

Odhady a testy pro parametry lineárně unášeného Wienerova procesu

Daniel Hlubinka a Andrea Kvitkovičová

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

30 let ROBUSTů
Králíky, 2010

- Buď W standardní jednorozměrný Wienerův proces, tedy
 - 1 W je proces s nezávislými přírůsky,
 - 2 $W_0 = 0$ a rozdělení $W_t - W_s$ je normální $\mathcal{N}(0, |t - s|$,
 - 3 trajektorie W jsou spojité.
- Uvažujme proces

$$Y_t = bW_t + at, \quad t \geq 0,$$

kde $a \geq 0$ a $b > 0$ jsou neznámé parametry.

- Ukážeme si dva přístupy a ty v rámci možností porovnáme
 - 1 **Přímo:** Proces Y je pozorován v **deterministických časech** $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$. Hodnoty procesu jsou neznámé.
 - 2 **Nepřímo:** Proces Y je pozorován v okamžicích, kdy překračuje úroveň $0 < L_1 < L_2 < \dots < L_n < \infty$. Hodnoty procesu známe, náhodné jsou okamžiky pozorování.

- Náhodné veličiny $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ mají sdružené normální rozdělení, ale nejsou nezávislé.
- Označme $X_i = Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}$, kde $t_0 = 0$ a tedy $Y_0 = 0$.
- Náhodné veličiny X_1, \dots, X_n jsou nezávislé a normálně rozdělené $\mathcal{N}(a(t_i - t_{i-1}), b^2(t_i - t_{i-1}))$.
- Proto náhodné veličiny

$$U_i = \frac{X_i - a(t_i - t_{i-1})}{b\sqrt{t_i - t_{i-1}}}$$

jsou iid $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Zde není žádný (velký) problém.

- Označme $0 < Z_1 < Z_2 < \dots < Z_n$ časy dosažení příslušných úrovní $0 < L_1 < L_2 < \dots < L_n$ procesem Y .
- Veličiny Z_i mají inverzní gaussovské rozdělení s parametry L_i, a, b , jehož hustotou je

$$f_{L_i, a, b}(z) = \frac{L_i}{b\sqrt{2\pi}} z^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{(L_i - az)^2}{2zb^2} \right\}.$$

Speciálně pro $a \neq 0$ máme člen obsahující jak z , tak i z^{-1} v exponentu.

- Veličiny Z_i nejsou nezávislé.
- Označme $T_i = Z_i - Z_{i-1}$, kde $Z_0 = 0$ a $A_i = L_i - L_{i-1}$, kde $L_0 = 0$.
- Veličiny T_i jsou nezávislé a mají inverzní gaussovské rozdělení s parametry A_i, a, b

- Funkce a procesy obecně nejsou pozorovány ve své úplnosti, ale jen v diskrétní podobě.
- Většinou je možné pozorovat Wienerův proces v předem daných časech (a často).
- Jsou případy, kdy je možné pouze zaznamenat, že sledovaný proces *prošel nějakou bariérou*, čili přímé pozorování není možné.
- Zajímá nás, zda v nějakém smyslu není nepřímé pozorování lepší pro analýzu trendu a .

- V obou případech jde o odhad maximálně věrohodný a v obou případech vychází stejný princip: **Stav procesu dělený časem.**
- Připomeňme, že máme buď pozorování X_i přírůstků procesu Y mezi časy t_{i-1} a t_i , nebo pozorování T_i časů mezi přechodem úrovně L_{i-1} a přechodem úrovně L_i procesem Y .
- Označme pro jednoduchost

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = Y_{t_n}, \quad t = t_n$$

a

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \tau_A(Y), \quad A = \sum_{i=1}^n A_i = L_n.$$

- Pak

$$\widehat{a}_P = \frac{X}{t}, \quad \widehat{a}_N = \frac{A}{T}.$$

V prvním případě tedy máme v čitateli gaussovsky rozdělenou náhodnou veličinu, ve druhém dostaneme ve jmenovateli inverzně gaussovskou náhodnou veličinu.

