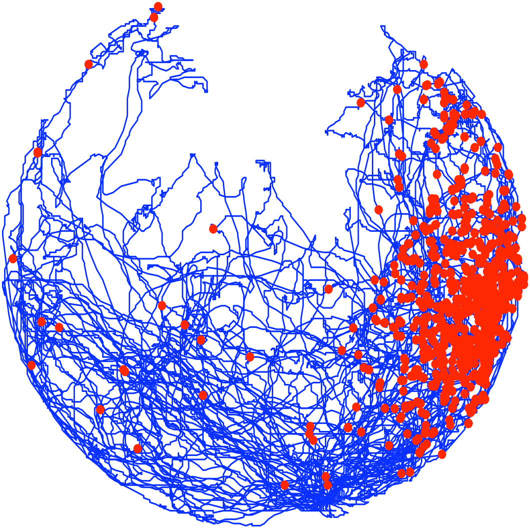
Difúze v omezené oblasti s odrážející nebo pohlcující bariérou

Jakub Staněk (spoluautor: Josef Štěpán)

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby / Ústav technické matematiky
Fakulta strojní
ČVUT v Praze

2.2.2010



Mějme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ a n-dimenzionální stochastickou diferenciální rovnici

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \tag{1}$$

Označme

$$K := \{x : f(x) \leq c\}, \quad K^e := \{x : f(x) \geq c\}$$

a

$$S := \partial K = \{x : f(x) = c\},$$

kde $c \in \mathbb{R}$.

Označme $Z_t = f(X_t)$, pak $X_t \in K \Leftrightarrow Z_t \le c$. Dle Itôovy formule dostaneme

$$df(X_t) = Lf(X_t)dt + dM_t,$$

kde

$$Lf(x) = \mathrm{grad} f(x)^T \cdot b(x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(f''(x) \cdot a(x)),$$

$$dM_t = \mathrm{grad} f(X_t)^T \cdot \sigma(X_t) dB_t,$$

$$a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$$

a

$$f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), 1 \le i, j \le n \right).$$

Lemma 1 *Nechť existuje otevřené okolí G hranice S takové, že pro všechna $x \in G \setminus K^e$ platí*

$$\mathrm{grad} f(x)^T \cdot a(x) \cdot \mathrm{grad} f(x) = 0 \tag{2}$$

a

$$Lf(x) \leq 0. \tag{3}$$

Pak $X \in K$ s.j. pro libovolné řešení X rovnice (1) s počáteční podmínkou $X_0 = x_0 \in K$.

Rovnici (1) nazýváme **hraniční rovnicí** pro S, pokud existuje okolí $G \supset S$ takové, že platí

$$Lf(x) = 0$$

a

$$\mathrm{grad} f(x)^T \cdot \sigma(x) = 0$$

pro všechna $x \in G$.

Poznámka 1 *Každé řešení hraniční rovnice X s počáteční podmínkou $X_0 = x_0 \in S$ zůstane v S s.j.*

Nechť $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in S$ a definujme

$$b(x) = \frac{1}{2} \operatorname{div} n(x) \cdot n(x), \quad \sigma(x) = I_n - n(x) \cdot n(x)^T,$$

kde

$$n(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}, \quad \operatorname{div} n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial n_i}{x_i}(x).$$

Pak rovnice (1) s těmito koeficienty b a σ je hraniční rovnice.

Lemma 2 *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřené okolí hranice S, $S \subset G$ a $f''(x) \neq 0$ na G. Pokud $x_0 \in S$, pak rozdělení řešení hraniční rovnice X je jednoznačně určeno volbou trendového koeficientu b.*

Lemma 3 *Nechť X je řešením rovnice (1) a nechť existuje otevřené okolí $G \supset S$ hranice S takové, že platí*

$$\mathrm{grad} f(x)^T \cdot a(x) \cdot \mathrm{grad} f(x) = 0$$

a

$$Lf(x) \leq 0$$

pro všechna $x \in G \cap K^e$. Navíc předpokládejme, že $Lf(x) < 0$ pro všechna $x \in S$. Pak S je reflexní hranice, což znamená, že vně P-nulové množiny N neexistuje dvojice časů $0 \leq u < v < \infty$ takových, že $X_s \in S$ pro všechna $s \in (u, v)$.

Lemma 4 *Nechť rovnice (1) má jednoznačné slabé řešení $(X^x, x \in \mathbb{R}^n)$ a lokálně Lipschitzovské koeficienty b a σ. Předpokládáme dále, že existuje hraniční rovnice*

$$dX_t = b^*(X_t)dt + \sigma^*(X_t)dB_t,$$

která má slabé řešení pro libovolnou počáteční podmínku $x \in S$, a navíc platí, že

$$b^*(x) = b(x), \quad \sigma^*(x) = \sigma(x) \quad x \in S.$$

Pak hranice S je absorpční hranicí pro libovolné řešení X^x rovnice (1).

Konstrukce difúze v K:

- Najdeme rovnici

$$dX_t = b^*(X_t)dt + \sigma^*(X_t)dB_t \tag{4}$$

splňující, že řešení této rovnice neopustí oblast K.

- Zvolme $\epsilon > 0$, označme $K^\epsilon := \{x \in K : |x - y| \geq \epsilon, \forall y \in S\}$ a definujme

$$\begin{aligned} \hat{b}(x) &= b(x) & x &\in K^\epsilon \\ &= b^*(x) & x &\in G \setminus K \\ &= d(x) \cdot b(x) + (1 - d(x)) \cdot b^*(x) & x &\in K \setminus K^\epsilon, \end{aligned}$$

kde $d(x) = \frac{1}{\epsilon} \inf_{y \in S} |x - y|$.

