Title

Aproximativní řešení a hodnota účelové funkce

Petr Lachout

MFF UK, ÚTIA AV ČR

ROBUST - Králíky - únor, 2010

Definice

Budeme se zabývat optimalizačními úlohami.
Uvažujme metrický prostor $\mathcal{X}$ a funkci $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
Zajímá nás minimální hodnota funkce f na $\mathcal{X}$

$$\varphi(f) = \inf \{ f(x) \mid x \in \mathcal{X} \} . \tag{1}$$

Definice

Hodnota $+\infty$ vznikne přepisem podmínek $A \subset \mathcal{X}$, za nichž minimalizujeme funkci $g : A \to \mathbb{R}$. Tedy úlohu

$$\inf \{ g(x) \mid x \in A \}$$

přepisujeme na tvar

$$\inf \{ f(x) \mid x \in \mathcal{X} \},$$

kde

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad \text{pro } x \in A, \\ &= +\infty \quad \text{pro } x \notin A. \end{aligned}$$

Definice

Funkce, které nabývají pouze hodnoty $+\infty$ nebo jejichž minimální hodnota je $-\infty$, nejsou z hlediska optimalizace příliš zajímavé.

V dalším se proto omezíme pouze na funkce, které jsou vlastní, tj. pro něž $\varphi(f) \in \mathbb{R}$.

Definice

Definujeme množinu všech minimálních řešení

$$\Phi\left(f\right) = \left\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) = \varphi\left(f\right)\right\}, \tag{2}$$

množiny všech ε-minimálních řešení

$$\Psi\left(f;\varepsilon\right) = \left\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq \varphi\left(f\right) + \varepsilon\right\} \quad \forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

a úrovňové množiny

$$\mathrm{lev}_{\Delta}\left(f\right) = \left\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq \Delta\right\} \quad \forall\,\Delta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Potřebujeme také vhodnou „míru vzdálenosti“ mezi dvěmi množinami. Takovou vhodnou mírou je excess z množiny $A \subset \mathcal{X}$ do množiny $B \subset \mathcal{X}$

$$\mathrm{excess}\left(A, B\right) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \mathrm{d}\left(a, b\right), \tag{5}$$

kde d je metrika na $\mathcal{X}$.

Definice

Aproximativním řešením minimalizace funkce f na množině $\mathcal{X}$ budeme rozumět $\theta \in \mathcal{X}$, které splňuje buď

$$\theta \in \Psi\left(f; \varepsilon\right)$$

nebo

$$\theta \in \operatorname{lev}_{\Delta}\left(f\right),$$

pro předem zadané ε či Δ.

Definice

Zajímáme se o posloupnost minimalizačních úloh minimalizovat funkci f_t na množině $\mathcal{X}$ pro $t \in \mathbb{N}$.
Zajímá nás asymptotické chování příslušných aproximativních řešení.
Jejich konvergence a řád konvergence.

Definice-posloupnost

Posloupností aproximativních řešení chápeme posloupnost $\theta_t \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$, která splňuje buď, pro předem zadaná ε_t, $t \in \mathbb{N}$ splňují

$$\theta_t \in \Psi\left(f_t; \varepsilon_t\right),$$

nebo pro předem zadaná Δ_t, $t \in \mathbb{N}$ splňují

$$\theta_t \in \mathrm{lev}_{\Delta_t}\left(f_t\right).$$

Náhodnost

Nyní přidejme závislost sledovaných úloh na náhodě. Budeme uvažovat pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$ a pro $t \in \mathbb{N}$

$$f_t : \mathcal{X} \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \; \varphi(f_t(\bullet, \omega)) \in \mathbb{R} \; \forall \omega \in \Omega,$$
$$\varepsilon_t : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Případně

$$\Delta_t : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Náhodnost

Nyní musíme zobecnit, vysvětlit pojem posloupnosti aproximativních řešení pro případ, kdy úlohy závisí na náhodě.

Budeme uvažovat posloupnost zobrazení $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$.
Máme několik možností, jaké vlastnosti, kvalitu od ní vyžadovat.