- Zřejmě \widehat{a}_P má normální rozdělení $\mathcal{N}(a, b^2/t)$. Jde tedy o **nestranný konzistentní odhad** (při $t \rightarrow \infty$).
- Odhad \widehat{a}_N má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \sqrt{\frac{A}{2\pi b^2}} x^{-1/2} \exp\left\{-\frac{A(a-x)^2}{2xb^2}\right\}.$$

- Není nestranný: $E\widehat{a}_N = a + b^2/A$
- Jeho rozptyl závisí na skutečné hodnotě a :
$$\text{var}\widehat{a}_N = \frac{b^2}{A}(a + 2b^2/A)$$
- To je dáno tím, že při **velkém trendu a** dosáhneme úrovně **A dříve**, čili **čas dosažení T** (jmenovatel odhadu) je malý.
- K úpravě na nestranný odhad potřebujeme nestranný odhad b^2 .
- Jde o **asymptoticky nestranný konzistentní odhad** (při $A \rightarrow \infty$).

- V případě přímého pozorování lze odvodit **maximálně věrohodný odhad** ve tvaru

$$\widehat{b}_P^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - (t_i - t_{i-1})X/t}{t_i - t_{i-1}}$$

- Tento odhad není nestranný: $E\widehat{b}_P^2 = b^2(n-1)/n$
- Nestranný odhad vyrobíme snadno.
- Platí

$$n \frac{\widehat{b}_P^2}{b^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Odtud snadno odvodíme $\text{var}\widehat{b}_P^2 = 2(n-1)b^4/n^2$.

- V případě nepřímého pozorování lze odvodit **maximálně věrohodný odhad** ve tvaru

$$\widehat{b_N^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \left(\frac{A_i}{T_i} - \frac{A}{T} \right)$$

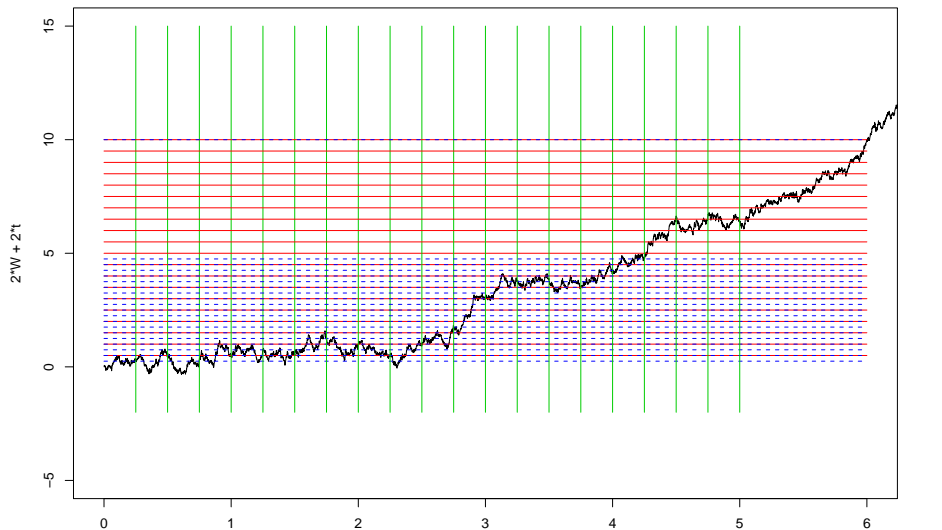
- Tento odhad není nestranný: $E\widehat{b_N^2} = b^2(n-1)/n$
- Nestranný odhad vyrobíme snadno.
- Platí

$$n \frac{\widehat{b_N^2}}{b^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Odtud snadno odvodíme $\text{var}\widehat{b_N^2} = 2(n-1)b^4/n^2$.

