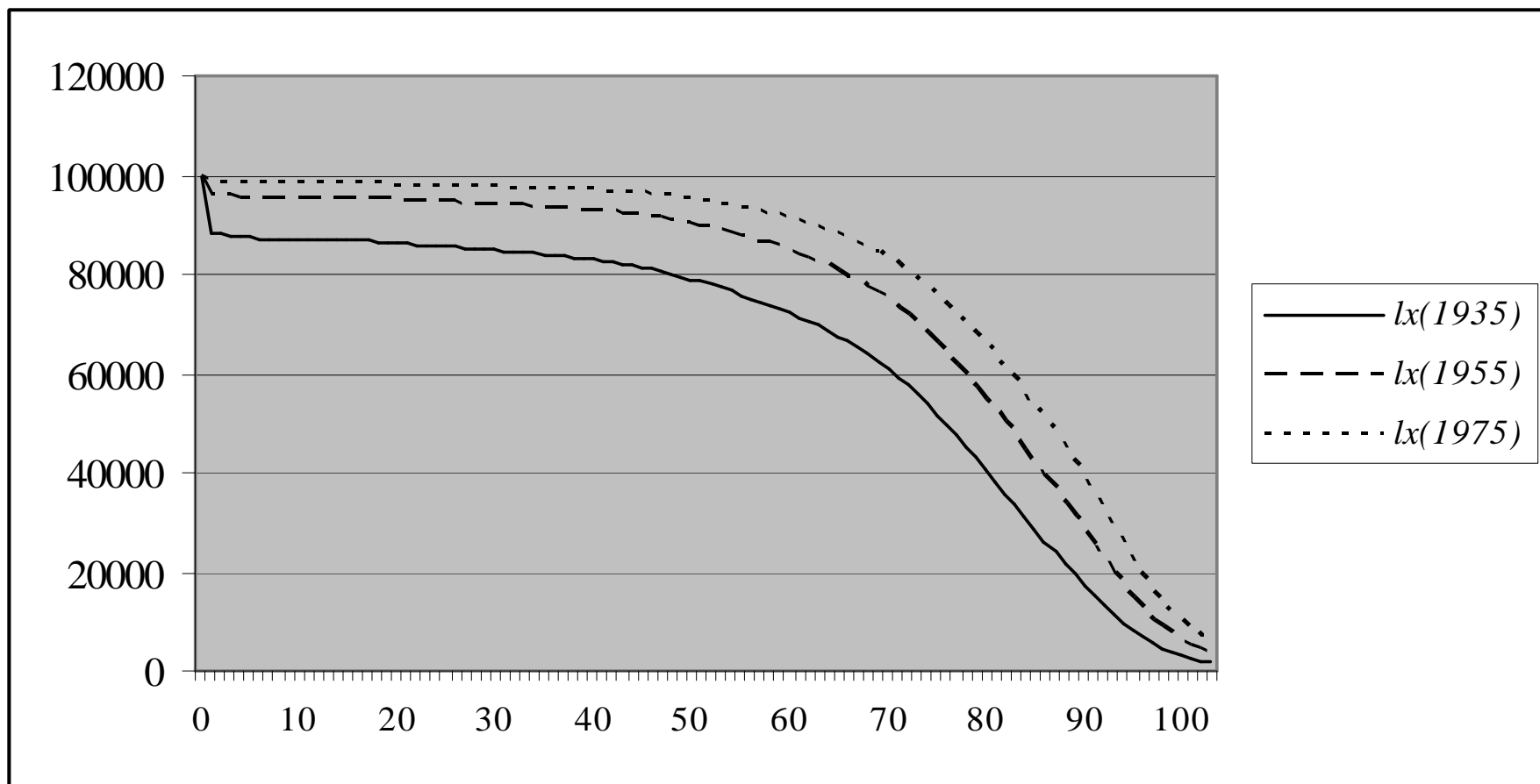
- obsahují matice (q_x^{τ}) pro jednotlivé **věky** x a **roky narození** τ ;
- tento postup je žádoucí, neboť **v čase dochází k poklesu úmrtnosti**, takže běžné úmrtnostní tabulky se brzy stávají neadekvátními;
- v příslušném modelu je nutné zohlednit zlepšování (tedy pokles) úmrtnosti $q_x^{\tau_1} > q_x^{\tau_2}$ pro $\tau_1 < \tau_2$ např. pomocí funkcionálního vztahu

$$q_x^{\tau_2} = q_x^{\tau_1} \cdot e^{-\xi_x(\tau_2 - \tau_1)}$$

tempem vyjádřeným **pomocí koeficientu** $\xi_x \geq 0$ (čím větší je časový odstup mezi dvěma generacemi, tím větší zlepšení úmrtnosti nastane);