Náhodnost-1

Posloupnost $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X},\ t \in \mathbb{N}$ nazveme

náhodná ε-minimální řešení, pokud

$$\hat{\theta}_t\,(\omega) \in \Psi\left(f_t(\bullet, \omega); \varepsilon_t(\omega)\right) \qquad \forall\ \omega \in \Omega\ \forall\ t \in \mathbb{N},$$

náhodná úrovňově-minimální řešení, pokud

$$\hat{\theta}_t\,(\omega) \in \mathrm{lev}_{\Delta_t(\omega)}\left(f_t(\bullet, \omega)\right) \qquad \forall\ \omega \in \Omega\ \forall\ t \in \mathbb{N}.$$

Náhodnost-2

Posloupnost $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ nazveme

skoro jistě ε-minimální řešení, pokud existuje $\Omega_0 \subset \Omega$ takové, že $\text{Prob}\left(\Omega_0\right) = 1$ a

$$\hat{\theta}_t\left(\omega\right) \in \Psi\left(f_t(\bullet, \omega); \varepsilon_t(\omega)\right) \qquad \forall\ \omega \in \Omega_0\ \forall\ t \in \mathbb{N},$$

skoro jistě úrovňově-minimální řešení, pokud existuje $\Omega_0 \subset \Omega$ takové, že $\text{Prob}\left(\Omega_0\right) = 1$ a

$$\hat{\theta}_t\left(\omega\right) \in \text{lev}_{\Delta_t(\omega)}\left(f_t(\bullet, \omega)\right) \qquad \forall\ \omega \in \Omega_0\ \forall\ t \in \mathbb{N}.$$

Náhodnost-3

Posloupnost $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ nazveme

striktně asymptotická ε-minimální řešení, pokud existuje $\Omega_0 \subset \Omega$ takové, že $\mathrm{Prob}\,(\Omega_0) = 1$ a $\forall\ \omega \in \Omega_0$

$$\hat{\theta}_t\,(\omega) \in \Psi\,(f_t(\bullet, \omega); \varepsilon_t(\omega)) \qquad \forall\ t \in \mathbb{N} \quad \text{dostatečně velká,}$$

striktně asymptotická úrovňově-minimální řešení, pokud existuje $\Omega_0 \subset \Omega$ takové, že $\mathrm{Prob}\,(\Omega_0) = 1$ a $\forall\ \omega \in \Omega_0$

$$\hat{\theta}_t\,(\omega) \in \mathrm{lev}_{\Delta_t(\omega)}\,(f_t(\bullet, \omega)) \qquad \forall\ t \in \mathbb{N} \quad \text{dostatečně velká.}$$

Náhodnost-4

Posloupnost $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ nazveme

slabě asymptotická ε-minimální řešení, pokud

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Prob}_* \left(\omega \in \Omega \ : \ \hat{\theta}_t(\omega) \in \Psi\left(f_t(\bullet, \omega); \varepsilon_t(\omega)\right)\right) = 1,$$

slabě asymptotická úrovňově-minimální řešení, pokud

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Prob}_* \left(\omega \in \Omega \ : \ \hat{\theta}_t(\omega) \in \mathrm{lev}_{\Delta_t(\omega)}\left(f_t(\bullet, \omega)\right)\right) = 1.$$

Konvergence

Cílem je ukázat asymptotické chování náhodných aproximativních řešení. Jelikož však nepředpokládáme měřitelnost, je teorie konvergncí trochu složitější. Budeme uvažovat čtyři typy konvergence: as, as^*, v Prob^*. a v distribuci. Definice těchto konvergencí, jejich vlastnosti a vztahy jsou uvedeny v [VaartWellner(1996)].

Definition of convergences

Konvergence

Je třeba si uvědomit, že stačí vyšetřovat pouze náhodná ε-minimální řešení.
Všechny ostatní typy lze na ně převést.

Převod

Nejdříve si povšimněme přímého vztahu mezi ε-optimálním řešením a level-optimálním řešením.

$$\Psi\left(h;\varepsilon\right) = \mathrm{lev}_{\varphi(h)+\varepsilon}\left(h\right), \tag{6}$$

$$\mathrm{lev}_{\Delta}\left(h\right) = \Psi\left(h;\Delta-\varphi\left(h\right)\right). \tag{7}$$

Konstrukce

Uvažujme posloupnost zobrazení $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon_t : \Omega \to \mathbb{R}_{+,0}$, $t \in \mathbb{N}$.
Zvolme libovolně, ale pevně, $\alpha_t : \Omega \to \mathbb{R}_+$ s vlastností $\lim_{t\to+\infty} \alpha_t(\omega) = 0$ pro každé $\omega \in \Omega$.
Nyní dokážeme vybrat $\xi_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\xi_t(\omega) \in \Psi\left(f_t(\cdot,\omega); \varepsilon_t(\omega) + \alpha_t(\omega)\right) \quad \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{N}.$$

Položme dále

$$\begin{aligned} \eta_t(\omega) &= \hat{\theta}_t(\omega) \quad \text{když } \hat{\theta}_t(\omega) \in \Psi\left(f_t(\cdot,\omega); \varepsilon_t(\omega)\right) \\ &= \xi_t(\omega) \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Konstrukce dává posloupnost η_t, $t \in \mathbb{N}$, která splňuje

$$\eta_t(\omega) \in \Psi\left(f_t(\cdot,\omega); \varepsilon_t(\omega) + \alpha_t(\omega)\right) \quad \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{N}.$$

Nyní porovnáme asymptotické vlastnosti $\hat{\theta}_t$, $t \in \mathbb{N}$ a η_t, $t \in \mathbb{N}$.

