

JAK STUDENTI ROZUMĚJÍ ZÁKLADNÍM STATISTICKÝM POJMŮM

Milena Kvaszová

milena.sp@centrum.cz

Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, CZ-115 67 Praha 1

Při výuce statistiky předpokládáme, že studenti chápou základní statistické pojmy stejně jako my. Ale je tomu opravdu tak?

- ve svém výzkumu jsem se zaměřila na pojmy **průměrný, náhoda, vzorek** a **proměnlivost**
- průměrný označuje **nevýrazného, nezajímavého člověka**
- vzorek představuje malé množství výrobku, který dostaneme **zdarma na vyzkoušení**
- náhoda **neexistuje** a vždy lze najít **příčinu**
- náhodné události se dějí **zřídka** a nedá se do nich **zasahovat** a nijak je **ovlivnit**
- objevuje se snaha statistický údaj reprezentovat **objektem**
Průměrná velikost rodiny 2,5 představuje **dva dospělí a malé dítě.**

Možné příčiny

- začínáme výkladem **přesně definovaných pojmů** a **ucelené teorie**, tak jak byla během staletí přepracována a upřesňována
- vynecháváme **odbočky**, které se dnes jeví jako **slepé cesty**
- ve své době však vedly k **hlubšímu pochopení** zkoumaných jevů
- nebereme na vědomí, že matematická a pravděpodobnostní zkušenost **učitele** a **žáka** jsou zcela **odlišné**
- žáci dovedou jevy **pozorovat**, ale je pro ně obtížné **přesně** je popsat
- často se musí učit látku, na kterou ještě **nejsou zralí**
- nezbývá jim nic jiného, než se ji bez opravdového porozumění **naučit nazpaměť**, což vede ke vzniku **formálního poznání**
- žáci jsou sice schopni si předkládané pojmy **zapamatovat** a **naučit** se jejich **definice**, ale mají jenom mlhavou představu, co se za těmito pojmy skrývá a už vůbec si je nespojují se zkušenostmi **z běžného života**
- teorie pravděpodobnosti a statistické metody se stávají souhrnem **nezapamatovatelných vzorců**, které složí k řešení **podivných úloh**

- v běžném životě je nikdy **nepoužijí**, protože podle žáků s **reálnou situací** nemají nic společného
- pro pochopení nejistých jevů má člověk **zdravý rozum** a teorie pravděpodobnosti se na běžné životní situace nehodí, raději spoléhají „na štěstí“
- pravděpodobnost a statistika ze sféry pravděpodobnostního a statistického **myšlení** přesouvá do oblasti **učení**
- škola místo statistické a pravděpodobnostní **gramotnosti** rozvíjí nebo jen zatěžuje **paměť**
- v žádném případě by nebylo „ztrátou času“, pokud by si žáci důkladně „**pohráli**“ se statistickými soubory, které se **jich týkají** a jsou jim blízké (*výška postavy, počet sourozenců, barva očí,...*) před tím, než se začnou seznamovat se **statistickými pojmy**
- po matematické stránce se mnohému nenaučí, dojde však k propojení pojmů ze statistiky s jejich **životní zkušeností**
- některé ze statistických pojmů si tak sami **vytvoří** při zpracovávání souborů (*aritmetický průměr, medián, modus,...*)
- k ostatním si přiřadí konkrétní **představu**

Ve svém výzkumu jsem vycházela z modelu dětského psychologa Jeana Piageta (1896–1980), podle kterého je ve vývoji určité teorie možné rozlišit tři stádia, která pojmenoval **INTRA**, **INTER** a **TRANS**.

1 INTRAfigurální stádium

V tomto stádiu je žák schopen **sledovat jednotlivé jevy**, ale není ještě schopen správně chápat **souvislosti**. Piaget toto stádium uvádí na příkladu dětských kreseb, kdy dítě umí nakreslit dům, umí nakreslit i komín, ale neumí **komín správně umístit** na střechu.



