Jiří Janáček
FgÚ AV ČR, Praha
Robust 2010

VARIANCE ODHADŮ PLOCHY A DÉLKY POMOCÍ PERIODICKÝCH MŘÍŽEK

Měření ploch a délek, význam.

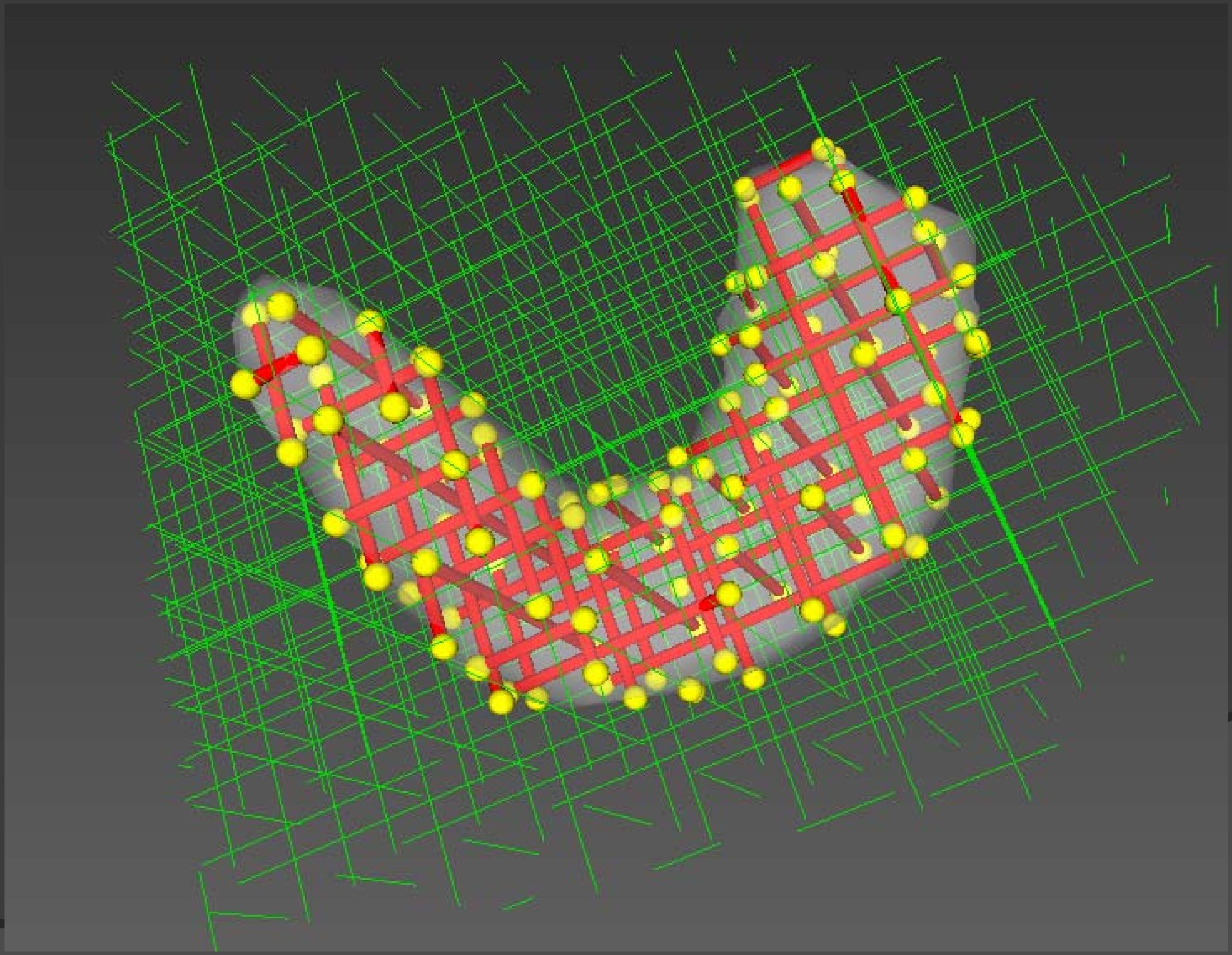
- Plocha povrchu orgánů nebo délková hustota krevních vlásečnic ovlivňují funkci, látkovou výměnu.
- Konfokální mikroskopie umožňuje získat 3D obrazy vzorků tkání.
- Automatické metody fungují jen pro velmi kvalitní snímky.