Konstrukce-vztahy

Lemma

Nechť $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$ *jsou skoro jistě* ε*-minimální řešení nebo striktně asymptotická* ε*-minimální řešení.*

Pak, existuje $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathrm{Prob}(\Omega_0) = 1$ *tak, že pro každé* $\omega \in \Omega_0$

$$\hat{\theta}_t(\omega) = \eta_t(\omega) \quad \forall\, t \in \mathbb{N} \quad \textit{dostatečně velká.}$$

Následně pro každé $\omega \in \Omega_0$,

$$\mathrm{Ls}\left(\hat{\theta}_t(\omega)\,,\; t \in \mathbb{N}\right) = \mathrm{Ls}\left(\eta_t(\omega)\,,\; t \in \mathbb{N}\right).$$

Konstrukce-vztahy

Označme $\bar{\varepsilon}(\omega) = \limsup_{t\to+\infty} \varepsilon_t(\omega)$.
Když vezmeme náhodná zobrazení $\tau_t : \Omega \to \mathbb{R}$, pak pro každé $\omega \in \Omega_0$

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_t(\omega) \left[f_t(\hat{\theta}_t(\omega), \omega) - f_t(\eta_t(\omega), \omega) \right] = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_t(\omega) \Big[\text{excess}\left(\{\hat{\theta}_t(\omega)\}, \Psi\left(f_t(\bullet, \omega); \bar{\varepsilon}(\omega)\right)\right) - \\ - \text{excess}\left(\{\eta_t(\omega)\}, \Psi\left(f_t(\bullet, \omega); \bar{\varepsilon}(\omega)\right)\right) \Big] = 0.$$

Konstrukce-vztahy

Lemma

Nechť $\hat{\theta}_t : \Omega \to \mathcal{X}$ *jsou slabě asymptotická* ε*-minimální řešení.*
Pak,

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Prob}_* \left(\hat{\theta}_t = \eta_t \right) = 1.$$

Konstrukce-vztahy

Označme $\bar{\varepsilon}(\omega) = \limsup_{t \to +\infty} \varepsilon_t(\omega)$.
Následně, když vezmeme náhodná zobrazení $\tau_t : \Omega \to \mathbb{R}$, pak

$$\tau_t \left[f_t(\hat{\theta}_t) - f_t(\eta_t) \right] \xrightarrow[t \to +\infty]{\text{Prob}^*} 0,$$

$$\tau_t \Bigg[\text{excess}\left(\{\hat{\theta}_t\}, \Psi\left(f_t; \bar{\varepsilon}\right) \right) - $$

$$- \text{excess}\left(\{\eta_t\}, \Psi\left(f_t; \bar{\varepsilon}\right) \right) \Bigg] \xrightarrow[t \to +\infty]{\text{Prob}^*} 0.$$

Appendix-Topology

We have to recall a few from topological terminology.

Definition

For a sequence η_n, $n \in \mathbb{N}$ in a metric space $\mathcal{W}$, we denote the set of its cluster points by $\mathrm{Ls}\left(\eta_n\,,\ n \in \mathbb{N}\right)$*, i.e.*

$$\mathrm{Ls}\left(\eta_n\,,\ n \in \mathbb{N}\right) = \left\{ \psi \in \mathcal{W} \;\middle|\; \exists \text{ subsequence s.t. } \lim_{k \to +\infty} \eta_{n_k} = \psi \right\}.$$

Back

Appendix-Topology

Definition

For a sequence A_n, $n \in \mathbb{N}$ subsets of a metric space $\mathcal{W}$, we denote the set of its cluster points by $\mathrm{Ls}\,(A_n\,,\ n \in \mathbb{N})$, *i.e.*

$$\mathrm{Ls}\,(A_n\,,\ n \in \mathbb{N}) = \left\{ \psi \in \mathcal{W} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ subsequence } A_{n_k} \text{ and a sequence } \eta_k \in A_{n_k} \\ \text{s.t. } \lim\limits_{k \to +\infty} \eta_k = \psi \end{array} \right\}.$$

Appendix-Topology

Definition

We say that a sequence η_n, $n \in \mathbb{N}$ in a metric space $\mathcal{W}$ is compact if each its subsequence possesses at least one cluster point.