- první **generační tabulky pro ČR** byly zkonstruovány v **Cipra (1998)**.

**Počty dožívajících l_x pro generace 1935, 1955 a 1975 podle
generačních úmrtnostních tabulek ČR muži (*Cipra 1998*):**

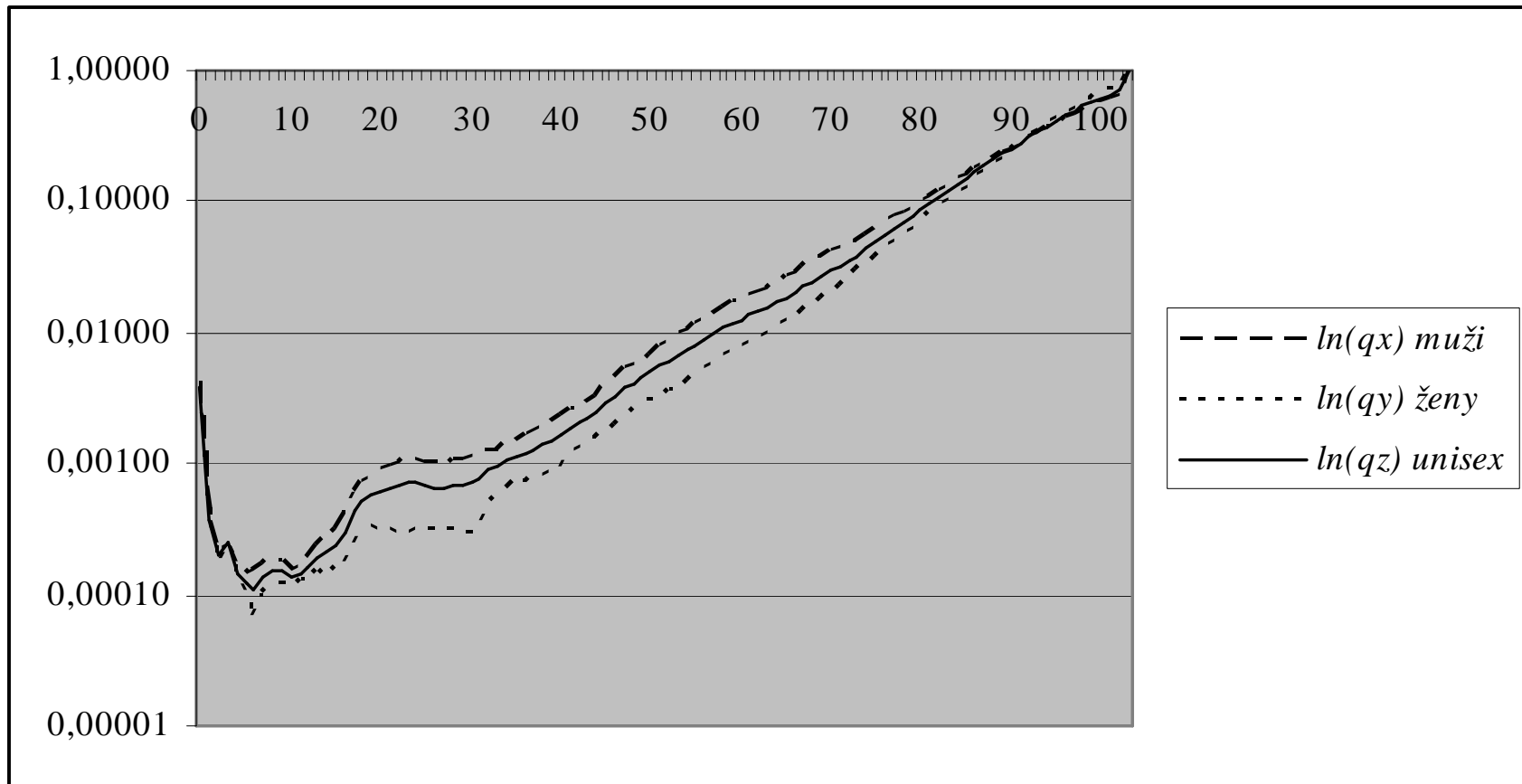


Unisex úmrtnostní tabulky:

- *diskriminace žen* je jev neslučitelný s principy moderní společnosti;
- přijetím unisex přístupu se *popírají pojistně-matematické principy*, na kterých je pojištění osob (včetně penzijního pojištění) založeno;
- *ČSÚ* zatím unisex ÚT zatím nepublikuje;
- v *Smetana a Cipra (2005)* jsou zkonstruovány unisex ÚT 2003 stejnou metodikou, jakou používá ČSÚ pro konstrukci mužských a ženských ÚT:
- výsledky nejsou překvapivé, protože se blíží *aritmetickému průměru mezi hodnotami z odpovídajících mužských a ženských ÚT*.

Pravděpodobnosti úmrtí z unisex ÚT: ČR 2003

(*Smetana a Cipra 2005*)



Populační projekce v rámci penzí:

- hrají při propočtech penzijních systémů klíčovou roli; lze je klasifikovat podle různých hledisek:
- ***podle předpovědního horizontu:***
 - ***krátkodobé*** (do 10 let);
 - ***střednědobé*** (10-25 let);
 - ***dlouhodobé*** (nad 25 let, tj. pro dobu aspoň jedné generace);
- ***podle použitých variant (scénářů) budoucího vývoje:***
 - ***nízká varianta*** (obvykle pesimistická nebo minimalistická);
 - ***střední varianta*** (obvykle průměrná nebo nejpravděpodobnější);
 - ***vysoká varianta*** (obvykle optimistická nebo maximalistická);

- *podle použité metody konstrukce:*
 - *formální extrapolace časových řad* (obvykle doplněná odhadem věkové struktury);
 - *složková metoda* (skládá projekci z dílčích projekcí několika komponent);
 - *složková metoda zohledňující budoucí migraci.*

- *v ČR existují dvě složkové populační projekce* umožňující dlouho-dobé projekce vybraných ukazatelů důchodového systému:

Populační projekce ČSÚ:

- oficiální populační projekce ČSÚ označovaná jako *Projekce obyvatelstva České republiky do roku 2050* (viz www.czso.cz).

Tab. Vybrané hodnoty z populační projekce ČSÚ

| <i>Věková</i> | <i>2005</i> | <i>2010</i> | <i>2020</i> | <i>2030</i> | <i>2040</i> | <i>2050</i> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| <i>0-14 let</i> | 1 501 331 | 1 400 028 | 1 408 644 | 1 274 155 | 1 197 00 | 1 173 00 |
| <i>15-64 let</i> | 7 293 357 | 7 286 202 | 6 786 952 | 6 520 205 | 5 964 56 | 5 309 25 |
| <i>65 a více</i> | 1 456 391 | 1 596 812 | 2 088 333 | 2 308 073 | 2 633 55 | 2 956 07 |
| <i>Počet</i> | 10 251 07 | 10 283 04 | 10 283 92 | 10 102 43 | 9 795 11 | 9 438 33 |
| <i>0-14 let</i> | 14,6 % | 13,6 % | 13,7 % | 12,6 % | 12,2 % | 12,4 % |
| <i>15-64 let</i> | 71,2 % | 70,9 % | 66,0 % | 64,5 % | 60,9 % | 56,3 % |
| <i>65 a více</i> | 14,2 % | 15,5 % | 20,3 % | 22,9 % | 26,9 % | 31,3 % |
| <i>I. závislosti</i> | 20,0 | 21,9 | 30,8 | 35,4 | 44,2 | 55,7 |
| <i>I. stáří</i> | 97,0 | 114,1 | 148,3 | 181,1 | 220,0 | 252,0 |
| <i>I. ekon.zatíž.</i> | 40,6 | 41,1 | 51,5 | 54,9 | 64,2 | 77,8 |

Populační projekce PŘF UK:

- projekce zkonstruovaná na katedře demografie PŘF UK označovaná jako *Kmenová prognóza populačního vývoje České republiky 2003-2065 (Burcin a Kučera (2004))*.