Prostorové mřížky

- Při náhodné pozici (rotace a posun) je střední hodnota míry průsečíků objektu s mřížkou úměrná rozměru objektu a hustotě mřížky. Pro plochu a délku odvodil už Barbier 1860.
- Periodické mřížky se snáze konstruují a snáze se počítá variance (kompaktní oblast, Fourierovy řady), zvláště když jsou tvořeny rovnoběžnými přímkami nebo rovinami.

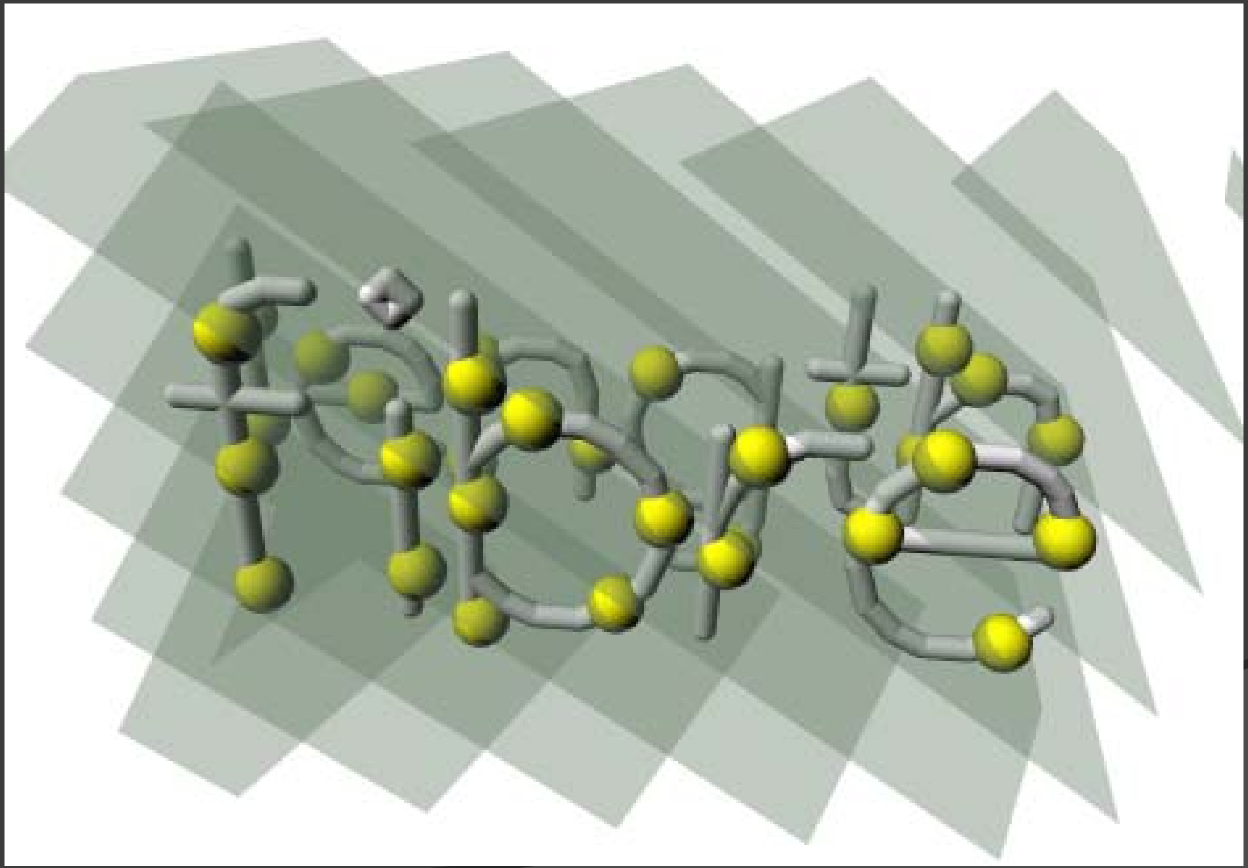
Čárová mřížka v R^3

$$est\ S(X) = 2\#(\delta X \cap G)\,\alpha^{-1}$$



Plošná mřížka v R^3

$$est\ L(X) = 2\#(X \cap G)\,\alpha^{-1}$$



Mřížka rovnoběžných čar v R^3

- Konvexní těleso *K* v náhodné poloze *T*.
- Projekce *P* tělesa *TK* do roviny *xy.*
- Počet bodů z uZ^2 v *PTK* krát 2 je počet průsečíků povrchu *TK* s mřížkou rovnoběžných čar.
- … krát 2 je odhad povrchu tělesa *K*.
- Variance odhadu?

Variance počtu mřížkových bodů v tělese z R^d

- Kovariogram $\gamma_K(x) = \lambda^d(K \cap x + K)$
- Izotropní k. $\bar{\gamma}_K(x) = \int_{S^{d-1}} \gamma_K(|x|y)\,dy$
- 2. moment $EN^2 = u^{-d} \sum_{x \in uZ^d} \bar{\gamma}_K(x)$

Vlastnosti kovariogramu

- Kovariogram $\gamma_K(x) = \lambda^d(K \cap x + K)$

$$\gamma_K(0) = \lambda^d(K)$$

$$\int_{R^d} \gamma_K(x)dx = \lambda^d(K)^2$$

- Fourierova transformace

$$\hat{\gamma}_K(\zeta) = \int_{R^d} \bar{\gamma}_K(x) e^{-2\pi i x \zeta} dx$$

Variance počtu mřížkových bodů v tělese z R^d

- Poissonův sumační vzorec dává:

$$EN^2 = u^{-d} \sum_{x \in uZ^d} \overline{\gamma}_K(x) = u^{-2d} \sum_{x \in u^{-1}Z^d} \hat{\gamma}_K(x)$$

- Variance

$$\operatorname{var} N = u^{-d} \sum_{x \in uZ^d} \overline{\gamma}_K(x) - u^{-2d} \hat{\gamma}_K(0) = u^{-2d} \sum_{x \in u^{-1}Z^d - \{0\}} \hat{\gamma}_K(x)$$

Asymptotický vztah

- Nechť $\bar{\gamma}'^{+}_{K}(0)$ existuje a $\zeta^{d+1}\hat{\gamma}_K(\zeta)$ je omezené. Pak

$$\operatorname{var} N = CS(K)\Phi\left(u^{-1}\right)u^{-d+1}$$

$$C = \frac{1}{2\pi^2 S(B_d)} \sum_{x \in Z^d - \{0\}} |x|^{-d-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \Phi(t)\,dt = 1$$

- Předpoklady platí pro konvexní tělesa, pro tělesa s $C^{3/2}$ hladkou hranicí.

Mřížka rovnoběžných čar v R^3

- Variance odhadu plochy průmětu = variance daná otočením + reziduální v.

$$\operatorname{var} u^2 N = \underset{O\in SO_3}{\operatorname{var}} E u^2 N \mid O + \underset{O\in SO_3}{E} \operatorname{var} u^2 N \mid O$$

$$\underset{O\in SO_3}{\operatorname{var}} E u^2 N \mid O = \underset{O\in SO_3}{E} S^2(POK) - \left(\underset{O\in SO_3}{E} S(POK) \right)^2$$

$$\underset{O\in SO_3}{E} \operatorname{var} u^2 N \mid O = u^2 \sum_{x\in uZ^2} \bar{\gamma}_K^P(x) - \underset{O\in SO_3}{E} S^2(POK) = \sum_{x\in u^{-1}Z^2-\{0\}} \hat{\bar{\gamma}}_K^P(x)$$

$$\bar{\gamma}_K^P = \underset{O\in SO_3}{E} \bar{\gamma}_{POK}(x)$$

Variance daná otočením

$$\operatorname*{var}_{O\in SO_3} S(POK) = \mathop{E}_{O\in SO_3} S^2(POK) - \left(\mathop{E}_{O\in SO_3} S(POK)\right)^2$$