Mějme rovnici (1)

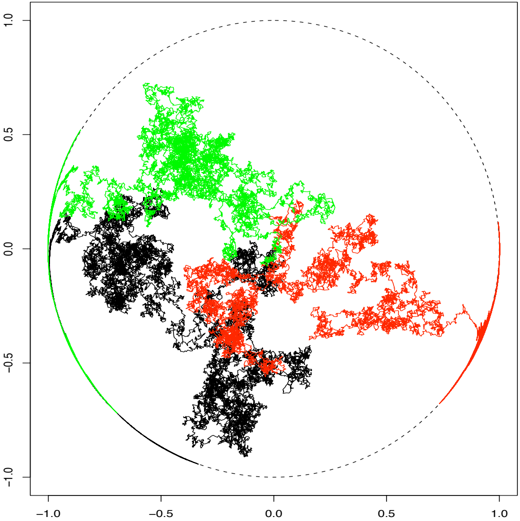
$$dX_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dB_t,$$

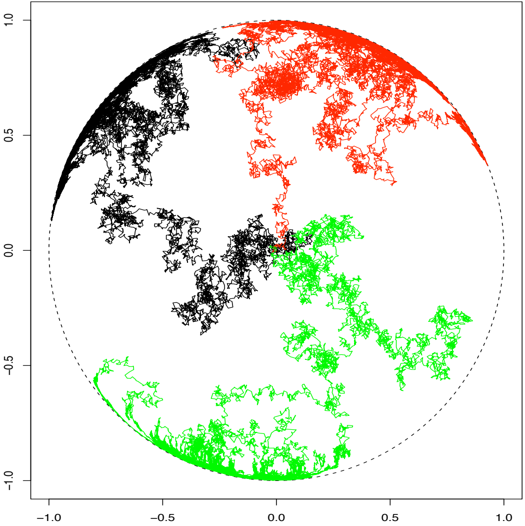
funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ a $c = 1$.

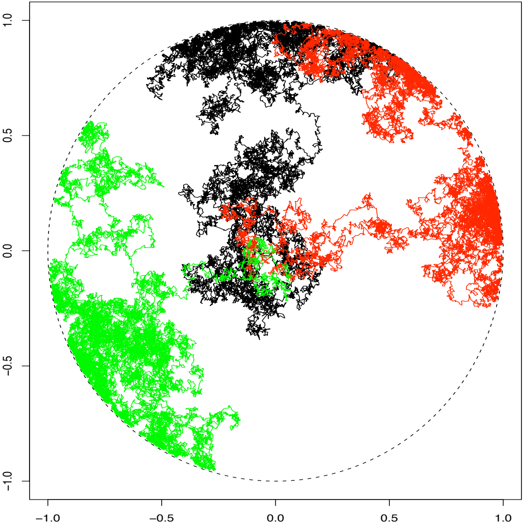
Zvolme $\epsilon = 0.1$ a definujme

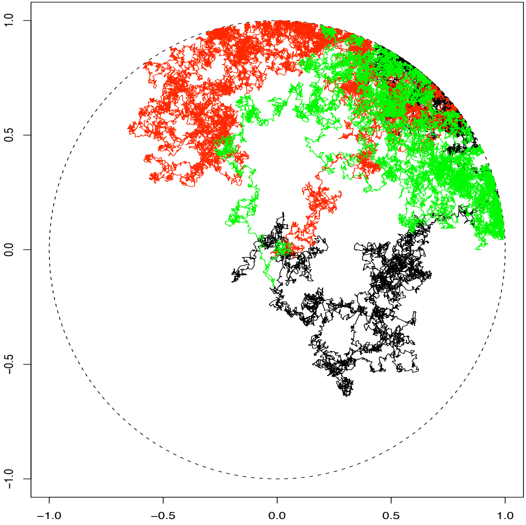
$$\begin{aligned}
\hat{b}(x) &= (0,0)^T, && |x| \leq 1-\epsilon \\
&= \frac{|x|-0.9}{0.1} \cdot \frac{1}{2}(-x_1,-x_2)^T, && 1-\epsilon < |x| < 1 \\
&= \frac{1}{2}(-x_1,-x_2)^T, && |x| \geq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && |x| \leq 1-\epsilon \\
&= \frac{|x|-0.9}{0.1}\begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-|x|}{0.1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && 1-\epsilon < |x| < 1 \\
&= \begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}, && |x| \geq 1.
\end{aligned}$$


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

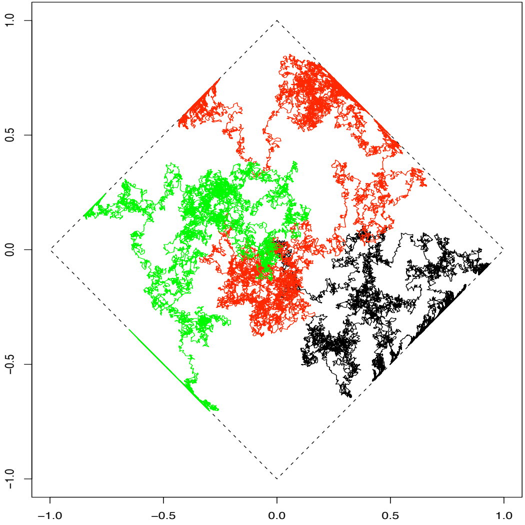

1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Předpokládejme opět rovnici (1) ve tvaru

$$dX_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dB_t,$$

$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$ a $c = 1$.


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Děkuji za pozornost.