- Při pozorování oběma způsoby dostáváme stejné rozdělení, χ_{n-1}^2 .
- Rozptyl obou odhadů závisí jen na n a na b .
- Nezávisí na tom, v jakých bodech pozorujeme, stačí pozorovat **libovolně krátkou dobu**, nebo **libovolně blízko nuly**, ale musíme mít co **nejvíce pozorování**.
- Neznámý parametr a kvalitu odhadu v tomto směru **neovlivňuje**.
- V čem se tedy liší odhady \widehat{b}_P^2 a \widehat{b}_N^2 ?
 - 1 Předepíšeme-li $t > 0$, pak \widehat{b}_P^2 známe v čase t (+ doba nutná ke spočítání).
 - 2 Předepíšeme-li $A > 0$, pak \widehat{b}_N^2 známe v náhodném čase T_A , přičemž $ET_A = A/a$, je-li $a > 0$ a $ET_A = \infty$, je-li $a = 0$.

Odhad a test parametru b



- Vzhledem k tomu, že se jedná o testy založené na použití χ^2 rozdělení, vyjde v obou případech stejný tvar testu. Testovou statistikou je $\widehat{nb^2}/b^2$ a kritické hodnoty stanovíme pomocí teorie stejnoměrně nejlepších (nestranných) testů, nebo zvolíme obvyklé kvantily $\chi_{n-1}^2(\alpha/2)$, $\chi_{n-1}^2(1 - \alpha/2)$.
- Každá volba A_i , t_i vede k různým výsledkům. Uveďme k předchozímu obrázku nestranné odhady b^2 a testové statistiky pro test hypotézy $H_0: b^2 = 2$ (kritické hodnoty jsou 8,907 a 32,852):
 - 1 $\widehat{b_P^2} = 1,364$ a testová statistika 12,954.
 - 2 $\widehat{b_N^2} = 2,679$ a testová statistika 25,447.
 - 3 $\widehat{b_N^2} = 2,131$ a testová statistika 20,248

- Připomeňme, že $\widehat{a}_N = A/T$ je konzistentním a asymptoticky nestranným odhadem a .
- Nestranným odhadem je $\widetilde{a}_N = \widehat{a}_N - nb_N^2/((n-1)A)$
- Rozptyl nestranného odhadu je

$$\text{var}\widetilde{a}_N = \frac{b^2}{A} \left(a + 2 \frac{n}{n-1} \frac{b^2}{A} \right) = b^2 \frac{a}{A} + 2b^4 \frac{n}{n-1} \frac{1}{A^2}.$$

- Srovnáme toto s rozptylem $\text{var}\widehat{a}_P = b^2/t$ a uvědomme si, že $ET = A/a$.
- Odtud plyne, že k tomu, aby rozptyl \widetilde{a}_N byl stejný jako rozptyl \widehat{a}_P je třeba, aby

$$\frac{b^2}{t} = \frac{b^2}{ET} + \frac{2nb^4}{(n-1)(ET)^2 a^2},$$

neboli $ET = (t + \sqrt{t^2 + 4kt})/2$, kde $k = 2nb^2/((n-1)a^2)$.

- Podívejme se na testy založené na **pozorování časů přechodu** sledovaných úrovní—*nepřímé pozorování*.
- Testy se **známým parametrem b** plynou poměrně rychle z vlastností inverzního gaussovského rozdělení **bez rušivého parametru**.
- Testy s **neznámým parametrem b** vyžadují dost práce.
- Kritické hodnoty v případě testu s rušivým parametrem b jsou náhodné veličiny. Proto použijeme k porovnání testů hlavně simulace.

- Buď $a_0 \geq 0$. Testujme na hladině α hypotézu $H_0: a \leq a_0$ proti alternativě $A: a > a_0$.
- Snadno ověříme, že při pozorování X je testovou statistikou a kritickým oborem

$$\frac{X - a_0 t}{b\sqrt{t}} \sim N(0, 1), \quad X > a_0 t + u_{1-\alpha} b\sqrt{t}$$