Tab. Vybrané hodnoty z populační projekce PŘF UK

| <i>Věková</i> | <i>2005</i> | <i>2010</i> | <i>2020</i> | <i>2040</i> | <i>2065</i> |
|-----------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| <i>0-14 let</i> | 1 501 331 | 1 473 660 | 1 546 687 | 1 373 459 | 1 334 25 |
| <i>15-64 let</i> | 7 293 357 | 6 509 642 | 6 096 372 | 5 396 314 | 4 912 63 |
| <i>65 a více</i> | 1 456 391 | 2 321 698 | 2 761 283 | 3 461 510 | 3 468 76 |
| <i>Počet</i> | 10 251 07 | 10 305 000 | 10 404 34 | 10 231 28 | 9 715 64 |
| <i>0-14 let</i> | 14,6 % | 14,3 % | 14,9 % | 13,4 % | 13,7 % |
| <i>15-64 let</i> | 71,2 % | 63,2 % | 58,6 % | 52,7 % | 50,6 % |
| <i>65 a více</i> | 14,2 % | 22,5 % | 26,5 % | 33,8 % | 35,7 % |
| <i>I. závislosti</i> | 20,0 | 35,7 | 45,3 | 64,1 | 70,6 |
| <i>I. stáří</i> | 97,0 | 157,5 | 178,5 | 252,0 | 260,0 |
| <i>I. ekon.zatíž.</i> | 40,6 | 58,3 | 70,7 | 89,6 | 97,8 |

6. AKTUÁRSKÉ PENZIJNÍ MODELY

6.1. Peněžní hodnota penzí

- *Střední počáteční hodnota jednotkové polhůtní roční penze s časovou strukturou úrokových měr:*

$$E(PV_x) = \frac{{}_1P_x}{1+r_1} + \frac{{}_2P_x}{(1+r_2)^2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{{}_jP_x}{(1+r_j)^j}$$

- *s růstovým faktorem g :*

$$E(PV_x) = \frac{{}_1P_x}{1+r_1} + \frac{{}_2P_x(1+g)}{(1+r_2)^2} + \frac{{}_3P_x(1+g)^2}{(1+r_3)^3} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{j-1} {}_jP_x}{(1+r_j)^j}$$

– s protiinflačním indexem π_j :

$$E(PV_x) = \frac{{}_1P_x(1 + \pi_1)}{1 + r_1} + \frac{{}_2P_x(1 + \pi_1)(1 + \pi_2)}{(1 + r_2)^2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j (1 + \pi_k) \frac{{}_jP_x}{(1 + r_j)^j}$$

– s G -letou garancí:

$$E(PV_x) = \sum_{j=1}^G \frac{1}{(1 + r_j^t)^j} + \sum_{j=G+1}^{\infty} \frac{{}_jP_x^t}{(1 + r_j^t)^j}$$

– **Anuitní sazba (annuity rate):**

$$Ann = Ann_x^t = \frac{\text{anuitní výplata}}{\text{jednorázové pojistné}} =$$

= anuitní výplata na jednorázové pojistné 100 000

Výběr kótovaných anuitních sazeb na anuitním trhu 2007 v UK
 (*Financial Service Authority: www.fsa.gov.uk*)

| | <i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65</i> | | | | | |
|------------------------|---|---------------------|------------|----------------|---------------------|------------|
| | <i>Muži 65</i> | | | <i>Ženy 65</i> | | |
| | <i>Fixní</i> | <i>g = 3 % p.a.</i> | <i>π</i> | <i>Fixní</i> | <i>g = 3 % p.a.</i> | <i>π</i> |
| <i>AEGON</i> | 616 | 451 | – | 576 | 409 | – |
| <i>AXA</i> | 557 | 403 | 358 | 518 | 362 | 317 |
| <i>Canada Life</i> | 615 | 454 | 395 | 578 | 416 | 358 |
| <i>Prudential</i> | 602 | 436 | 400 | 577 | 414 | 369 |
| <i>Reliance Mutual</i> | 590 | 420 | – | 559 | 388 | – |

