

Úvod
○

Model
○○○
○○○
○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○
○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○

Modely sousledných událostí



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvení se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○
○○○
○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvení se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○
○○○
○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvení se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○
○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○



Úvod
○

Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

SET model
○○○○○○○
○○○

Větvení se model
○○○○○



Modely sousledných událostí

Gejza Dohnal

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby
České vysoké učení technické v Praze



ROBUST 2010
Králíky, 31.1.-5.2.2010

Úvod

Porucha



Katastrofa

Úvod

Porucha

náhodný výskyt v čase
nezávislá opakování
proces obnovy
rychlá oprava či obnova

×

Katastrofa

náhodný výskyt v čase
postupné šíření
domino efekt
oprava je pomalejší než šíření

Úvod

Porucha

náhodný výskyt v čase
nezávislá opakování
proces obnovy
rychlá oprava či obnova

porucha zařízení

nehoda, úraz

porucha informačního systému

dopravní nehoda

přírodní nehoda

.....

×

Katastrofa

náhodný výskyt v čase

postupné šíření

domino efekt

oprava je pomalejší než šíření

exploze, požár

nákaza, epidemie

havárie systému, pirátský útok

dopravní kolaps

přírodní katastrofa

.....

Úvod

Porucha

náhodný výskyt v čase
nezávislá opakování
proces obnovy
rychlá oprava či obnova

porucha zařízení

nehoda, úraz

porucha informačního systému

dopravní nehoda

přírodní nehoda

.....

×

Katastrofa

náhodný výskyt v čase

postupné šíření

domino efekt

oprava je pomalejší než šíření

exploze, požár

nákaza, epidemie

havárie systému, pirátský útok

dopravní kolaps

přírodní katastrofa

.....

Model → Predikce → Prevence

Úvod

Porucha

náhodný výskyt v čase
 nezávislá opakování
 proces obnovy
 rychlá oprava či obnova

porucha zařízení

nehoda, úraz

porucha informačního systému

dopravní nehoda

přírodní nehoda

.....

×

Katastrofa

náhodný výskyt v čase

postupné šíření

domino efekt

oprava je pomalejší než šíření

exploze, požár

nákaza, epidemie

havárie systému, pirátský útok

dopravní kolaps

přírodní katastrofa

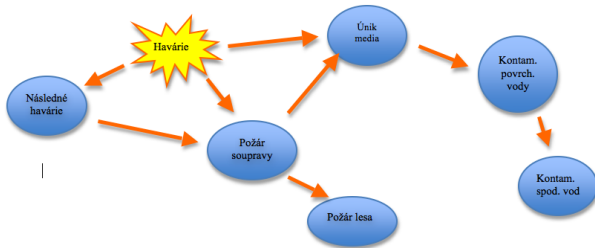
.....

Model → Predikce → Prevence

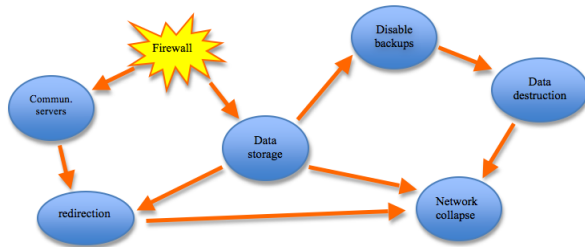
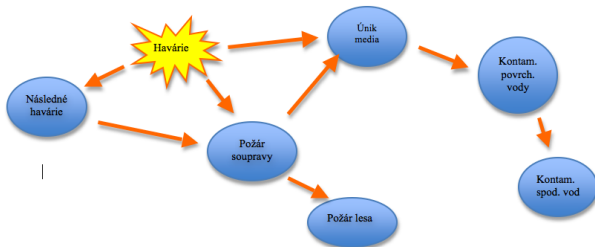
Preventivní údržbová strategie