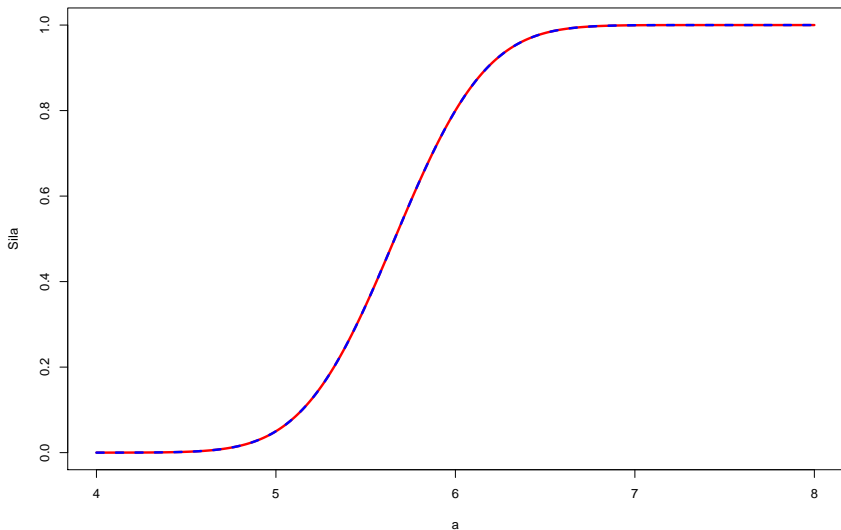
- V případě pozorování času T překročení úrovně A je kritický obor tvaru $T < C$, kde C splňuje vztah

$$\alpha = \exp\left\{\frac{2a_0 A}{b^2}\right\} \Phi\left(\frac{-A - a_0 C}{b\sqrt{C}}\right) + \Phi\left(\frac{-A + a_0 C}{b\sqrt{C}}\right).$$

- Pro $a_0 = 0$ dostáváme jednodušší vyjádření a C lze přímo spočítat.

- Podívejme se na oba testy o parametru a s podmínkami:
 - 1 mají stejnou hladinu α
 - 2 jejich síla v bodě a_1 je β
- Prověříme průběh silofunkce v obou případech.
- Srovnáme potřebnou dobu t a střední dobu ET potřebnou k dosažení úrovně A v závislosti na a .
- V případě testu založeného na pozorování X/t nemůže skončit experiment před dobou t .
- Je-li test založen na pozorování času T , pak je ukončen v čase $\min\{T, C\}$, přičemž zřejmě $ET = A/a$ závisí na skutečné hodnotě a .

A=35.1354; C=6.1904; t=6.1826



a0=5; alfa=0.05; sila 0.8 v bode 6

- Předchozí obrázek ukazuje, že máme-li silofunkci ukotvenu ve dvou bodech, tak se shoduje celá.
- Silofunkce jsou:
 - 1 Pro test založený na pozorování X/t

$$\beta(a) = \Phi \left(u_\alpha + \frac{(a - a_0)\sqrt{t}}{b} \right),$$

kde t je funkcí $a_1 - a_0$, α a β .