- Pro konvexní $\mathop{E}_{O\in SO_3} S(POK) = \frac{1}{4} S(K)$
- Pro k. polyedr $4 \mathop{E}_{O\in SO_3} S^2(POK) =$

$$= \mathop{E}_{O\in SO_3}\left(\sum_{i\in I} A_i \left|(On_i, e_3)\right|\right)^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} A_i A_j \mathop{E}_{O\in SO_3}\left|(On_i, e_3)(On_j, e_3)\right|$$

$$\mathop{E}_{O\in SO_3}\left|(On_i, e_3)(On_j, e_3)\right| = K_3\left(\arccos\left|(n_i, n_j)\right|\right)$$

Variance daná otočením

$$K_d(\psi) = \frac{2}{d\pi}\left(\sin\psi + \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos\psi\right)$$

- Nechť je F rozdělení úhlů mezi normálovými přímkami

$$\operatorname*{var}_{O \in SO_3} S(POK) = \left(\frac{1}{4} S(K)\right)^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} K_d(\psi)\,dF(\psi) - 1\right)$$

Asymptotický vztah pro residuální varianci

- H je střední šířka

$$\mathop{E}_{O \in SO_3} \operatorname{var} u^2 N \mid O = CH\left(K\right)\Phi\left(u^{-1}\right)u^3$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{x \in Z^2 - \{0\}} \left|x\right|^{-3}$$