Plán obnovy po katastrofě

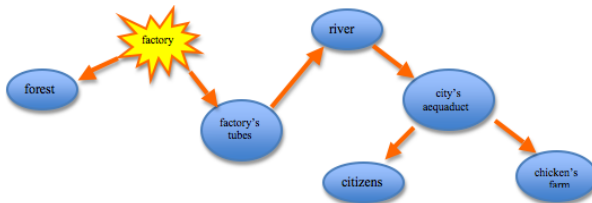
Model



Model



Model



Úvod
○

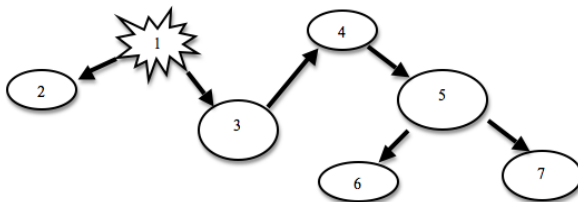
Model
○○○
○○○○
○○○○

Doba trvání systému
○○○○
○○

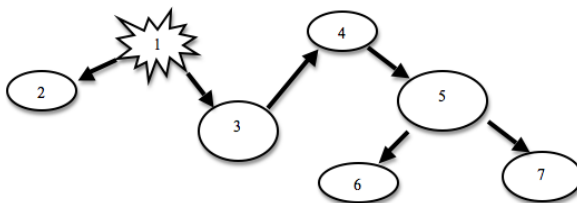
SET model
○○○○○○○
○○○

Větvící se model
○○○○○

Model



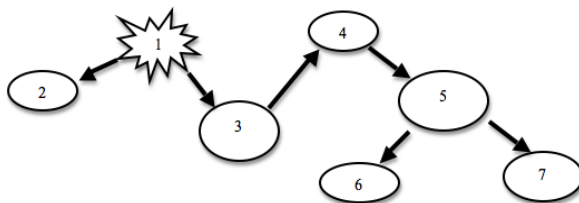
Model



Stavy systému: $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)), \quad t \geq 0,$



Model

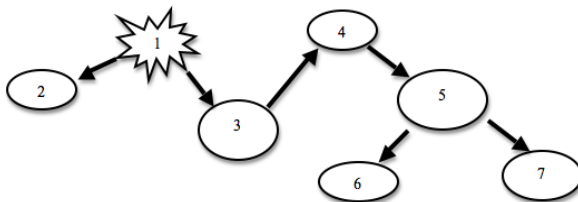


Stavy systému: $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t))$, $t \geq 0$,

- (i) na počátku (v čase 0) je systém ve stavu $\omega^0 = (0, 0, \dots, 0)$,
- (ii) proces šíření začíná napadením objektu i s pravděpodobností π_i , $i = 1, 2, \dots, n$,
- (iii) pokud je v čase t zasažen objekt i , potom existuje náhodná doba τ po které se proces rozšíří na některý z dosud nenapadených objektů,
- (iv) stavy procesu v čase t tvoří stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase. Stavy tohoto procesu leží v množině $\Omega = \{0, 1\}^n$



Model

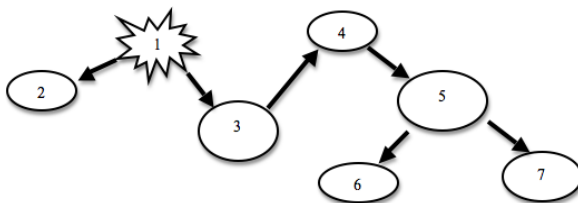


Stavy systému: $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)), \quad t \geq 0,$

- (i) na počátku (v čase 0) je systém ve stavu $\omega^0 = (0, 0, \dots, 0),$
- (ii) proces šíření začíná napadením objektu i s pravděpodobností $\pi_i, i = 1, 2, \dots, n,$
- (iii) pokud je v čase t zasažen objekt $i,$ potom existuje náhodná doba τ po které se proces rozšíří na některý z dosud nenapadených objektů,
- (iv) stavy procesu v čase t tvoří stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase. Stavy tohoto procesu leží v množině $\Omega = \{0, 1\}^n$



Model

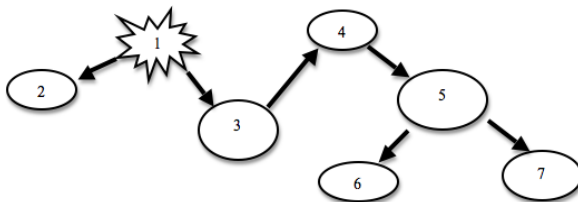


Stavy systému: $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)), \quad t \geq 0,$