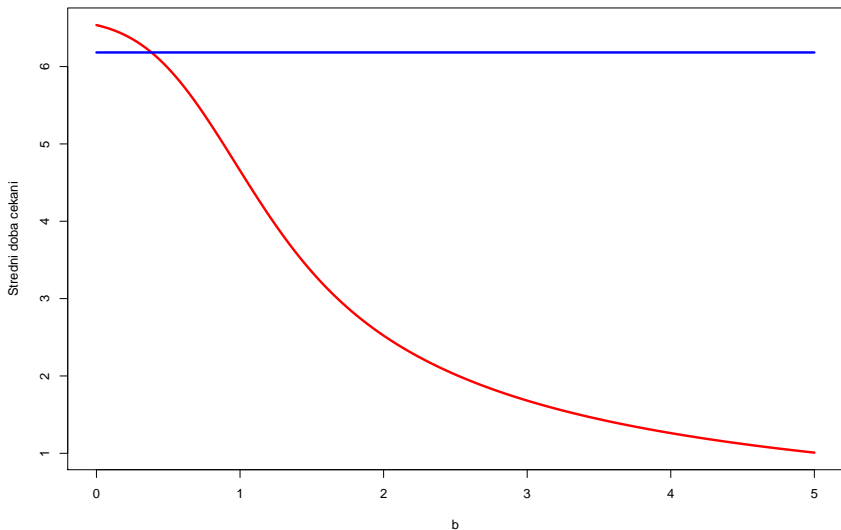
- 2 Pro test založený na pozorování T

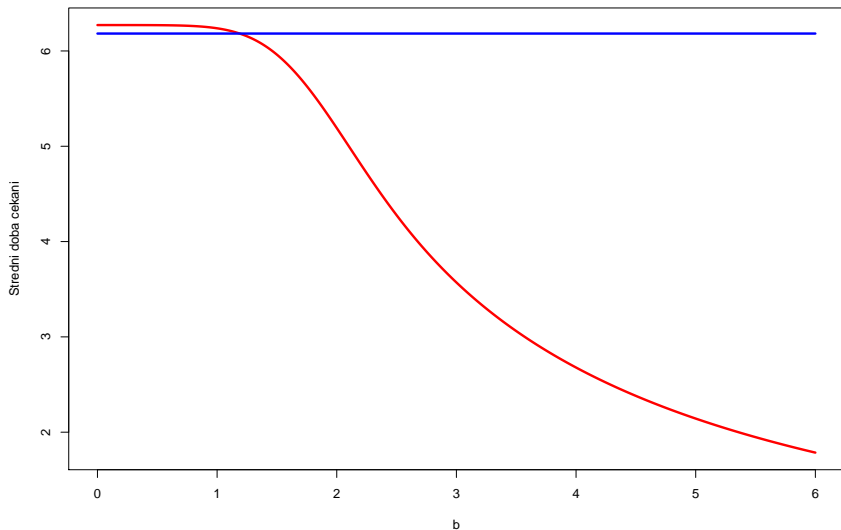
$$\beta(a) = \exp \left\{ \frac{2aA}{b^2} \right\} \Phi \left(\frac{-A - aC}{b\sqrt{C}} \right) + \Phi \left(\frac{-A + aC}{b\sqrt{C}} \right),$$

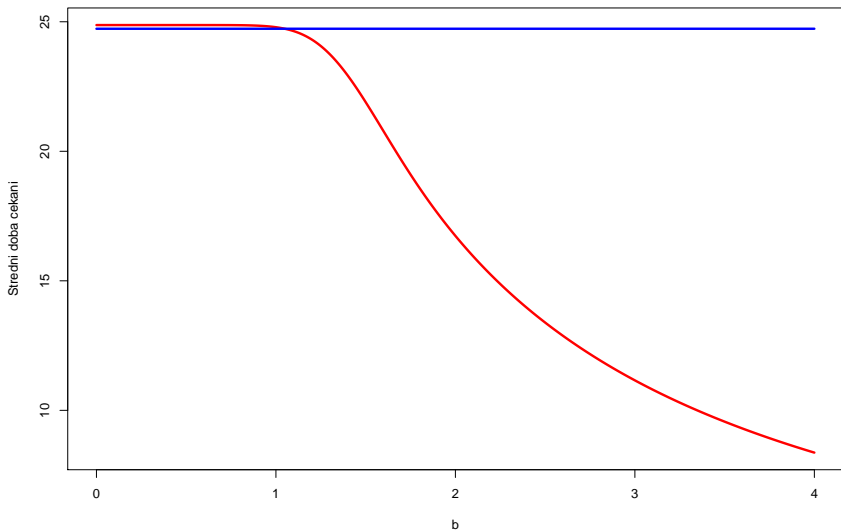
kde A a C jsou funkcemi a_0 , a_1 , α a β .