- převládá **názorná** forma uvažování
- pojmy a vztahy mezi nimi se váží na **konkrétní představy** a jsou proto převážně **kvalitativního** charakteru
- žák není schopen vztah **upřesnit**, jasně například chápe, že čím je **více možností**, které mohou nastat, tím je **menší pravděpodobnost**, že jedna konkrétní nastane, ale nedovede tuto pravděpodobnost vyjádřit **číselně**.
- toto stádium upřednostňuje **přirozené pojmy**, se kterými má člověk bohaté zkušenosti z **běžného života**
- příkladem takových pojmů jsou:
 - nestane se nikdy*
 - možná se stane*
 - určitě se stane,...*
- pojmy se váží na **konkrétní obsah**, jejich hranice jsou **neostré**, což může mít za následek **interferenci** blízkých pojmů a jejich ovlivnění vlastním přáním
 - „Náš sportovní klub určitě vyhraje pohár!“*
 - „Možná přijdu.“*
 - „Babička nikdy nemůže hrát fotbal.“*

V pravděpodobnostních úlohách studenti dovedou odhadnout, který jev má **větší** pravděpodobnost, ale neumějí ji ještě **číselně** vyjádřit.

- toto důležité stádium se ve vyučování zpravidla **vynechává**
- výklad se začíná **vzorci** a počítáním příkladů
- k **porozumění** jevu pravděpodobnosti dochází až později, když je vypočteno dostatečné množství příkladů, ze kterých se alespoň některé týkají **reálných situací**

2 INTERfigurální stádium

Ve druhém – interfigurálním stádiu, již žák **rozumí souvislostem mezi jevy**. Na příkladu dětských kreseb Piaget toto stádium charakterizuje tím, že dítě už umí **správně posadit komín na střechu domu**, ale ještě neumí zachytit pohled někoho jiného, např. jak **by namaloval** „jeho dům“ **soused** sedící naproti.

- žák se ještě opírá o názorné představy, avšak samotný pojem nebo vztah má už **přesnou formální podobu**

- hlavní úlohu začínají hrát pojmy, které napomáhají **formalizaci** (*střední hodnota, rozptyl, hustota, distribuční funkce, ...*) a tyto pojmy postupně **vytlačují** pojmy **přirozeného jazyka**
- díky formálnímu jazyku pojmy dostávají ostré hranice, což umožňuje **rozlišit** sémanticky blízké pojmy (*např. střední hodnota – aritmetický průměr a prostřední hodnota – medián*)
- zrod nového typu vzájemných souvislostí, a to **kvantitativních vztahů – „vzorců“**
- vztahy mezi pojmy je možné vyjádřit v podobě **rovníc**

V pravděpodobnostní úloze žáci umějí vypočítat pravděpodobnosti **všech možných výsledků** úlohy, ale ještě nejsou schopni výsledek **zobecnit**.

Při vyučování je tomuto stádiu věnována **největší pozornost**, ale žáci bez předchozího pochopení jednotlivých pojmů v předešlém stádiu **nedovedou výsledky** řešených úloh správně **interpretovat**.

Nesmíme při tom zapomínat, že vztah mezi **modelem** a **realitou** je v teorii pravděpodobnosti mnohem **volnější**, než v jiných oblastech matematiky.

3 TRANSfigurální stádium

Ve třetím – transfigurálním stádiu žák již rozumí **transformacím** a **analogiím**. Dítě dokáže nakreslit dům s komínem z **různých pohledů**.

- upouští se od **názornosti** a do popředí se dostávají pojmy umožňující **jednotící pohled**
- z pojmů a vztahů zůstává už jenom nejobecnější, nejabstraktnější, čistě **formální stránka**
- pojmy ztrácejí svůj konkrétní názorný obsah a redukují se na **formální objekt**

Náhodnou veličinou X rozumíme reálnou funkci definovanou na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

- vztahy teorie začínají být vzájemně **propojené** pevnou **logickou stavbou**, založenou na několika **principech**
- tento přístup umožňuje **odhalit souvislosti** ležící hluboko pod povrchem jevů, a tedy nepřístupné předchozím dvěma stádiím

I v případě, že bude učitel postupovat podle výše popsaných etap, může dojít k **nedorozumění** mezi ním a jeho žáky. Jedním ze zdrojů nedorozumění je, že učitel již završil **3. transfigurální** stádium a zná přesné formální vymezení jednotlivých pojmů a odvození příslušných vztahů, myslí si, že něco skutečně znát znamená znát to **přesně**. Když poslouchá argumenty žáků, jasně vidí **nepřesnost** toho, co říkají, uvědomuje si, že to co slyší, jsou **polopravdy** beznadějně zamotané ve spleti naivních představ. Při odpovědích nebo diskuzích nutí žáky k **přesnému vyjadřování**.