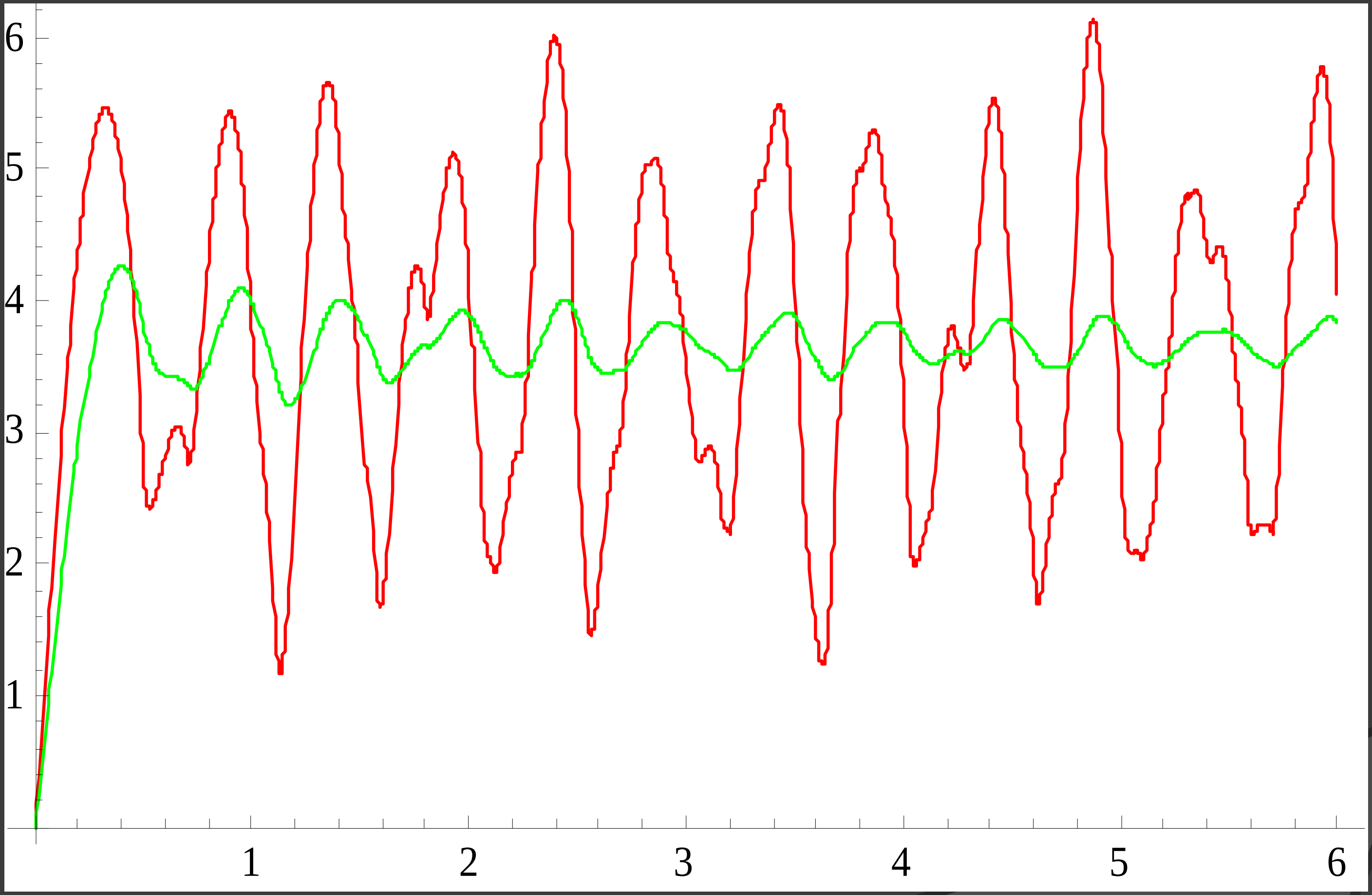
Koule a disk

- Kovariogramy

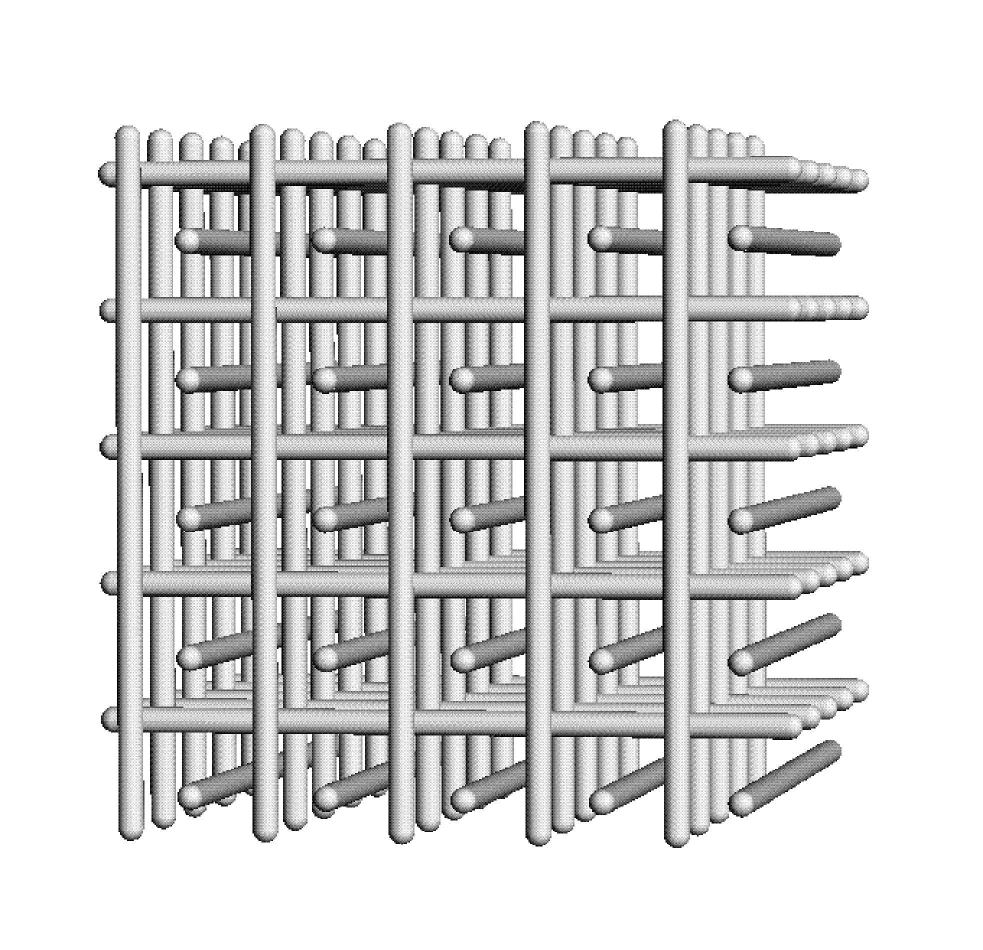
$$\bar{\gamma}^{P}_{B_3}(h) = \gamma_{B_2}(h) = 2\left(\arccos\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\sqrt{1 - \frac{h^2}{4}} \right)$$