Compact sequence in metric space possesses an equivalent description.

Lemma

Let η_n, $n \in \mathbb{N}$ be a sequence in a metric space $\mathcal{W}$. Then, the following statements are equivalent:

1. *The sequence is compact.*
2. *There is a compact $L \subset \mathcal{W}$ tak, že $\eta_n \in L$ for all $n \in \mathbb{N}$.*
3. *The set $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathrm{Ls}(\eta_n, n \in \mathbb{N})$ is compact.*

Appendix-Topology

Lemma

Let η_n, $n \in \mathbb{N}$ *be a sequence in a metric space* $\mathcal{W}$ *and* $K \subset \mathcal{W}$ *be a compact. If for every open set* $G \supset K$ *there is an* $n_G \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\eta_n \in G$ *for all* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_G$.
Then the sequence is compact and $\mathrm{Ls}\left(\eta_n\,,\ n \in \mathbb{N}\right) \subset K$.

Appendix-Nonmeasurable mappings

This auxiliary section contains all necessary theory na nonmeasurable mappings. Definitions and relations are taken from [VaartWellner(1996)], chapter 1.9., p.52-56. All proofs can be found in [VaartWellner(1996)], also.

Definition

For a set $B \subset \Omega$ its outer probability is defined as

$$\mathrm{Prob}^*(B) = \inf\{\mathrm{Prob}(A) \mid B \subset A,\ A \in \mathcal{A}\}$$

and the inner probability is

$$\mathrm{Prob}_*(B) = \mathrm{Prob}^*(\Omega \setminus B).$$

Appendix-Nonmeasurable mappings

Definition

For a mapping $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ the outer integral is defined as

$$\mathsf{E}^* [T] = \inf \left\{ \mathsf{E}[U] \;\middle|\; U \geq T, \; U : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{measurable and } \mathsf{E}[U] \ \textit{exists} \right\}$$

and the inner integral is

$$\mathsf{E}_* [T] = -\mathsf{E}^* [-T] .$$

Appendix-Nonmeasurable mappings

Lemma

For any mapping $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *there exists a measurable funkce* $T^* : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *with*

1. $T^* \geq T$;
2. $T^* \leq U$ a.s. *for every measurable* $U : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *with* $U \geq T$.

The funkce T^* *is called a minimal measurable majorant of* T *and is not uniquely defined.*
The funkce $T_* = -(-T)^*$ *is called a maximal measurable minorant of* T.

Appendix-Nonmeasurable mappings

Lemma

For any $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

1. $\mathsf{E}^* [T] = \mathsf{E} [T^*]$ *if one of these integral exists;*
2. $\mathsf{E}_* [T] = \mathsf{E} [T_*]$ *if one of these integral exists.*

Definition

Let $\mathcal{X}$ be a metric space with metric d *and* $X_n, X : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ *be arbitrary maps.*

- X_n, $n \in \mathbb{N}$ *converges* *almost surely* *to* X *if*

$$\mathrm{Prob}_* \left(\lim_{n \to +\infty} \mathrm{d}\left(X_n, X\right) = 0 \right) = 1.$$

  We use notation $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{as} X$.

- X_n, $n \in \mathbb{N}$ *converges* *almost uniformly* *to* X *if for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a measurable set* $A_\varepsilon \subset \Omega$ *with* $\mathrm{Prob}\left(A_\varepsilon\right) \geq 1 - \varepsilon$ *and* $\mathrm{d}\left(X_n, X\right) \longrightarrow 0$ *uniformly na* A_ε, *i.e.* $\sup_{\omega \in A_\varepsilon} \mathrm{d}\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \longrightarrow 0$. *We use notation* $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{au} X$.

Definition

- $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ *converges* *outer almost surely* *to* X *if*

$$\mathrm{d}\left(X_n, X\right)^* \xrightarrow[n\to+\infty]{as} 0 \quad \textit{for some versions of} \quad \mathrm{d}\left(X_n, X\right)^* .$$

We use notation $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as^*} X$.

- $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ *converges* *in outer probability* *to* X *if*

$$\textit{for every } \varepsilon > 0 \quad \mathrm{Prob}^*\left(\mathrm{d}\left(X_n, X\right) > \varepsilon\right) \to 0.$$

We use notation $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Prob}^*} X$.

Random approximate solutions

Appendix-Nonmeasurable mappings

There are known relations between all of these notions of convergences.

