O výpočtu Blakerova konfidenčního intervalu

Jan Klaschka
klaschka@cs.cas.cz
Ústav informatiky AV ČR, Praha

ROBUST 2010, Králíky 1.-5. února 2010

Osnova

- Úvod, značení

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)
- První pokus o lepší algoritmus (a proč selhává)

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)
- První pokus o lepší algoritmus (a proč selhává)
- Nový algoritmus

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)
- První pokus o lepší algoritmus (a proč selhává)
- Nový algoritmus
  - Průběh konfidenční funkce

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)
- První pokus o lepší algoritmus (a proč selhává)
- Nový algoritmus
  - Průběh konfidenční funkce
  - Popis algoritmu

Osnova

- Úvod, značení
- Clopper-Pearsonův (exaktní) interval
  a méně konzervativní alternativy
- Blakerův interval
  - Clopper-Pearsonův CI alternativně
  - konfidenční křivka a CI
  - Blakerův algoritmus výpočtu mezí (a co mi na něm vadí)
- První pokus o lepší algoritmus (a proč selhává)
- Nový algoritmus
  - Průběh konfidenční funkce
  - Popis algoritmu
- Závěr

Úvod, značení

- X ... počet „úspěchů" v n nezávislých pokusech, pravděpodobnost úspěchu p

Úvod, značení

- X ... počet „úspěchů" v n nezávislých pokusech, pravděpodobnost úspěchu p

- $X \sim Binom(n, p)$, tj.

$$P_p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Úvod, značení

- X ... počet „úspěchů" v n nezávislých pokusech, pravděpodobnost úspěchu p

- $X \sim Binom(n, p)$, tj.

$$P_p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Úloha: oboustranný konfidenční interval $CI = [p_L, p_U]$ pro p na hladině spolehlivosti $1 - \alpha$ (n pevné známé)

Úvod, značení

- X … počet „úspěchů“ v n nezávislých pokusech, pravděpodobnost úspěchu p
- $X \sim Binom(n, p)$, tj.

$$P_p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

- Úloha: oboustranný konfidenční interval $CI = [p_L, p_U]$ pro p na hladině spolehlivosti $1 - \alpha$ (n pevné známé)
- Budeme se zabývat jen exaktními (konzervativními) CI – pro funkci pokrytí $cover(p) = P_p(p \in CI)$ platí na $[0, 1]$ $cover(p) \geq 1 - \alpha$

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“
  - $p_L = 0$ pro $k = 0$, $p_U = 1$ pro $k = n$, jinak

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“
  - $p_L = 0$ pro $k = 0$, $p_U = 1$ pro $k = n$, jinak
  - $P_{p_L}(X \geq k) = \alpha/2$

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“
  - $p_L = 0$ pro $k = 0$, $p_U = 1$ pro $k = n$, jinak
  - $P_{p_L}(X \geq k) = \alpha/2$
  - $P_{p_U}(X \leq k) = \alpha/2$

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“
  - $p_L = 0$ pro $k = 0$, $p_U = 1$ pro $k = n$, jinak
  - $P_{p_L}(X \geq k) = \alpha/2$
  - $P_{p_U}(X \leq k) = \alpha/2$
- Jinak:

$$CI^{CP} = \{p; P_p(X \geq k) \geq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(X \leq k) \geq \alpha/2\}$$

Clopper-Pearsonův („exaktní“) CI

Clopper & Pearson (Biometrika 1934)

- $CI^{CP} = [p_L, p_U]$, kde při k „úspěších“
  - $p_L = 0$ pro $k = 0$, $p_U = 1$ pro $k = n$, jinak
  - $P_{p_L}(X \geq k) = \alpha/2$
  - $P_{p_U}(X \leq k) = \alpha/2$
- Jinak:

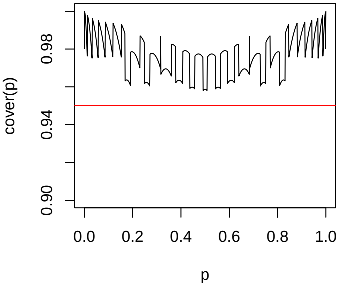
$$CI^{CP} = \{p; P_p(X \geq k) \geq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(X \leq k) \geq \alpha/2\}$$

- Výpočet $p_L, p_U \sim$ kvantily rozdělení F nebo *Beta*

Nevýhody Clopper-Pearsonova CI

Clopper-Pearsonův CI je příliš konzervativní:

$$cover(p) = P_p(p \in CI) \text{ pro } n = 20 \text{ a } 1 - \alpha = 0.95$$



- Často $\forall p \quad cover(p) \gg 1 - \alpha$
- $cover(p) \geq 1 - \alpha/2$ blízko krajních hodnot (0, 1).

Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

- Clopper-Pearson:

$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$

Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

- Clopper-Pearson:
$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$
- Méně konzervativní alternativy:
$$P_p(p < p_L) + P_p(p_U < p) \leq \alpha,$$
ale může být
$$P_p(p < p_L) > \alpha/2 \ \text{ nebo } \ P_p(p_U < p) > \alpha/2$$

Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

- Clopper-Pearson:
$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$

- Méně konzervativní alternativy:
$$P_p(p < p_L) + P_p(p_U < p) \leq \alpha,$$
ale může být
$$P_p(p < p_L) > \alpha/2 \ \text{ nebo } \ P_p(p_U < p) > \alpha/2$$

- Různé návrhy:

Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

- Clopper-Pearson:
$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$
- Méně konzervativní alternativy:
$$P_p(p < p_L) + P_p(p_U < p) \leq \alpha,$$
ale může být
$$P_p(p < p_L) > \alpha/2 \ \text{ nebo } \ P_p(p_U < p) > \alpha/2$$
- Různé návrhy:
  - Sterne a Crow (1954, 1956)

Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

- Clopper-Pearson:
$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$

- Méně konzervativní alternativy:
$$P_p(p < p_L) + P_p(p_U < p) \leq \alpha,$$
ale může být
$$P_p(p < p_L) > \alpha/2 \ \text{ nebo } \ P_p(p_U < p) > \alpha/2$$

- Různé návrhy:
  - Sterne a Crow (1954, 1956)
  - Blyth, Still a Casella (1983, 1986)

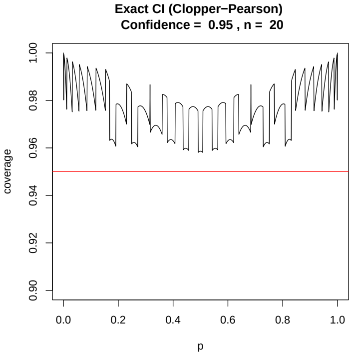
Exaktní alternativy ke Clopper-Pearsonovu CI

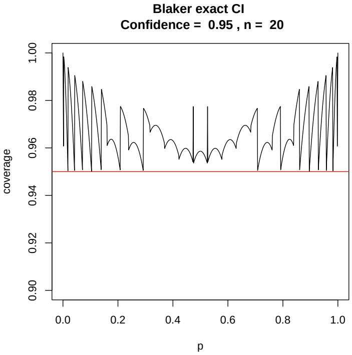
- Clopper-Pearson:
$$P_p(p < p_L) \leq \alpha/2 \quad \& \quad P_p(p_U < p) \leq \alpha/2$$

- Méně konzervativní alternativy:
$$P_p(p < p_L) + P_p(p_U < p) \leq \alpha,$$
ale může být
$$P_p(p < p_L) > \alpha/2 \ \text{ nebo } \ P_p(p_U < p) > \alpha/2$$

- Různé návrhy:
  - Sterne a Crow (1954, 1956)
  - Blyth, Still a Casella (1983, 1986)
  - Blaker (Canad. J. Statist. 2000)
    Výpočetně jednoduchý - krátký program v R,
    viz cit. práce nebo web A. Agrestiho

Clopper-Pearsonův vs. Blakerův CI (příklad)





Blakerův konfidenční interval

Clopper-Pearsonův CI alternativně:

Blakerův konfidenční interval

Clopper-Pearsonův CI alternativně:

- Konfidenční funkce pro dané n a k:

$$\beta^{CP}(p) = \min\{2P_p(X \geq k), 2P_p(X \leq k), 1\}$$

Blakerův konfidenční interval

Clopper-Pearsonův CI alternativně:

- Konfidenční funkce pro dané n a k:

$$\beta^{CP}(p) = \min\{2P_p(X \geq k), 2P_p(X \leq k), 1\}$$

- $CI^{CP} = \{p; \beta^{CP}(p) \geq \alpha\}$

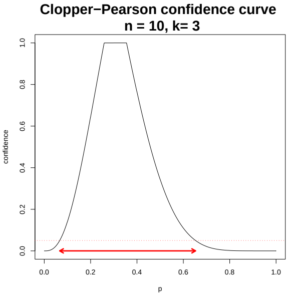
Blakerův konfidenční interval

Clopper-Pearsonův CI alternativně:

- Konfidenční funkce pro dané n a k:

$$\beta^{CP}(p) = \min\{2P_p(X \geq k), 2P_p(X \leq k), 1\}$$

- $CI^{CP} = \{p; \beta^{CP}(p) \geq \alpha\}$



Blakerův konfidenční interval - definice

- Analogicky jako Clopper-Pearson
  $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

Blakerův konfidenční interval - definice

- Analogicky jako Clopper-Pearson
  $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

- Konfidenční funkce pro dané n a k:
  $$\beta^B(p) = \min\{P_p(X \geq k) + P_p(X \leq k^*), \\ P_p(X \leq k) + P_p(X \geq k^{**}), 1\}$$

Blakerův konfidenční interval - definice

- Analogicky jako Clopper-Pearson
  $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

- Konfidenční funkce pro dané n a k:
  $$\beta^B(p) = \min\{P_p(X \geq k) + P_p(X \leq k^*), \\ P_p(X \leq k) + P_p(X \geq k^{**}), 1\}$$

- k^* …největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

Blakerův konfidenční interval - definice

- Analogicky jako Clopper-Pearson
  $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

- Konfidenční funkce pro dané n a k:
  $$\beta^B(p) = \min\{P_p(X \geq k) + P_p(X \leq k^*),\\ P_p(X \leq k) + P_p(X \geq k^{**}), 1\}$$

- k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

- k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

Blakerův konfidenční interval - definice

- Analogicky jako Clopper-Pearson
  $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

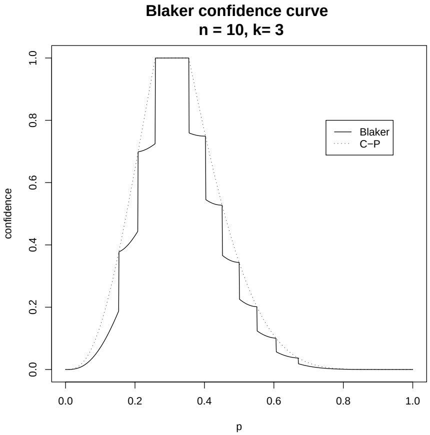
- Konfidenční funkce pro dané n a k:
  $$\beta^B(p) = \min\{P_p(X \geq k) + P_p(X \leq k^*), \\ P_p(X \leq k) + P_p(X \geq k^{**}), 1\}$$

- k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

- k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- Platí $P_p(p \in CI^B) \geq 1 - \alpha$
  (předpoklad $X \sim Binom(n, p)$ zatím nadbytečný)

Blakerova konfidenční křivka



Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)

- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)
- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$
- $\beta^B \leq 1$, $\beta^B(k/n) = 1$

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)
- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$
- $\beta^B \leq 1$, $\beta^B(k/n) = 1$
- Funkce β^B je spojitá všude kromě bodů p, kde

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
(není u jiných „méně konzervativních“
alternativ CI^{CP} samozřejmost)

- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$

- $\beta^B \leq 1$, $\beta^B(k/n) = 1$

- Funkce β^B je spojitá všude kromě bodů p, kde
  - $p < k/n$ a $P_p(X \geq k) = P_p(X \leq i)$ pro nějaké i

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)
- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$
- $\beta^B \leq 1$, $\beta^B(k/n) = 1$
- Funkce β^B je spojitá všude kromě bodů p, kde
  - $p < k/n$ a $P_p(X \geq k) = P_p(X \leq i)$ pro nějaké i
  - $p > k/n$ a $P_p(X \leq k) = P_p(X \geq i)$ pro nějaké i