$$\bar{\gamma}^{P}_{D_2}(h) = \frac{\pi}{4}(2 - h)^2$$

Koule a disk, $16C\Phi(R)$



Trojnásobná mřížka



Variance daná otočením

- Pro konvexní polyedr

$$\mathop{E}_{O\in SO_3}\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i\in I}A_i\left|(On_i,e_k)\right|\right)^2=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}A_iA_j\mathop{E}_{O\in SO_3}\left|(On_i,e_k)(On_j,e_l)\right|$$

$$\mathop{E}_{O\in SO_3}\left|(On_i,e_k)(On_j,e_l)\right|=K_3\left(\arccos\left|(n_i,n_j)\right|,\arccos\left|(e_k,e_l)\right|\right)$$

$$K_3(\psi,0)=\frac{2}{3\pi}\left(\sin\psi+\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\cos\psi\right)$$

$$K_3\left(\psi,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3\pi^2}\left(2E(\sin\psi)-\cos^2\psi\;K(\cos\psi)\right)$$

Variance daná otočením

$$\operatorname*{var}_{O\in SO_3} estS(K) = S(K)^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K_3(\psi,\chi)\,dF(\psi)\,dG(\chi) - 1\right)$$

- F je rozdělení úhlů mezi normálovými přímkami, G je rozdělení úhlů mezi tečnami