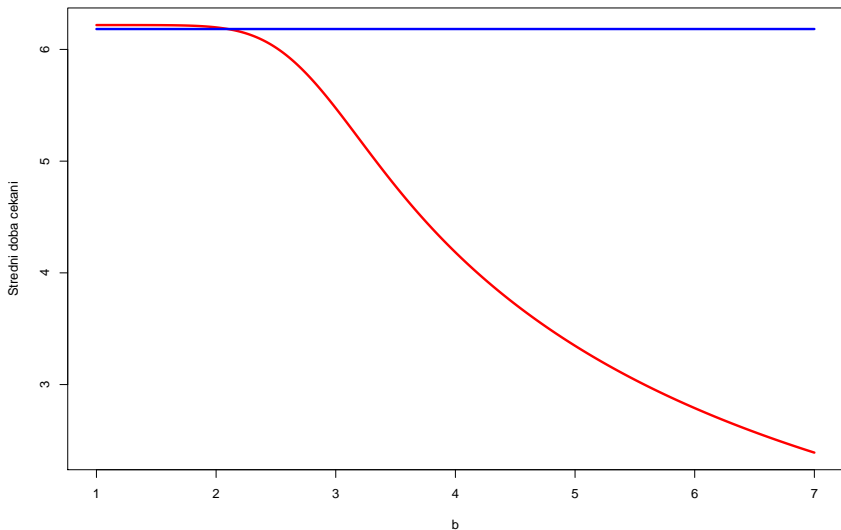
Průměrná doba do rozhodnutí

- V případě pozorování času T dosažení úrovně A je doba do rozhodnutí náhodnou veličinou $\min(C, T)$, přičemž C i A závisí na a_0 , a_1 , α a β a víme, že $ET = A/a$. Se zvětšujícím se a tedy střední doba do rozhodnutí bude klesat.
- Při snaze o dosažení stejného rozptylu odhadu parametru a přímou a nepřímou metodou ($\text{var}\widehat{a}_P = \text{var}\widetilde{a}_N$) musíme v průměru čekat déle na pozorování T .
- Lze čekat, že v bodě a_0 nebude střední doba $E \min(C, T)$ menší než t , doba do pozorování X

$A=5.0439$; $C=6.6226$; $t=6.1826$  $a_0=0$; $\alpha=0.05$; síla 0.8 v bode 1

$A=10.7137$; $C=6.2716$; $t=6.1826$  $a_0=1$; $\alpha=0.05$; síla 0.8 v bode 2

$A=33.4712$; $C=24.8725$; $t=24.7302$  $a_0=1$; $\alpha=0.05$; síla 0.8 v bode 1.5

$A=16.7356$; $C=6.2181$; $t=6.1826$  $a_0=2$; $\alpha=0.05$; sila 0.8 v bode 3

Vztah úrovně A , kritické hodnoty C a požadované síly

- Již jsme viděli, že odhad \widehat{a}_N je konzistentní, pokud $A \rightarrow \infty$.
- K dosažení větší síly bude třeba zvyšovat A .
- Čím větší je A , tím větší musí být i kritická hodnota C .
- Připomeňme si vztah: chceme-li, určit A a C tak, aby test dosahoval požadovanou sílu v daném bodě, musíme řešit dvojici nelineárních rovnic

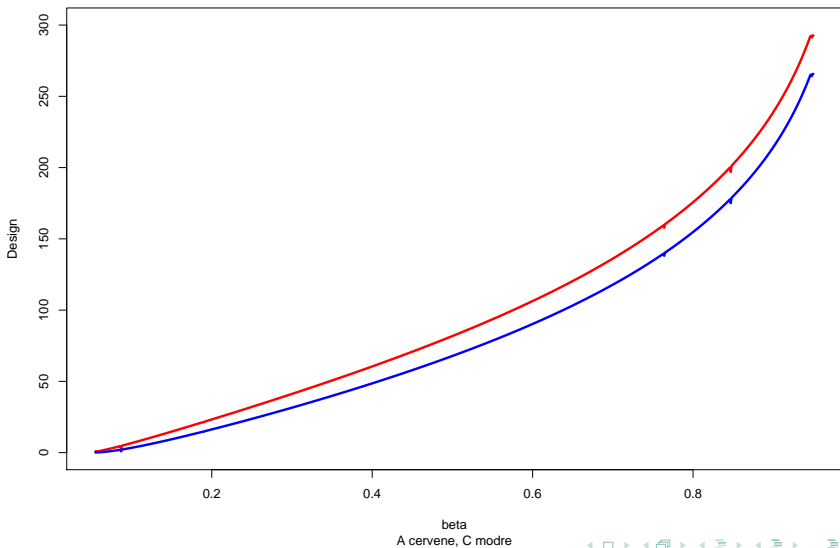
$$\beta(\mathbf{a}_0) = \alpha, ; \quad \beta(\mathbf{a}_1) = \beta,$$