Vlastnosti β^B a CI^B

- $\alpha' < \alpha \Rightarrow CI^B_{1-\alpha} \subseteq CI^B_{1-\alpha'}$
  (není u jiných „méně konzervativních“ alternativ CI^{CP} samozřejmost)
- $\beta^B \leq \beta^{CP} \Rightarrow CI^B \subseteq CI^{CP}$
- $\beta^B \leq 1$, $\beta^B(k/n) = 1$
- Funkce β^B je spojitá všude kromě bodů p, kde
  - $p < k/n$ a $P_p(X \geq k) = P_p(X \leq i)$ pro nějaké i
  - $p > k/n$ a $P_p(X \leq k) = P_p(X \geq i)$ pro nějaké i
- V bodech nespojitosti funkce β^B platí $\beta^B(p) = \beta^{CP}(p)$

Výpočet CI^B – „autorský“ algoritmus

- Krátký program v R v článku Blaker (2000), corrigenda Blaker (2001) (chybu našel a opravil Jenö Reiczigel), viz též web A. Agrestiho

Výpočet CI^B – „autorský“ algoritmus

- Krátký program v R v článku Blaker (2000), corrigenda Blaker (2001) (chybu našel a opravil Jenö Reiczigel), viz též web A. Agrestiho
- Výpočet levé/pravé Blakerovy konfidenční meze: Numericky se hledá, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko:

Výpočet CI^B – „autorský“ algoritmus

- Krátký program v R v článku Blaker (2000), corrigenda Blaker (2001) (chybu našel a opravil Jenö Reiczigel), viz též web A. Agrestiho
- Výpočet levé/pravé Blakerovy konfidenční meze: Numericky se hledá, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko:
  1. Start v Clopper-Pearsonově mezi ($CI^B \subseteq CI^{CP}$!)

Výpočet CI^B – „autorský“ algoritmus

- Krátký program v R v článku Blaker (2000), corrigenda Blaker (2001) (chybu našel a opravil Jenö Reiczigel), viz též web A. Agrestiho

- Výpočet levé/pravé Blakerovy konfidenční meze: Numericky se hledá, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko:
  1. Start v Clopper-Pearsonově mezi ($CI^B \subseteq CI^{CP}$!)
  2. Postupuj směrem ke k/n s konstantním krokem (default 10^{-4})

Výpočet CI^B – „autorský“ algoritmus

- Krátký program v R v článku Blaker (2000), corrigenda Blaker (2001) (chybu našel a opravil Jenö Reiczigel), viz též web A. Agrestiho

- Výpočet levé/pravé Blakerovy konfidenční meze: Numericky se hledá, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko:
  1. Start v Clopper-Pearsonově mezi ($CI^B \subseteq CI^{CP}$!)
  2. Postupuj směrem ke k/n s konstantním krokem (default 10^{-4})
  3. Skončit, když poprvé $\beta^B(p) \geq \alpha$ – řešením je p z předcházející iterace

Blakerův algoritmus: co proti němu mám?

Blakerův algoritmus: co proti němu mám?

- Trpím předsudkem, že konstantní krok je ostuda

Blakerův algoritmus: co proti němu mám?

- Trpím předsudkem, že konstantní krok je ostuda
- Při větší požadované přesnosti konvergence pomalá

Blakerův algoritmus: co proti němu mám?

- Trpím předsudkem, že konstantní krok je ostuda
- Při větší požadované přesnosti konvergence pomalá
- Metoda může selhat (vysvětlím později)

Pokus o vylepšení algoritmu (a jak dopadl)

- Co tak bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko, hledat mezi Clopper-Pearsonovou mezí a k/n půlením intervalu?

Pokus o vylepšení algoritmu (a jak dopadl)

- Co tak bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko, hledat mezi Clopper-Pearsonovou mezí a k/n půlením intervalu?
- Konvergence rychlá, ale intervaly nejsou exaktní:
  Např. pro $n = 350$ a $\alpha = 0.05$ je
  $\min_{p \in [0,1]} cover(p) \approx 0.9498 < 0.95$

Pokus o vylepšení algoritmu (a jak dopadl)

- Co tak bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko, hledat mezi Clopper-Pearsonovou mezí a k/n půlením intervalu?
- Konvergence rychlá, ale intervaly nejsou exaktní:
  Např. pro $n = 350$ a $\alpha = 0.05$ je
  $\min_{p \in [0,1]} cover(p) \approx 0.9498 < 0.95$
- Rozdíl mezi $\min_{p \in [0,1]} cover(p)$ a $1 - \alpha$ je malý, nedá se ale přičíst jen numerickým nepřesnostem