| | <i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65 s <u>5letou garancí</u></i> | | | | | |
|------------------------|---|---------------------|------------|--|--|--|
| | <i>Muži 65</i> | | | | | |
| | <i>Fixní</i> | <i>g = 3 % p.a.</i> | <i>π</i> | | | |
| <i>AEGON</i> | 612 | 449 | – | | | |
| <i>AXA</i> | 555 | 402 | 357 | | | |
| <i>Canada Life</i> | 613 | 452 | 394 | | | |
| <i>Prudential</i> | 598 | 434 | 398 | | | |
| <i>Reliance Mutual</i> | 587 | 418 | – | | | |

| | <i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65 – <u>jen kuřáci</u></i> | | | | | |
|----------------------------|---|---------------------|------------|--|--|--|
| | <i>Muži 65</i> | | | | | |
| | <i>Fixní</i> | <i>g = 3 % p.a.</i> | <i>π</i> | | | |
| <i>Just Retirement Ltd</i> | 663 | 507 | 449 | | | |
| <i>Reliance Mutual</i> | 745 | 581 | – | | | |
| <i>Tomorrow</i> | 712 | 549 | 467 | | | |

– *Peněžní hodnota penze (money's worth):*

$$MW = \frac{PV}{\text{jednorázové pojistné}} = Ann_x \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j P_x}{(1+r)^j}$$

– *speciálně:*

$$MW_{65}^t = Ann_{65}^t \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j P_x^t}{(1+r_j^t)^j},$$

$$MW_{65}^t = Ann_{65}^t \cdot \left(\sum_{j=1}^G \frac{1}{(1+r_j^t)^j} + \sum_{j=G+1}^{\infty} \frac{j P_x^t}{(1+r_j^t)^j} \right) \text{ apod.}$$

– *typicky je $MW < 1$;*

– *ideální případ $MW = 1$ jen v případě perfektně konkurenčního trhu bez transakčních a administrativních poplatků.*

Odhad hodnoty MW na anuitním trhu v UK: muži 65

| | <i>Typ annuity</i> | E(MW) | <i>95% interval spolehlivosti</i> |
|------------------|-----------------------|--------------|-----------------------------------|
| <i>1957-1973</i> | bez garance | 1,034 | (0,996; 1,072) |
| <i>1972-1980</i> | 5-letá garance | 1,004 | (0,938; 1,070) |
| <i>1978-1991</i> | 5-letá garance | 0,978 | (0,955; 1,001) |
| <i>1990-1999</i> | 5-letá garance | 0,985 | (0,955; 1,015) |
| <i>1999-2002</i> | 5-letá garance | 0,938 | (0,891; 0,984) |
| <i>2001-2007</i> | bez garance | 0,928 | (0,847; 1,009) |

6.2. Modelování penzijních anuit

- pro analytické účely jsou vhodné modely ve spojitém čase;
- *střední počáteční hodnota jednotkové okamžitě vyplácené penze:*

$$\bar{a}_x = E\left(\int_0^{T_x} e^{-rt} dt\right) = \int_0^{\infty} e^{-rt} \cdot {}_t p_x dt$$

- (1) *exponenciální zákon úmrtnosti* ${}_t p_x = e^{-\lambda \cdot t}$ (λ je tzv. *okamžitá intenzita úmrtnosti*):

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-(r+\lambda) \cdot t} dt = \frac{1}{r + \lambda}$$

(2) **Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti:** $\lambda(x) = \lambda + \frac{1}{b}e^{(x-m)/b}$:

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \lambda(s) ds\right\} = \exp\left\{-\lambda \cdot t + b \cdot (\lambda(x) - \lambda) \cdot (1 - e^{t/b})\right\}$$

$$\bar{a}_x = \frac{b \cdot \Gamma\left(-(\lambda + r) \cdot b, e^{\frac{x-m}{b}}\right)}{\exp\left\{(m-x) \cdot (\lambda + r) - e^{\frac{x-m}{b}}\right\}}$$

kde neúplná gama funkce je $\Gamma(a, c) = \int_c^{\infty} e^{-t} \cdot t^{a-1} dt$.