kde

$$\beta(\mathbf{a}) = \exp\left\{\frac{2aA}{b^2}\right\} \Phi\left(\frac{-A - aC}{b\sqrt{C}}\right) + \Phi\left(\frac{-A + aC}{b\sqrt{C}}\right)$$

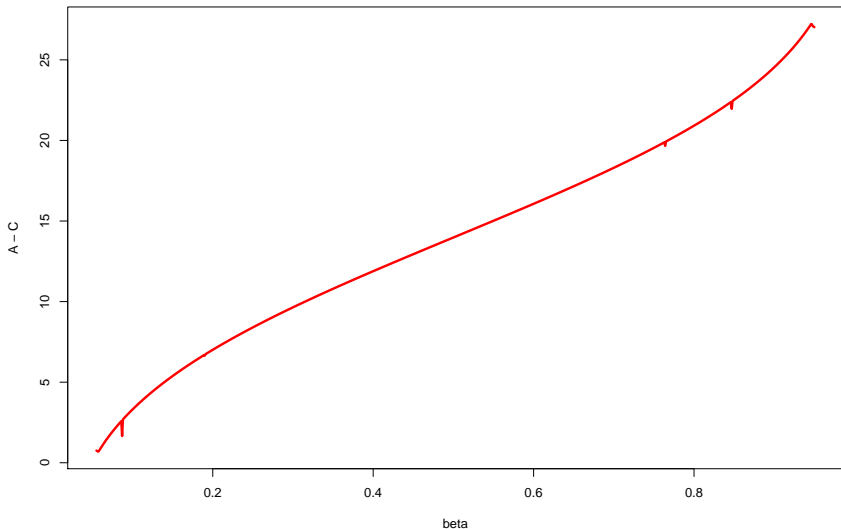
Závislost A a C na síle v pevné alternativě

Zavislost A a C na pozadovane síle v $a_1=1,2$ pri hladine 0,05 v $a_0=1$



Závislost A a C na síle v pevné alternativě

Zvetsující se rozdíl $A - C$ při rostoucí síle



Neznáme-li b , přicházejí potíže

- Uvažujme stále test $H_0: a \leq a_0$ proti $H_1: a > a_0$.
- Test musí odrážet nutnost odhadu b^2 .
- Kritický obor je tvaru $T < g(S_2)$, kde

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{T_i} + a_0^2 T$$

je postačující statistikou pro rušivý parametr.

- Aby se dalo rozumně odvodit rozdělení, použijeme testovou statistiku

$$U = \frac{a_0 T - A}{\sqrt{T \widetilde{b}_N^2}},$$

kde \widetilde{b}_N^2 je nestranný odhad b^2 .

- U je rostoucí funkcí T , proto je kritický obor tvaru $U < h(S_2)$ pro nějakou funkci h .
- Pomocí **podmíněného rozdělení U při $S_2 = s$** lze odvodit, že $C = C_\alpha(s) = h(s)$ musí splňovat vztah

$$\alpha = \Psi_{n-1}(C) + \left(\frac{s + 2a_0A}{s - 2a_0A} \right)^{n/2-1} \times \\ \times \Psi_{n-1} \left(- \frac{\sqrt{(s + 2a_0A)C^2 + 4(n-1)a_0A}}{\sqrt{s - 2a_0A}} \right),$$

kde Ψ_{n-1} je distribuční funkce Studentova t rozdělení o $n - 1$ stupni volnosti.