- (i) na počátku (v čase 0) je systém ve stavu $\omega^0 = (0, 0, \dots, 0),$
- (ii) proces šíření začíná napadením objektu i s pravděpodobností $\pi_i, i = 1, 2, \dots, n,$
- (iii) pokud je v čase t zasažen objekt i , potom existuje náhodná doba τ po které se proces rozšíří na některý z dosud nenapadených objektů,
- (iv) stavy procesu v čase t tvoří stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase. Stavy tohoto procesu leží v množině $\Omega = \{0, 1\}^n$



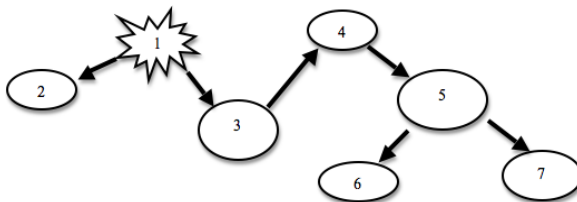
Model



Stavy systému: $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)), \quad t \geq 0,$

- (i) na počátku (v čase 0) je systém ve stavu $\omega^0 = (0, 0, \dots, 0),$
- (ii) proces šíření začíná napadením objektu i s pravděpodobností $\pi_i, i = 1, 2, \dots, n,$
- (iii) pokud je v čase t zasažen objekt $i,$ potom existuje náhodná doba τ po které se proces rozšíří na některý z dosud nenapadených objektů,
- (iv) stavy procesu v čase t tvoří stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase. Stavy tohoto procesu leží v množině $\Omega = \{0, 1\}^n$

Model

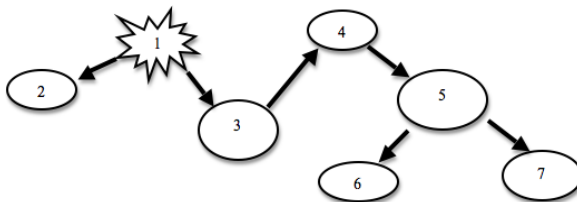


Příklad: $n = 7$ $\pi = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Ze všech 2^7 možných stavů je pouze 14 možných:

$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
 $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$,
 $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$,
 $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Model 1

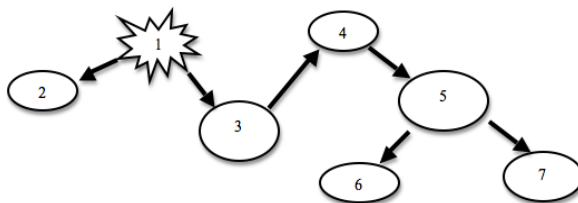


Model 1 – Jednosměrný model

Uvažujme následující dodatečné předpoklady:



Model 1



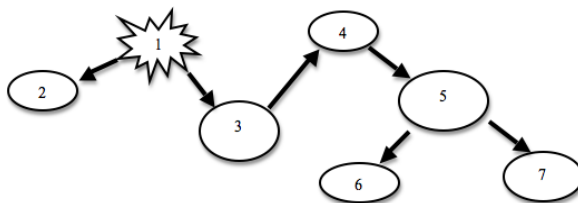
Model 1 – Jednosměrný model

Uvažujme následující dodatečné předpoklady:

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).



Model 1



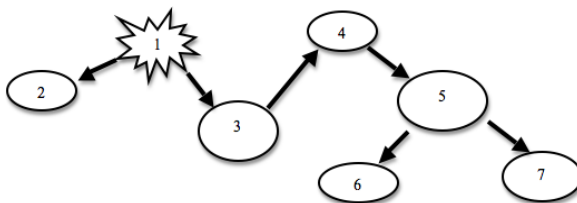
Model 1 – Jednosměrný model

Uvažujme následující dodatečné předpoklady:

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).



Model 1



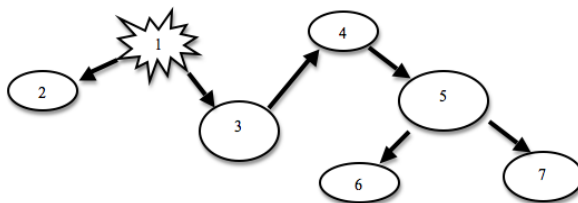
Model 1 – Jednosměrný model

Uvažujme následující dodatečné předpoklady:

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).