Lemma

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ be Borel measurable and $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be a sequence of arbitrary maps. Then,

- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as^*} X$ *implies* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Prob}^*} X$ *and* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as} X$;
- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as^*} X$ *if and only if* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{au} X$.

Definition

Let $\mathcal{X}$ be a metric space. The sequence $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ of arbitrary maps is called asymptotically measurable *if*

$$\mathsf{E}^* \left[f \left(X_n \right) \right] - \mathsf{E}_* \left[f \left(X_n \right) \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

for every bounded continuous funkce $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Definition

Let $\mathcal{X}$ be a metric space. The sequence $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ of arbitrary maps is called strongly asymptotically measurable if

$$f(X_n)^* - f(X_n)_* \xrightarrow[n \to +\infty]{as} 0$$

for every bounded continuous funkce $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Appendix-Nonmeasurable mappings

Definition

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be an asymptotically measurable sequence and $X : \Omega \to \mathcal{X}$ be random variable. We say that X_n, $n \in \mathbb{N}$ converges in distribution to X if

$$\mathsf{E}^* \left[f \left(X_n \right) \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathsf{E} \left[f \left(X \right) \right]$$

for every bounded continuous funkce $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.
We use notation $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X$.

Appendix-Nonmeasurable mappings

Lemma

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ be Borel measurable and separable, and $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be a sequence of arbitrary maps. Then, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as^*} X$ if and only if $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as} X$ and X_n, $n \in \mathbb{N}$ is strongly asymptotically measurable.

Appendix-Nonmeasurable mappings

Lemma

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ be Borel measurable and separable, and $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be a sequence of arbitrary maps, which is asymptotically measurable. Then, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as} X$ implies $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Prob}^*} X$.

Appendix-Nonmeasurable mappings

Lemma

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be an asymptotically measurable sequence and $X : \Omega \to \mathcal{X}$. Then

- *If $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$ then X is measurable, i.e. it is a random variable.*
- *$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{as^*} X$ implies $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$.*
- *$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Prob}^*} X$ implies $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$.*
- *If $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$ and $X \equiv c$ is nonrandom then $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Prob}^*} X$.*

Portmanteau lemma

Lemma

Let $\mathcal{X}$ be a metric space, $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ be an asymptotically measurable sequence and $X : \Omega \to \mathcal{X}$ be random variable. Then the following is equivalent:

- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$.
- $$\mathrm{E}^*\left[f\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{E}\left[f\left(X\right)\right] \quad \forall\ f \in C_b\left(\mathcal{X}\right).$$
- $$\mathrm{E}_*\left[f\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{E}\left[f\left(X\right)\right] \quad \forall\ f \in C_b\left(\mathcal{X}\right).$$

Portmanteau lemma

- $$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{Prob}_* \left(X_n \in G\right) \geq \mathrm{Prob}\left(X \in G\right) \quad \forall\, G \in \mathcal{G}\left(\mathcal{X}\right).$$
- $$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{Prob}^* \left(X_n \in F\right) \leq \mathrm{Prob}\left(X \in F\right) \quad \forall\, F \in \mathcal{F}\left(\mathcal{X}\right).$$

Random approximate solutions

References

Hoffmann-Jørgensen, J.: *Probability with a View Towards to Statistics I, II.* Chapman and Hall, New York, 1994.

Kelley, J.L.: *General Topology.* D. van Nostrand Comp., New York, 1955.

Lachout, P.: Stability of stochastic optimization problem - nonmeasurable case. Kybernetika **44,2**(2008), 259-276.

Lachout, P.: Stochastic optimization sensitivity without measurability. In: Proceedings of MMEI held in Herĺany (2007), 179-184.

Lachout, P.; Liebscher, E.; Vogel, S.: Strong convergence of estimators as ε_n-minimizers of optimization problems. Ann. Inst. Statist. Math. **57,2**(2005), 291-313.

References

- Lachout, P.; Vogel, S.: On Continuous Convergence and Epi-convergence of Random Functions. Part I: Theory and Relations. Kybernetika **39,1**(2003), 75-98.
- Robinson, S.M.: Analysis of sample-path optimization. Math. Oper. Res. **21,3**(1996), 513-528.
- Rockafellar, T.; Wets, R.J.-B.: *Variational Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- Vajda, I.; Janžura, M.: On asymptotically optimal estimates for general observations. Stochastic Processes and their Applications **72,1**(1997), 27-45.
- van der Vaart, A.W.; Wellner, J.A.: *Weak Convergence and Empirical Processes* Springer, New York, 1996.