- Kritická hodnota C je funkcí podmínky S_2 .
- Pokud $a_0 = 0$ dostaneme testovou statistiku

$$U = -\frac{A}{\sqrt{T} \widetilde{b}_N^2}$$

a kritická hodnota se určí pomocí rovnosti

$$\alpha = \Psi_{n-1}(C) + \Psi_{n-1}(-|C|),$$

což dává $C = t_{n-1}(\alpha/2)$ a kritický obor $U < C$.

- V tomto případě kritická hodnota nezávisí na S_2 .
- Pro $a_0 = 0$ lze využít přímo faktu, že U a S_2 jsou nezávislé, a U^2 má Fisherovo rozdělení s 1 a $n - 1$ stupněm volnosti.
- Kritickou hodnotou je $K = F_{1,n-1}(\alpha)$ a kritický obor $U^2 > K$.
- Vzhledem ke vztahům mezi Studentovým a Fisherovým rozdělením jsou oba postupy totožné.

- Mějme hypotézu $H_0: a = a_0$ proti $H_1: a \neq a_0$
- Uvažujme pouze $a_0 > 0$, neboť stále předpokládáme, že $a \geq 0$.
- Pro $a_0 = 0$ to ale vychází nastejno jako v předchozím.
- Test je opět založen na testové statistice

$$U = \frac{a_0 T - A}{\sqrt{T \widetilde{b}_N^2}}$$

- Kritické hodnoty stejnoměrně nejsilnějšího nestranného testu jsou **symetrické a nezávisí na podmínce S_2** .
- Kritický obor je $|U| > t_{n-1}(\alpha/2)$. Všimněme si, že pro $a_0 = 0$ splývá s kritickým oborem pro jednostrannou alternativu.

Oboustranná alternativa a přímý přístup

- Statistika

$$V = \frac{X - a_0 t}{\sqrt{t \widetilde{b}_P^2}}$$

má za platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení o $n - 1$ stupni volnosti.

- Kritickým oborem testu hypotézy $H_0: a = a_0$ proti $H_1: a \neq a_0$ na hladině α tedy je $|V| > t_{n-1}(\alpha/2)$.
- V obou případech dostáváme stejný výsledek: Hypotézu $H_0: a = a_0 \geq 0$ zamítneme ve prospěch alternativy $H_1: a \in [0, \infty) \setminus \{a_0\}$ pokud

$$\frac{|A - a_0 T|}{\sqrt{T \widetilde{b}_N^2}} > t_{n-1}(\alpha/2); \quad \frac{|X - a_0 t|}{\sqrt{t \widetilde{b}_P^2}} > t_{n-1}(\alpha/2);$$

- Zkoumat sílu testů při neznámém parametru b . Pro přímý přístup lze použít necentrální t-rozdělení, pro nepřímý přístup to nepůjde, nebo nepůjde úplně přímočaře.
- Zkusit nepřímý přístup bez požadavku $a \geq 0$. To bude vyžadovat použití dvou úrovní dosažení $A^1 < 0 < A^2$. Pak ale nebude mít čas prvního vstupu do $\{A^1, A^2\}$ inverzní gaussovské rozdělení. Místo toho budeme zápasit s nekonečnými řadami (známými z rozdělení maxima absolutní hodnoty Wienerova procesu).
- Počítání síly nebo určení kritických hodnot budou velmi náročné.
- Přínosem by mohlo být, že hypotézu můžeme zamítnout podstatně dříve než při přímém přístupu.

- Jiné procesy než Wienerův (Brownův most s trendem $a(t) \geq 0$, $a(0) = a(1) = 0$, Ornsteinův-Uhlenbeckův proces)
- Jiné trendy, monotónní, ale ne lineární.
- Nelineární trendy povedou opět ke složitým rozdělením (nevyjde inverzní gaussovské, v použití Girsanovovy věty nastane nutnost počítat se speciálními funkcionaly Wienerova procesu).
- Pro lineární trend je podstatné mít poslední pozorování co nejpozději (k odhadu trendu) a co nejvíce pozorování (k odhadu rozptylu). Pro nelineární trendy bude nutné optimalizovat síť pozorování.