- v průběhu **1. intrafigurálního** stádia však žák něčeho takového **není schopen**
- učitel tedy násilně žákům **vnucuje** přechod od 1. stádia ke 2. stádiu
- nedovolí jim, aby si na konkrétních příkladech kvalitativně „**ohmatali**“ pojmy a vztahy teorie
- nemůžeme se pak divit, že žákům chybí **porozumění** a na jeho místo nastupuje **formální technika**
- z pravděpodobnosti a statistiky se potom stává „**věda o dosazování do vzorců**“

Statistické myšlení žáků stagnuje a není překvapením, že **základní statistické pojmy** nejsou schopni vysvětlit ani studenti vysokých škol a dokonce ani odborníci, pro něž jsou tyto pojmy nedílnou součástí jejich profese, např. lékaři, soudci a novináři!

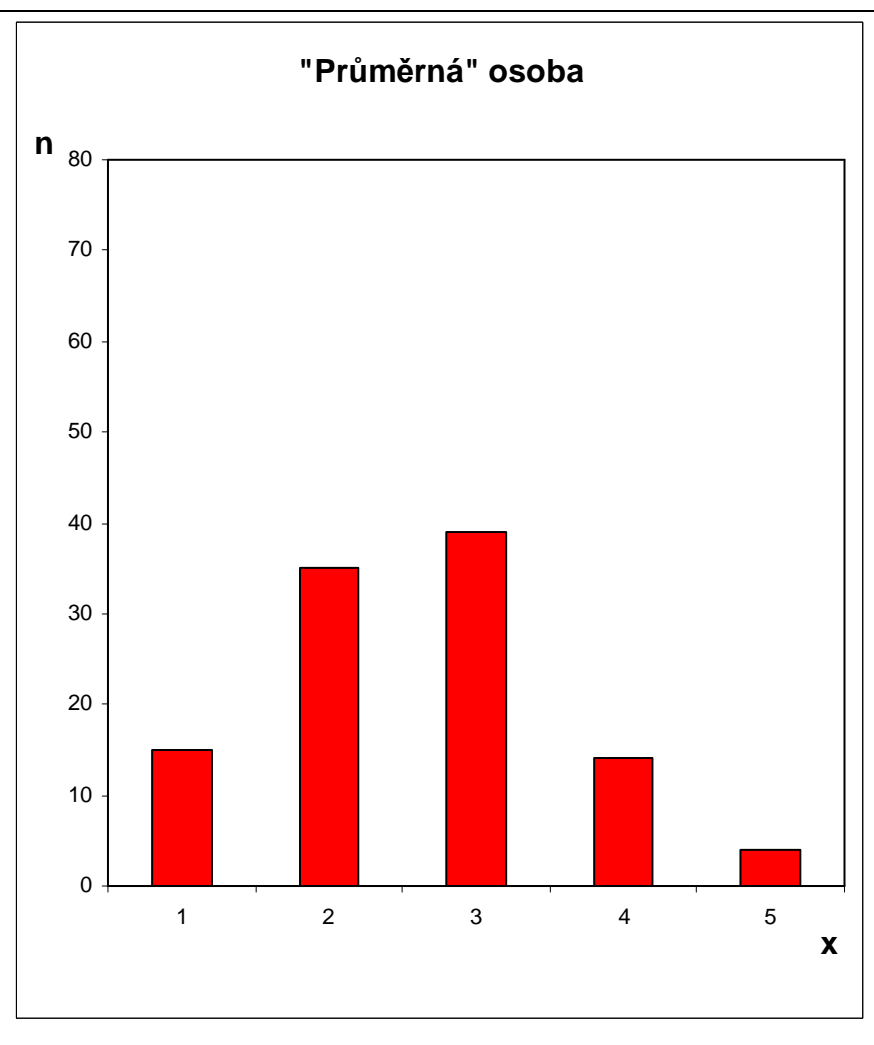
Výsledky výzkumu

Ve svém výzkumu, který jsem prováděla v roce 2007, jsem se zaměřila na základní statistické pojmy jako **průměrný, vzorek, náhoda, proměnlivost, aritmetický průměr**.

