

Robustifikované instrumentální proměnné

Robust 2010

Jiří Franc

České Vysoké Učení Technické
Fakulta Jaderná a Fyzikálně Inženýrská
Katedra Matematiky



Tato práce se zabývá odhadem paramtrů v lineárním regresním modelu,

$$Y_i = X_{i,1}\beta_1^0 + X_{i,2}\beta_2^0 + \cdots + X_{i,p}\beta_p^0 + e_i = X_i^T \beta^0 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde data obsahují odlehlá pozorování a kde vysvětlující proměnné jsou korelovány s disturbancemi.

Požadujem, aby odhad byl

- ① robustní,
- ② konzistentní,
- ③ dobře implementovatelný a “rychle” vypočitatelný.

Chceme tyto vlastnosti ověřit jak teoreticky tak pomocí simulací.



Instrumental weighted variables - Instrumentální vážené proměnné

Nechť $\{Z_i\}_{i=1}^n$ jsou “správné” instrumentální proměnné, potom odhad metodou IWV $\hat{\beta}^{(IWV, w, n)}$ parametru β^0 je definován jako řešení normálních rovnic:

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_i (Y_i - X_i^T \beta) = \sum_{i=1}^n w \left(\frac{\pi(\beta, i) - 1}{n} \right) Z_i (Y_i - X_i^T \beta) = 0,$$

kde $\pi(\beta, i)$ označuje pořadí i -tého residua jako

$$\pi(\beta, i) = j \in \{1, \dots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad r_i^2(\beta) = r_{(j)}^2(\beta)$$

a váhy w_i jsou dány váhovou funkcí $w : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ splňující “základní požadavky”.

Pokud jsou splněny “základní předpoklady” potom odhad metodou instrumentálních vážených proměnných je slabě konzistentní.



Spočítáme pro všechny permutace $\pi \in \mathcal{P}_n$

$$\hat{\beta}^{(WIV, n, W(\pi))} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\pi) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\pi) \mathbf{Y},$$

a najdeme permutaci π_{best} , definovanou jako

$$\pi_{best} = \arg \min_{\pi \in \mathcal{P}_n} \left\{ \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta}^{(WIV, n, W(\pi))} \right)^T \mathbf{W}(\pi) \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta}^{(WIV, n, W(\pi))} \right) \right\}$$

potom pro odhad metodou instrumentálních vážených proměnných platí

$$\hat{\beta}^{(IWW, n, w)} = \hat{\beta}^{(WIV, n, W(\pi_{best}))} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\pi_{best}) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}(\pi_{best}) \mathbf{Y}.$$



Iterační algoritmy pro výpočet instrumentálních vážených proměnných:

$$\hat{\beta}_{(j+1)}^{(IWV,n,W(\hat{\beta}_{(j)}^{(IWV,n)}))} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} (\hat{\beta}_{(j)}^{(IWV,n)}) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} (\hat{\beta}_{(j)}^{(IWV,n)}) \mathbf{Y}.$$

$$W(\beta) = \text{diag} \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad \text{s} \quad w_i = w \left(\frac{\pi(\beta, i) - 1}{n} \right)$$

a počáteční odhad můžeme provést pomocí metody nejmenších čtverců. Iterační posloupnost zastavíme, když změny v $\hat{\beta}_{(j)}^{(IWV,n,W)}$ budou menší než dané $\tau > 0$ v každé souřadnici, nebo když součet vážených čtverců reziduí bude větší než v předchozím kroku.

Nebo můžeme hledat minimum nákladové funkce pomocí metody simulovaného žihání (Metropolis-Hastings algoritmus pro MCMC). Ta hledá minimum součtu vážených čtverců reziduí pro n! možných odhadů metodou vážených instrumentálních proměnných $\hat{\beta}^{(IWV,n,W(\pi))}$.

Příklady a simulace ověřili požadované vlastnosti odhadu metodou IWV.