- SD, 1 směr disk 0.58 válec 0.28
- SD, 3 směry disk 0.10 válec 0.04

Reziduální variance

- 9var je

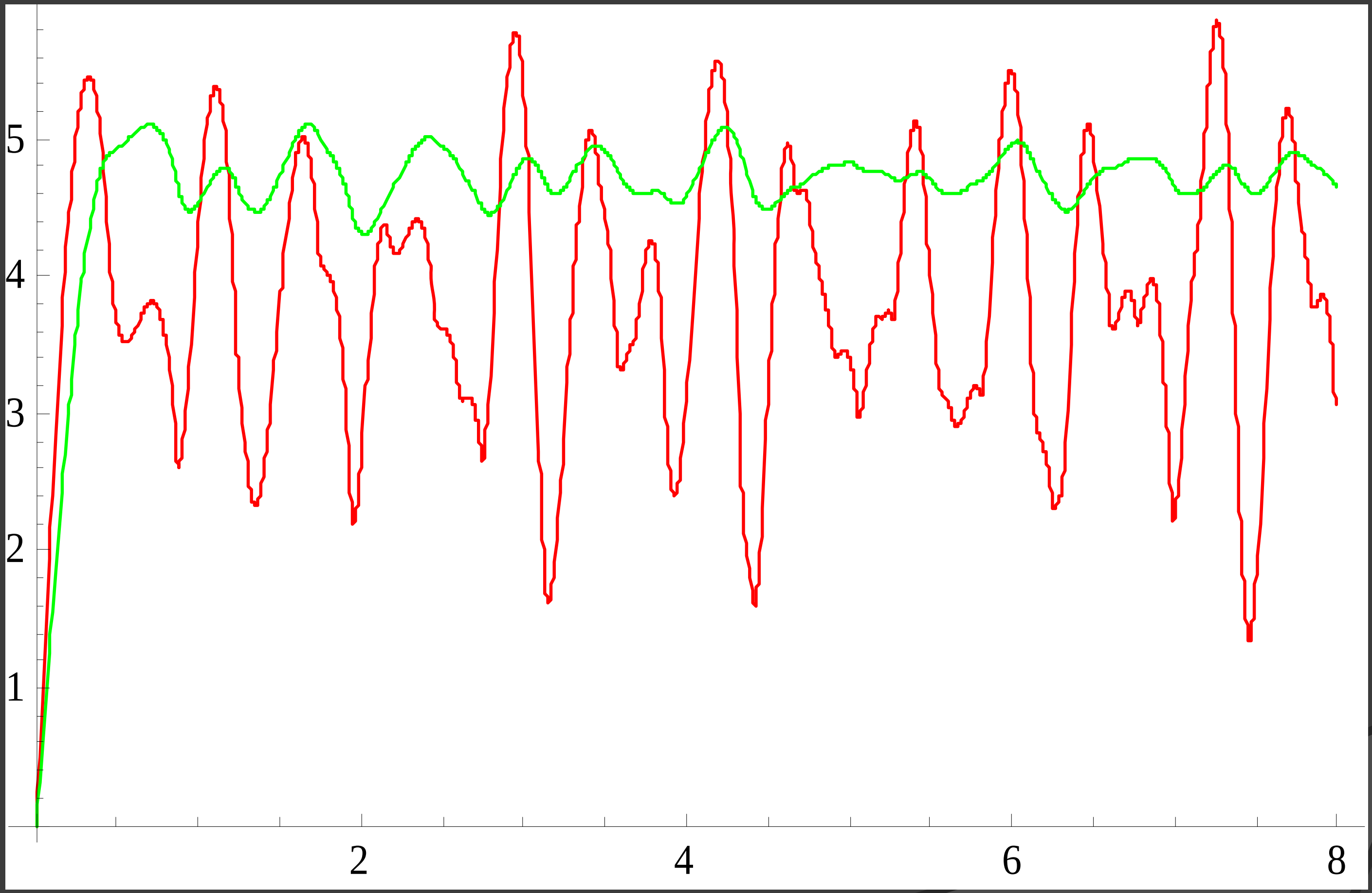
$$3u^2 \sum_{x\in uZ^2} \bar{\gamma}_K^P(x) + 6u \sum_{x\in u(Z+0.5)} \bar{\gamma}_K^M(x) - \underset{O\in SO_3}{E}\left(\sum_{i=1}^{3} S(P_iOK)\right)^2$$

kde pro kouli a disk

$$\bar{\gamma}_{B_3}^M(h) = M\gamma_{B_2}(h) = \frac{16}{3}\left(1+\frac{h}{2}\right)\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)E\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 - hK\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2\right)$$

$$\bar{\gamma}_{D_2}^M(h) = \frac{1}{6}\left(\left(2+h^2\right)\sqrt{4-h^2} + 3h^2 \ln\frac{h}{2+\sqrt{4-h^2}}\right)$$

Koule a disk, reziduální v.



Asymptotický vztah pro residuální varianci

- H je střední šířka

$$\operatorname{var} estS(K) = C(K)H(K)\Phi\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^{-1}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^{3}$$

$$C(B_3) = \frac{4}{\pi^2\sqrt{3}}\left(3\sum_{x\in Z^2-\{0\}}|x|^{-3} - \frac{9}{2}\sum_{x\in Z-\{0\}}|x|^{-3}\right) \cong 3.675$$

$$C(D_2) = \frac{4}{\pi^2\sqrt{3}}\left(3\sum_{x\in Z^2-\{0\}}|x|^{-3} - \frac{9}{\pi}\sum_{x\in Z-\{0\}}|x|^{-3}\right) \cong 4.832$$

Odhad délky

- Variance daná otočením jako u plochy
- Reziduální variance odhadu pomocí rovnoběžných rovin

$$\frac{4}{3\pi}\kappa(K)u^2 \qquad \kappa(K)=\int_K |\kappa| ds + \frac{\pi}{4}N$$

kde N je počet konců a lichých větvení

Odhad délky

- Mřížka ze sfér, reziduální variance

$$C(\rho)L(K)u$$

- Jiný řád, jiná vlastnost.