Na otázky pokládané formou dotazníku odpovídalo 107 studentů soukromé vysoké školy zaměřené na ekonomiku; věkové rozpětí skupiny bylo 19 – 50 let, převažovali studenti do 30 let. Odpovědi jsem vyhodnocovala s ohledem na Piagetův model poznání. Studenti, jejichž odpověď je na počátku škály jsou stále ještě v prvním stádiu INTRA. Studenti, jejichž odpovědi jsou uprostřed škály jsou již ve druhém stádiu porozumění, ve stádiu INTER a studenti, jejichž odpovědi jsou na konci škály již došli do třetího stádia TRANS.

1. otázka: Když někdo řekne, že jste "průměrný", co tím myslí?

Počet odp.	Charakteristika odpovědi <i>Příklad typické odpovědi</i>
15	1- negativní znevažující hodnocení <i>Že ničím nevynikám, není to příliš dobrá vizitka.</i>
35	2- charakterové vlastnosti již bez citového zabarvení <i>Ani dobrý, ani špatný, ani chytrý ani hloupý.</i>
39	3- jsem jako většina <i>Jsem stejný, jako většina ostatních, ničím nevybočuji z řady.</i>
14	4- jsem ve středu určité skupiny <i>Jsem ve středu lidí dle inteligence.</i>
4	5- hodnocení více znaků v rámci nějakého souboru <i>Že nevybočuji v rámci svého okolí, mám příjem fin. jako všichni ostatní - majetek minimální, spíše dluhy... Opravdu reflektuji společnost ve které žiji.</i>
107	Celkem



V první skupině odpovědí je průměrný chápán jako hanlivé označení (nezajímavý, nevýkonný, nudný, ...). Dochází zde k interferenci pojmu průměrný z běžného jazyka s jeho významem v matematické statistice. V další skupině studenti neuvažují, že průměrný může znamenat v něčem lepší a v něčem horší. Představují si průměrného člověka, který má všechny ukazatele průměrné (průměrně inteligentní, průměrně zámožný). Jen málo studentů si uvědomuje, že průměr se vztahuje k určité skupině.

Zajímavé odpovědi:

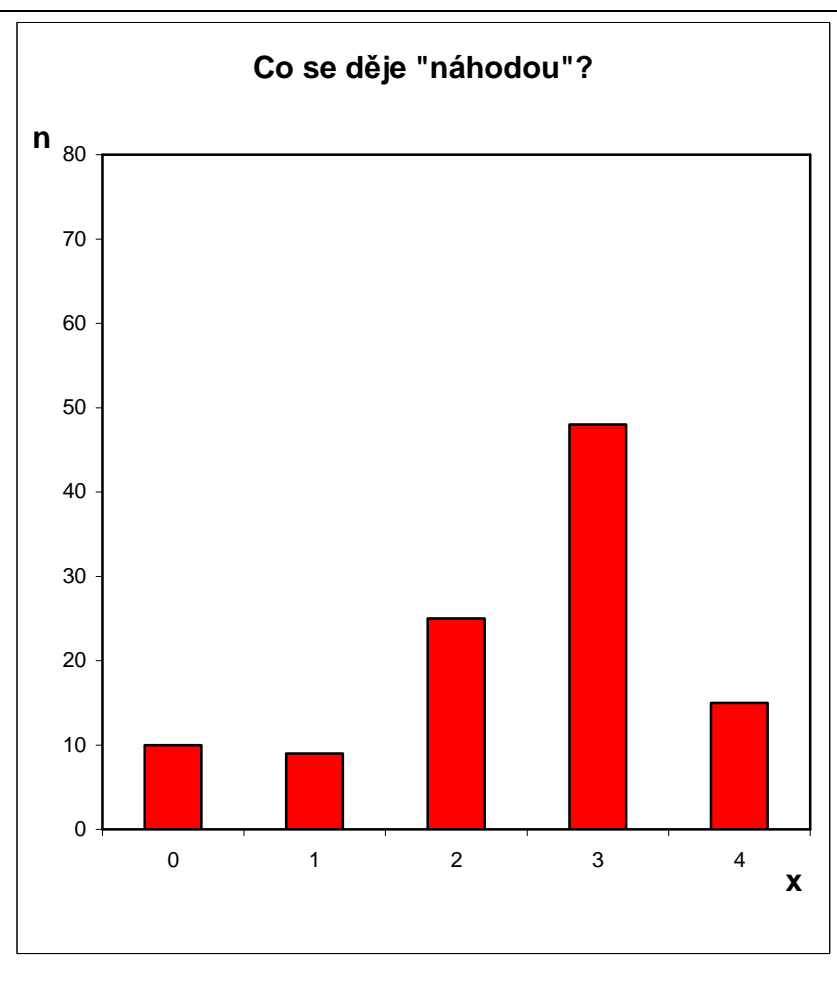
O mně to nikdo neřekne, ledaže by lhal. Obecně to není pejorativní vyjádření.