Pokus o vylepšení algoritmu (a jak dopadl)

- Co tak bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko, hledat mezi Clopper-Pearsonovou mezí a k/n půlením intervalu?
- Konvergence rychlá, ale intervaly nejsou exaktní:
  Např. pro $n = 350$ a $\alpha = 0.05$ je
  $\min_{p\in[0,1]} cover(p) \approx 0.9498 < 0.95$
- Rozdíl mezi $\min_{p\in[0,1]} cover(p)$ a $1 - \alpha$ je malý, nedá se ale přičíst jen numerickým nepřesnostem
- Blakerův algoritmus při týchž parametrech n, α dává $\min_{p\in[0,1]} cover(p) \geq 0.95$

Pokus o vylepšení algoritmu (a jak dopadl)

- Co tak bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko, hledat mezi Clopper-Pearsonovou mezí a k/n půlením intervalu?

- Konvergence rychlá, ale intervaly nejsou exaktní:
  Např. pro $n = 350$ a $\alpha = 0.05$ je
  $\min_{p\in[0,1]} cover(p) \approx 0.9498 < 0.95$

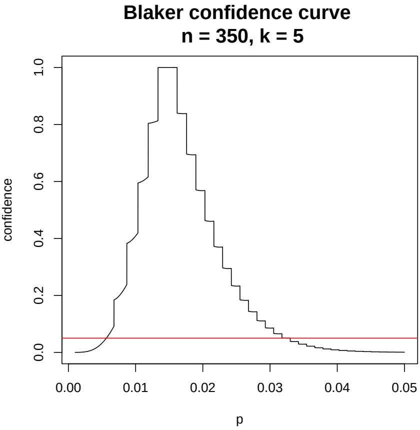
- Rozdíl mezi $\min_{p\in[0,1]} cover(p)$ a $1 - \alpha$ je malý, nedá se ale přičíst jen numerickým nepřesnostem

- Blakerův algoritmus při týchž parametrech n, α dává $\min_{p\in[0,1]} cover(p) \geq 0.95$

- Co se děje?

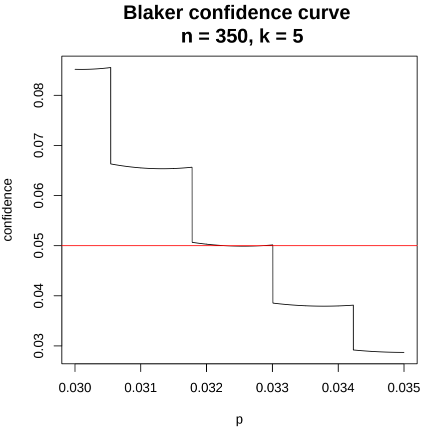
Co se děje?

Sledujme znaménko $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ pro $n = 350, k = 5$



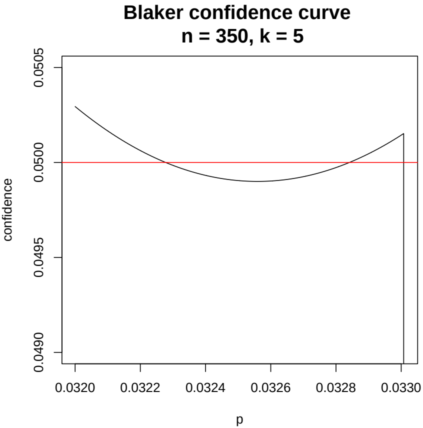
Co se děje?

Sledujme znaménko $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ pro $n = 350, k = 5$



Co se děje?