6.3. DB modely versus DC modely

- ***DB model (defined benefit = dávkově definovaný):***
 - *např.* zaručí doživotní penzi ve výši 40 % platu před odchodem do důchodu;
 - *průběžně* (tj. nefondově PAYGO) nebo *fondově financovaný*;
 - *vyměřovací vzorec* pro výši dávky v závislosti na počtu odpracovaných let;
 - odpovídající *riziko* (investiční a dlouhověkosti) je na straně sponzora (organizátora) penzijního plánu:

$$DB - \text{dávka} = \alpha \cdot T \cdot \beta \cdot \int_0^T e^{-\beta \cdot (T-s)} \cdot w(s) \, ds = \alpha \cdot T \cdot \omega(T)$$

T *doba zaměstnání*

α *zásluhový penzijní faktor* (accrual factor)

$\omega(T)$ *vážený mzdový základ* (tj. vhodně vážená celoživotní mzda):

$$\omega(T) = \beta \cdot \int_0^T e^{\beta \cdot (T-s)} \cdot w(s) \, ds$$

β *váhový koeficient* pro vážený mzdový základ, např. pro

$w(s) = w \cdot e^{k \cdot s}$ (k je *platový růst*):

$$\omega(T) = \frac{\beta \cdot w}{\beta + k} \left(e^{k \cdot T} - e^{-\beta \cdot T} \right)$$

– čím je $\beta \leq 1$ bližší 1, tím je $\omega(T)$ bližší finálnímu platu $w(T)$

Náhradový poměr v DB modelu: $T = 30$ let; $k = 1$ %

| α | <i>Penze /Finální mzda</i> | | |
|-------------------|----------------------------|---------------|---------------|
| | $\beta = 0,1$ | $\beta = 0,2$ | $\beta = 1,0$ |
| $\alpha = 1,00$ % | 26,3 % | 28,5 % | 29,7 % |
| $\alpha = 1,25$ % | 32,8 % | 35,6 % | 37,1 % |
| $\alpha = 1,50$ % | 39,4 % | 42,7 % | 44,5 % |
| $\alpha = 1,75$ % | 46,0 % | 49,9 % | 52,0 % |
| $\alpha = 2,50$ % | 65,6 % | 71,3 % | 74,3 % |

- ***DC model (defined contribution = příspěvkově definovaný):***
 - *např.* jednorázově vyplatí částku nakumulovanou během aktivní účasti v penzijním plánu nebo za ni jednorázově zaplatí doživotní anuitu u komerční životní pojišťovny;
 - ***pravidelné spoření*** na důchodový účet účastníka;
 - odpovídající ***riziko*** straně účastníka penzijního plánu:

$$DC - dávká = \frac{\int_0^T c(s) \cdot e^{g(s) \cdot (T-s)} \cdot w(s) ds}{\bar{a}_x}$$

T *doba zaměstnání* (aktivního života) do důchodového věku x

$c(s)$ *příspěvková sazba* (contribution rate)

$g(s)$ *investiční růst* (investment growth *p.a.*)

$w(s)$ *výše platu*, např.

$$w(s) = w \cdot e^{k \cdot s}$$

k *platový růst* (wage growth *p.a.*)

Náhradový poměr v DC modelu: $T = 30$ let; $k = 1$ %; $r = 3,5$ %;
 $\lambda = 0$; $m = 86,34$; $b = 9,50$

| <i>c</i> | <i>Penze /Finální mzda</i> | | |
|-----------------|----------------------------|----------------|----------------|
| | <i>g = 3 %</i> | <i>g = 5 %</i> | <i>g = 7 %</i> |
| <i>c = 4 %</i> | 12,6 % | 17,8 % | 25,8 % |
| <i>c = 6 %</i> | 18,9 % | 26,7 % | 38,7 % |
| <i>c = 8 %</i> | 25,2 % | 35,6 % | 51,6 % |
| <i>c = 10 %</i> | 31,5 % | 44,5 % | 64,5 % |
| <i>c = 12 %</i> | 37,8 % | 53,4 % | 77,4 % |

6.4. Udržitelné penzijní výdaje

- Počáteční hodnota jednotkové penze od věku x je *náhodná veličina*:

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-rt} dt$$

T_x zbývající doba života ve věku x (např. exponenciální zákon úmrtnosti ${}_t p_x = e^{-\lambda \cdot t}$ s okamžitou intenzitou úmrtnosti λ)

e^{rt} geometrický Brownův pohyb $e^{\mu \cdot t + \sigma \cdot B_t}$ s driftem μ a volatilitou či difuzním koeficientem σ ($\{B_t\}$ je standardní Brownův pohyb)

- *Pravděpodobnost udržitelnosti penze* pro nakumulovaný kapitál W :

$$P(PV_x \leq W)$$

- **Pravděpodobnost neudržitelnosti penze** pro nakumulovaný kapitál W :

$$P(PV_x > W)$$

- Pravděpodobnost (ne)udržitelnosti penze lze vyšetřovat **simulačně**
- nebo někdy **analyticky** (např. pro exponenciální zákon úmrtnosti):

$$P(PV_x > W) = 1 - \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^W y^{-(a+1)} e^{-1/(y \cdot b)} dy,$$

kde $a = \frac{2\mu + 4\lambda}{\sigma^2 + \lambda} - 1$, $b = \frac{\sigma^2 + \lambda}{2}$ (tzv. **reciproční gama rozdělení**).

Pravděpodobnost neudržitelnosti penze pro vybrané důchodové věky x , mediánové věky $x + \text{Med}(T_x)$ a roční výběry nakumulovaného-penzijního kapitálu $W = 1\,000\,000$ Kč: $\mu = 7\%$; $\sigma = 20\%$

| x | $x + \text{Med}$ | λ | <i>Roční výběry nakumulovaného penzijního kapitálu $W = 1\,000\,000$ Kč:</i> | | | | | |
|-----|------------------|-----------|---|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| | | | <i>20 000 Kč</i> | <i>40 000 Kč</i> | <i>50 000 Kč</i> | <i>60 000 Kč</i> | <i>90 000 Kč</i> | <i>100 000 Kč</i> |
| 55 | 83,0 | 2,48 % | 4,3 % | 18,0 % | 26,7 % | 35,7 % | 60,2 % | 66,8 % |
| 65 | 83,9 | 3,67 % | 2,6 % | 12,3 % | 18,9 % | 26,2 % | 48,3 % | 54,9 % |
| 70 | 84,6 | 4,75 % | 1,8 % | 9,0 % | 14,2 % | 20,1 % | 39,5 % | 45,8 % |
| 75 | 85,7 | 6,48 % | 1,1 % | 5,7 % | 9,3 % | 13,6 % | 29,0 % | 34,4 % |
| 80 | 87,4 | 9,37 % | 0,5 % | 3,0 % | 5,1 % | 7,7 % | 18,0 % | 21,9 % |

Maximální možné roční výběry nakumulovaného penzijního kapitálu $W = 1\,000\,000$ Kč při toleranci 5 % pro vybrané důchodové věky x , mediánové věky $x + \text{Med}(T_x)$ a očekávané roční investiční výnosy μ ($\sigma = 20$ %)

| x | $x + \text{Med}$ | λ | <i>Očekávané roční investiční výnosy μ:</i> | | | | | |
|-----|------------------|-----------|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | | 3 % | 4 % | 5 % | 6 % | 7 % | 8 % |
| 55 | 83,0 | 2,48 % | 5 260 Kč | 8 590 Kč | 12 470 Kč | 16 800 Kč | 21 480 Kč | 26 470 Kč |
| 65 | 83,9 | 3,67 % | 9 230 Kč | 12 960 Kč | 17 100 Kč | 21 570 Kč | 26 330 Kč | 31 350 Kč |
| 70 | 84,6 | 4,75 % | 13 100 Kč | 17 070 Kč | 21 350 Kč | 25 920 Kč | 30 740 Kč | 35 760 Kč |
| 75 | 85,7 | 6,48 % | 19 580 Kč | 23 800 Kč | 28 250 Kč | 32 930 Kč | 37 790 Kč | 42 840 Kč |
| 80 | 87,4 | 9,37 % | 30 800 Kč | 35 250 Kč | 39 880 Kč | 44 660 Kč | 49 590 Kč | 54 650 Kč |