Odpověď ilustruje rozpor v chápání pojmu průměrný v běžném a matematickém jazyce. První věta vychází z významu slova průměrný v běžném jazyce; dovětek odkazuje na matematický význam slova průměrný.

Nevybočující z množiny osob, které jsou intelektuálně uprostřed společnosti.

2. otázka: Jaké události se dějí "náhodou"?

Počet odp.	Charakteristika odpovědi <i>Příklad typické odpovědi</i>
10	0- bez odpovědi
9	1- nic se neděje náhodou <i>Náhodou se neděje nic. Co se má stát se stane.</i>
25	2- výjimečné události <i>Náhodou se dějí nečekané věci, dějí se ojedinele, nejsou předpokládány.</i>
48	3- události, které nedokážeme předvídat <i>Ty, které nejsou nijak vypočitatelné, nebo ovlivnitelné lidským rozhodnutím.</i>
15	4- téměř všechno <i>Většina událostí v životě se děje náhodou.</i>
107	Celkem



Mnoho lidí má představu, že "nic se neděje náhodou", svět je deterministický, vše má příčinu. Věci, které se dějí náhodou jsou zcela výjimečné, nemůžeme do nich zasahovat a nijak je ovlivnit. Studenti si neuvědomují, že celý náš život je řetězec náhodných procesů a přestože jsou náhodné, můžeme jejich výsledek do značné míry ovlivnit. Řidič jedoucí po hlavní silnici se spoléhá, že má přednost a nemůže ho nikdo ohrozit. Nebere v úvahu, že je nenulová pravděpodobnost, že řidič jedoucí z vedlejší silnice nezastaví (přehlédne značení, selžou mu brzdy, zkolabuje,...).

Další skupina studentů si myslí, že náhodné jsou ty události, které nedokážeme předvídat. To je v souladu se subjektivní interpretací pravděpodobnosti.

Zajímavé odpovědi:

Náhoda neexistuje - je to něco, co se děje, ale můžu a nemusím u toho být.

Typicky deterministický přístup.

Ty, které nebyly plánované - duha, bouře; jsou to události za hranicí pravděpodobnosti.

Náhodné jsou jenom výjimečné jevy. Ty jsou pak tak nepravděpodobné, že jsou za hranicí pravděpodobnosti. Běžné jevy se jako náhodné nevnímají. Když házím 10 krát mincí a padne 5 krát panna, je to výsledek, který „není náhodný“. Ale když padne 10 krát panna, tak to je tedy „náhoda“! Studenti pojem náhodný chápou jako nepravděpodobný.