Model 1



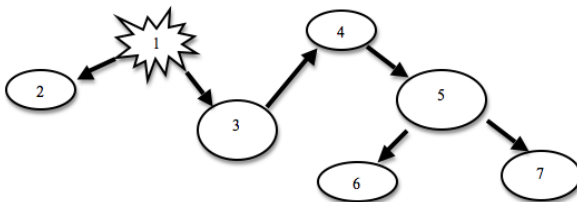
Model 1 – Jednosměrný model

Uvažujme následující dodatečné předpoklady:

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).

⇒ Stavy systému v čase t tvoří Markovský proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase.

Model 1 – Jednosměrný model

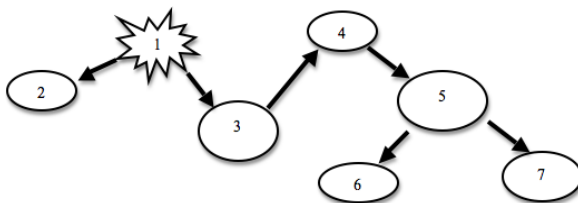


Označme:

- $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ počet objektů které byly zasaženy, je-li systém ve stavu ω (rozsah poškození systému)



Model 1 – Jednosměrný model

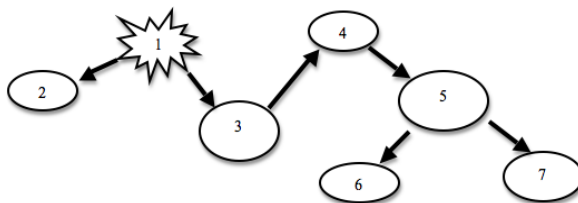


Označme:

- $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ počet objektů které byly zasaženy, je-li systém ve stavu ω (*rozsah poškození systému*)
- $\Omega_j = \{\omega \in \Omega : |\omega| = j\}$ obsahuje všechny stavy, při kterých bylo zasaženo právě j objektů. Počet takových stavů je $\binom{n}{j}$.



Model 1 – Jednosměrný model



Označme:

- $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ počet objektů které byly zasaženy, je-li systém ve stavu ω (*rozsah poškození systému*)
- $\Omega_j = \{\omega \in \Omega : |\omega| = j\}$ obsahuje všechny stavy, při kterých bylo zasaženo právě j objektů. Počet takových stavů je $\binom{n}{j}$.

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ pro všechna } i \neq j$$

Model 1 – Jednosměrný model

Uspořádejme stavy systému ve vzrůstajícím pořadí podle rozsahu poškození. Potom, za předpokladů (i)-(vii) je matice intenzit přechodu Q procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ horní trojúhelníkovou maticí o velikosti $2^n \times 2^n$. Matici Q můžeme zapsat v blokovém tvaru jako

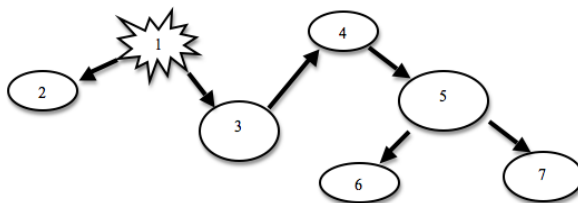
$$Q = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & O & \dots & 0 \\ O & D_{1,1} & P_{1,2} & O & \dots & O \\ O & O & D_{2,2} & P_{2,3} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & O & O & O & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

kde $P_{i,j}$ je obdélníková matice velikosti $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$, symbol O označuje matici samých nul a D_{ii} jsou čtvercové diagonální matice pro $i = 1, \dots, n$. Navíc platí

$$-D_{i,i} = e \cdot P'_{i,i+1} \cdot I_{i,i}$$

kde $I_{i,i}$ je jednotková matice o velikosti i , e je řádkový vektor $\binom{n}{j}$ jedniček.