Sledujme znaménko $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ pro $n = 350, k = 5$



Co se děje

Co se děje

- Funkce β^B na intervalech $[0, k/n]$ a $[k/n, 1]$ na první pohled vypadá jako monotónní, ale není (jak konstatuje i Blaker)

Co se děje

- Funkce β^B na intervalech $[0, k/n]$ a $[k/n, 1]$ na první pohled vypadá jako monotónní, ale není (jak konstatuje i Blaker)
- $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$ nemusí být interval

Co se děje

- Funkce β^B na intervalech $[0, k/n]$ a $[k/n, 1]$
  na první pohled vypadá jako monotónní, ale není
  (jak konstatuje i Blaker)

- $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$ nemusí být interval

- Chceme-li interval, musíme vzít $conv(CI^B)$
  a numericky hledat $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$
  a $p_U = \max\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

Co se děje

- Funkce β^B na intervalech $[0, k/n]$ a $[k/n, 1]$ na první pohled vypadá jako monotónní, ale není (jak konstatuje i Blaker)
- $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$ nemusí být interval
- Chceme-li interval, musíme vzít $conv(CI^B)$ a numericky hledat $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$ a $p_U = \max\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$
- Půlení intervalu může konvergovat k jiným bodům, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko

Co se děje

- Funkce β^B na intervalech $[0, k/n]$ a $[k/n, 1]$
  na první pohled vypadá jako monotónní, ale není
  (jak konstatuje i Blaker)

- $CI^B = \{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$ nemusí být interval

- Chceme-li interval, musíme vzít $conv(CI^B)$
  a numericky hledat $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$
  a $p_U = \max\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\}$

- Půlení intervalu může konvergovat k jiným bodům,
  kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ mění znaménko

- Totéž se může stát i při iteracích s konstantním krokem,
  jen ne tak snadno

Nový algoritmus

- Lze dosáhnout konvergence
  - rychlé,
  - bezpečně ke správným bodům p_L, p_U?

Nový algoritmus

- Lze dosáhnout konvergence
  - rychlé,
  - bezpečně ke správným bodům p_L, p_U?
- Ano, když využijeme, co se dá dokázat o průběhu β^B

Nový algoritmus – předpoklady

Nový algoritmus – předpoklady

- β^B na intervalu, kde je spojitá, je také kvazikonvexní, tj. $a < b < c \Rightarrow \beta^B(b) \leq \max(\beta^B(a), \beta^B(c))$

Nový algoritmus – předpoklady

- β^B na intervalu, kde je spojitá, je také kvazikonvexní, tj. $a < b < c \Rightarrow \beta^B(b) \leq \max(\beta^B(a), \beta^B(c))$
- Jak to: Na takovém intervalu

$$\beta^B(p) = 1 - P_p(i \leq X \leq j),$$

pro nějaká i, j

Nový algoritmus – předpoklady

- β^B na intervalu, kde je spojitá, je také kvazikonvexní, tj. $a < b < c \Rightarrow \beta^B(b) \leq \max(\beta^B(a), \beta^B(c))$
- Jak to: Na takovém intervalu

$$\beta^B(p) = 1 - P_p(i \leq X \leq j),$$

pro nějaká i, j

- $\rightarrow$ Když
  - $\beta^B(p_0) < \alpha$, $\beta^B(p_1) > \alpha$,
  - mezi p_0 a p_1 není nespojitost,

mění $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ znaménko mezi p_0 a p_1 v jediném bodě (lze najít půlením intervalu)

Nový algoritmus – předpoklady

Nový algoritmus – předpoklady

- Nechť
  - p_0 je dolní mez CI^{CP} na hladině spolehlivosti $1 - \alpha$,
  - p_1 je nejbližší bod nespojitosti β^B vpravo od p_0.

  Potom $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\} \leq p_1$

Nový algoritmus – předpoklady

- Nechť
  - p_0 je dolní mez CI^{CP} na hladině spolehlivosti $1-\alpha$,
  - p_1 je nejbližší bod nespojitosti β^B vpravo od p_0.

  Potom $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\} \leq p_1$
- Analogicky pro horní mez p_U

Nový algoritmus – předpoklady

- Nechť
  - p_0 je dolní mez CI^{CP} na hladině spolehlivosti $1 - \alpha$,
  - p_1 je nejbližší bod nespojitosti β^B vpravo od p_0.