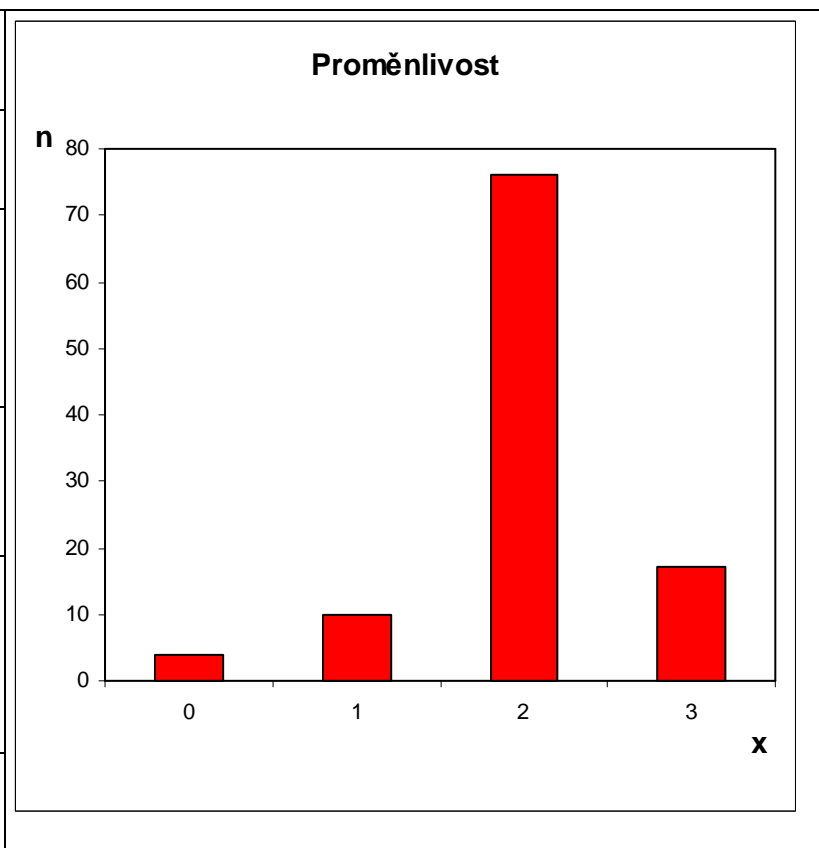
Co se nám nelíbí a proto říkáme, že náhodou a co se nám líbí a nezasloužili jsme si to.

Náhoda se bere jako vybočení z řádu. Tato představa je velice rozšířená, protože upevňuje společenský řád. Poruším-li řád a následuje trest, je to v pořádku. Když mě nepotrestají, jde o šťastnou náhodu. Jevy, které se dějí v souladu s řádem, lidé nevnímají jako nahodilé.

***Čím více lidí ovlivňuje událost, tím větší náhoda.
Intuice, která je v rozporu se zákonem velkých čísel.***

3. otázka: Co znamená "proměnlivost"?

Počet odp.	Charakteristika odpovědi <i>Příklad typické odpovědi</i>
4	0- bez odpovědi
10	1- počasí - časová změna, která je neovlivnitelná <i>Střídání; například počasí, to se mění každou chvíli.</i>
76	2- nestálost (časová změna) <i>Nestálost v rámci časového úseku nebo vlivem jiných veličin.</i>
17	3- různorodost - proměnlivost znaku v souboru <i>Proměnlivost je variabilita výsledků sledovaného jevu.</i>
107	Celkem



Proměnlivost studenti nejčastěji vnímají jako časovou, často spojenou s počasím. Tento pohled je zúžený, oproti významu proměnlivosti v matematické statistice, kde se tímto termínem označuje variabilita libovolného jevu, nikoliv jen časové řady. Zúžené chápání tohoto pojmu brání studentům ve správném pochopení významu dat. Proto by vyučování matematické statistice mělo věnovat zvýšenou pozornost uvolňování vžitě představy proměnlivosti pouze jako časové změny.

Zajímavé odpovědi:

Může to být třeba změna z něčeho na něco jiného; chvíli je hezky a potom prší; cítil se šťastně, jindy nešťastně.

V odpovědích se často vyskytuje změna počasí a nálady.

Široký pojem, tzv. kam vítr, tam plášt'.

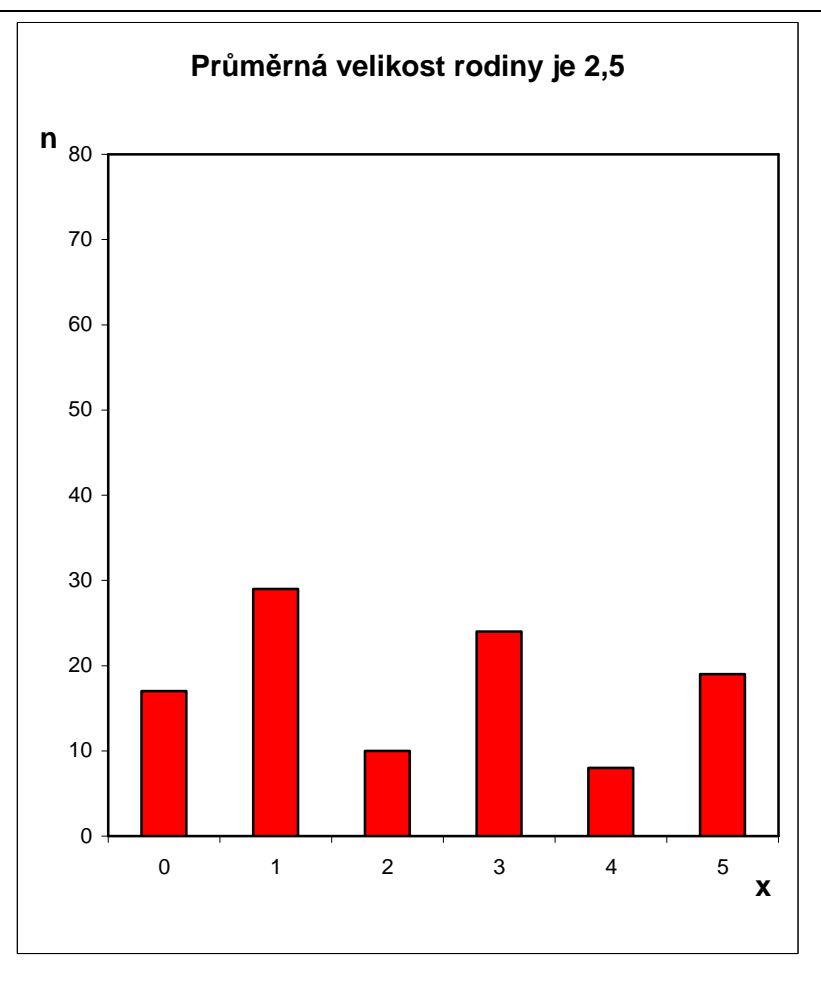
Z odpovědi vyplývá, že proměnlivost je negativní vlastnost.

Když se střídá jedna událost s druhou.

Proměnlivost je vázána na časovou posloupnost.

4. otázka: Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?

Počet odp.	Charakteristika odpovědi <i>Příklad typické odpovědi</i>
17	0- bez odpovědi
29	1- student hledá rodinu, jejíž velikost je 2,5 <i>Velikost dospělého se rovná jedné jednotce a velikost dítěte za polovinu.</i>
10	2- počet členů je mezi 2 a 3 <i>Je to přesně mezi 2 a 3 členy.</i>
24	3- 2 a 3 členy <i>Pravidelně se střídá 2- členná rodina a 3 -členná rodina = průměrná velikost je 2,5.</i>
8	4- nejčastěji 2 a 3 členy <i>Že existuje většina rodin, které mají 1 dítě, nebo nemají žádné.</i>
19	5- počet všech členů/počet rodin <i>Počet členů všech rodin / počet rodin = 2,5</i>
107	Celkem



Zajímavé odpovědi:

Každá rodina má 2 dospělé a 0,5 dítěte.

Průměr student chápe jako typického reprezentanta, pro průměrnou rodinu proto hledá konkrétní podobu, kterou následně zobecní na celou populaci.

Že každá rodina se skládá v průměru z 2,5 lidí, což je v realitě nesmysl. Je to průměr.