  Potom $p_L = \min\{p; \beta^B(p) \geq \alpha\} \leq p_1$
- Analogicky pro horní mez p_U
- Jak to:
  $\beta^B(p_1) = \beta^{CP}(p_1) > \beta^{CP}(p_0) = \alpha$

Nový algoritmus – předpoklady

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:

  k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

  k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:
  k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$
  k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$
- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:

  k^* …největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

  k^{**} …nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p
  - jsou monotónní (neryze)

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:

  k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

  k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p
  - jsou monotónní (neryze)
  - jsou konstantní v intervalech, kde β^B je spojitá,

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:

  k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

  k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p
  - jsou monotónní (neryze)
  - jsou konstantní v intervalech, kde β^B je spojitá,
  - mají tytéž body nespojitosti jako β^B,

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:

  k^* ... největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$

  k^{**} ... nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p
  - jsou monotónní (neryze)
  - jsou konstantní v intervalech, kde β^B je spojitá,
  - mají tytéž body nespojitosti jako β^B,
  - mají v těchto bodech vesměs skok velikosti 1

Nový algoritmus – předpoklady

- Připomeňme z definice β^B:
  k^* ...největší i takové, že $P_p(X \geq k) \geq P_p(X \leq i)$
  k^{**} ...nejmenší i takové, že $P_p(X \leq k) \geq P_p(X \geq i)$

- k^* a k^{**} závisí na p a jakožto funkce p
  - jsou monotónní (neryze)
  - jsou konstantní v intervalech, kde β^B je spojitá,
  - mají tytéž body nespojitosti jako β^B,
  - mají v těchto bodech vesměs skok velikosti 1

- $\rightarrow$ Body nespojitosti β^B lze numericky snadno hledat jako body, kde k^* nebo k^{**} mají skok (např. půlením intervalu)

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

1. Za p_0 vezmeme dolní mez CI^{CP}

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

1. Za p_0 vezmeme dolní mez CI^{CP}
2. Pokud $\beta^B(p_0) \geq \alpha$, pak $p_L = p_0$, konec

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

1. Za p_0 vezmeme dolní mez CI^{CP}
2. Pokud $\beta^B(p_0) \geq \alpha$, pak $p_L = p_0$, konec
3. Jinak: Najdi (např. půlením intervalu) $p_1 > p_0$ jako nejbližší bod nespojitosti β^B

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

1. Za p_0 vezmeme dolní mez CI^{CP}
2. Pokud $\beta^B(p_0) \geq \alpha$, pak $p_L = p_0$, konec
3. Jinak: Najdi (např. půlením intervalu) $p_1 > p_0$ jako nejbližší bod nespojitosti β^B
4. Pokud $\lim_{p \to p_1^-} \beta^B(p) > \alpha$, najdi mezi p_0 a p_1 (půlením intervalu) p_L jako bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ střídá znaménko, konec

Nový algoritmus – popis

Uvedu pro dolní mez p_L (horní analogicky)

1. Za p_0 vezmeme dolní mez CI^{CP}
2. Pokud $\beta^B(p_0) \geq \alpha$, pak $p_L = p_0$, konec
3. Jinak: Najdi (např. půlením intervalu) $p_1 > p_0$ jako nejbližší bod nespojitosti β^B
4. Pokud $\lim_{p \to p_1^-} \beta^B(p) > \alpha$, najdi mezi p_0 a p_1 (půlením intervalu) p_L jako bod, kde $\left(\beta^B(p) - \alpha\right)$ střídá znaménko, konec
5. Jinak: $p_L = p_1$

Závěr

- Příspěvek připravován nakvap, proto omluvy:

Závěr

- Příspěvek připravován nakvap, proto omluvy:
  - Výklad nebyl dost piktoriální

Závěr

- Příspěvek připravován nakvap, proto omluvy:
  - Výklad nebyl dost piktoriální
  - K systematičtějšímu porovnání výsledků algoritmů se teprve chystám

Závěr

- Příspěvek připravován nakvap, proto omluvy:
  - Výklad nebyl dost piktoriální
  - K systematičtějšímu porovnání výsledků algoritmů se teprve chystám
  - Lepší příklady než $n = 350$ snad budou časem

Závěr

- Příspěvek připravován nakvap, proto omluvy:
  - Výklad nebyl dost piktoriální
  - K systematičtějšímu porovnání výsledků algoritmů se teprve chystám
  - Lepší příklady než $n = 350$ snad budou časem

- Nemínil jsem Blakerův interval bezhlavě propagovat – za nudných robustních večerů si hodlám číst článek Vos & Hudson (2008), k Blakerovu CI značně kritický

Děkuji:

Děkuji:

Petrovi Savickému za podnětnou mailovou diskusi
20.–26.1.2010

Děkuji:

Ctěnému publiku za pozornost