Student si již uvědomuje nesmyslnost rodiny o velikosti 2,5, ale ještě nenachází správnou interpretaci.

Shrnutí

- problémy, které brání **porozumění** pravděpodobnosti a statistiky u žáků, často pramení z toho, že pojmy a poznatky z úrovně INTER a TRANS se žákům prezentují bez toho, aby se jim umožnilo projít prvním stádiem, tj. INTRA
- učitel, ve snaze **probrat co nejvíce látky** (místo toho, aby počkal, až pojmy přirozeně dozrají), často **přenáší** pojmy z vyšší hladiny i do **základního** výkladu

- složité pojmy přiměřeně **zjednoduší**, abstraktní **ilustruje** na několika příkladech a myslí si, že svou úlohu splnil, že učivo studentům **přiblížil** a oni látku přijmou; většinou to tak, ale **není**
- studenti se naučí s pojmy formálně pracovat, ale **nepřijmou** je za svoje
- zdají se jim **nepřirozené a cizí**, je samotné by nikdy **nenapadlo** takové pojmy zavádět
- vzorce „**spadlé z nebe**“ podřývají víru žáků, že tomu, co se dělá na hodině matematiky, je možné **porozumět**
- postupně vzniká jakési „**mystické**“ **ovzduší**, které zatemňuje zdravý rozum
- žák si přestane klást otázky typu „**proč je v tom vzorci $1/(n-1)$?**“ a stále častěji se spokojí s odpovědí „**proto, že to tak bylo na tabuli**“
- v pozdější době může roli učitele převzít **učebnice** nebo neosobní autorita **vědy: Vědci z kalifornské univerzity zjistili, že...**

Není důležité, co je touto „**poslední instancí**“, podstatné je, že jí není **vlastní rozum**, **osobní přesvědčení** získané na základě argumentů.

Přitom pravděpodobnostní a statistické myšlení bude od žáků požadováno **celý život**. Je třeba učit žáky pravděpodobnostnímu a statistickému myšlení už **v raném věku**. Nejde pouze o jejich profesní život, ale především o jejich **soukromé životy**. Jeho výuka by proto měla být průběžnou snahou všech učitelů, nejen matematiky, **od první třídy**.

Měli by se zaměřit na úlohy z **běžného života**, nikoliv jenom na mince a kostky, a respektovat, že se děti s náhodou a rizikem setkávají již v **předškolním věku** – v rodině, v dětském kolektivu a i při hrách. Z těchto zkušeností se u dětí vyvíjí intuitivní **chápání nejistoty** některých dějů, **jistoty** či naopak **nemožnosti** dějů jiných. Rozvoj tohoto intuitivního myšlení je třeba včas správným způsobem ovlivňovat výkladem, ukazujícím žákům, že se s pravděpodobností a statistikou setkávají v **každodenním životě**, při dopravě, navazování známostí, utváření vztahů mezi lidmi atd. Už to, že se narodili takoví, jací jsou, je **náhoda**.

Děkuji za pozornost

Reference

- [1] Akker A. (2004) *Design research in statistics education: on symbolizing and computer tools*. Thesis. Center for Science and Math. Education, Utrecht Univ., Freudenthal Inst.
- [2] Kvasz, L. (1997) Why don't they understand us? *Science and Education*, Vol. 6, 263-272.
- [3] Kvasz, L. (2008) *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag AG, Basel.
- [4] Piaget J., Garcia R. (1989) *Psychogenesis and the History of Science*. Columbia University Press, New York.
- [5] Plocki, A. (2001) *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*. Univerzita J. Purkyně, Ústí nad Labem.
- [6] Saxl, I. (2005) Statistické myšlení a jeho výuka. Pravděpodobnost a statistika na střední škole. *Sborník prací didaktického semináře pořádaného MFF UK v Praze*. Matfyzpress, Praha. s. 1-16.
- [7] Watson J. M., Kelly B. A. (2003) *The Vocabulary of Statistical Literacy*. AARE 2003 Conference Papers: Internat. Education Res. Conf. Auckland, New Zealand, EJ.