Příklad



Příklad: $n = 7$ $\omega(t_0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Ze všech 2^7 možných stavů je pouze 14 možných:

$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
 $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$,
 $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$,
 $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

[illegible]



Příklad

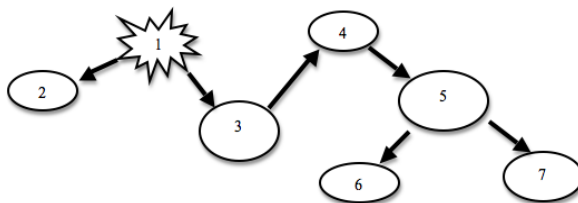
Z podmínky nulovosti řádkových součtů matice S dostáváme $u = -a - b$,
 $v = -d - e$, $w = -g - h$, $x = -j - k$, $y = -m - n$, $z = -p - q$.

Zbývá 19 neznámých parametrů, jakési *podmíněné* intenzity přechodu:

$$\begin{aligned}
 a &= i(1 \rightarrow 2|1); & g &= i(1 \rightarrow 2|1, 3, 4); & m &= i(1 \rightarrow 2|1, 3, 4, 5, 6); \\
 b &= i(1 \rightarrow 3|1); & h &= i(4 \rightarrow 5|1, 3, 4); & n &= i(5 \rightarrow 7|1, 3, 4, 5, 6); \\
 c &= i(1 \rightarrow 3|1, 2); & i &= i(4 \rightarrow 5|1, 2, 3, 4); & p &= i(1 \rightarrow 2|1, 3, 4, 5, 7); \\
 d &= i(1 \rightarrow 2|1, 3); & j &= i(1 \rightarrow 2|1, 3, 4, 5); & q &= i(5 \rightarrow 6|1, 3, 4, 5, 7); \\
 e &= i(3 \rightarrow 4|1, 2); & k &= i(5 \rightarrow 6|1, 3, 4, 5); & r &= i(5 \rightarrow 7|1, 2, 3, 4, 5, 6); \\
 f &= i(3 \rightarrow 4|1, 3); & l &= i(5 \rightarrow 6|1, 2, 3, 4, 5); & s &= i(5 \rightarrow 6|1, 2, 3, 4, 5, 7); \\
 & & & & t &= (1 \rightarrow 2|1, 3, 4, 5, 6, 7).
 \end{aligned}$$

V případě nezávislosti přechodů mezi objekty na předchozí cestě, dostáváme
 $a = d = g = j = m = p = t$, $b = c$, $e = f$, $h = i$, $k = l = q = s$, $n = r$.
 Tím se celý model zredukuje na pouhých 6 parametrů a, b, e, h, k, n .

Model 1



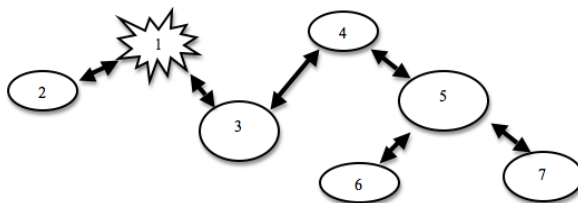
Model 1 – Jednosměrný model

Vynechme předpoklad (vi):

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).

⇒ Stavy systému v čase t tvoří Markovský proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase.

Model 2



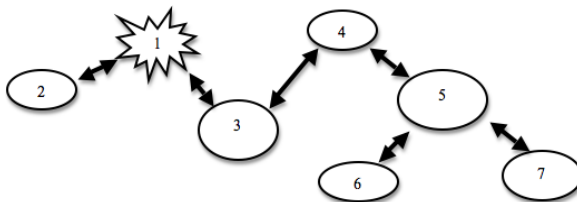
Model 2 – Opravitelný model

Vynechme předpoklad (vi):

- (v) v jednom časovém okamžiku může být napaden nejvýše jediný objekt,
- (vi) každý objekt může být napaden nejvýše jednou,
- (vii) každý další objekt bude napaden s pravděpodobností, která závisí pouze na současném stavu procesu, nikoli na cestě, která k němu vedla (časové posloupnosti událostí na jednotlivých objektech).

⇒ Stavy systému v čase t tvoří Markovský proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ve spojitém čase.

Model 2 – Opravitelný model



Proces $X(t)$ si lze představit jako náhodnou procházku mezi množinami $\Omega_0, \dots, \Omega_n$. Je-li proces ve stavu $\omega \in \Omega_j$, $0 < j < n$, může v následujícím čase přejít pouze do některého ze stavů množiny $\Omega_{j-1} \cup \Omega_{j+1}$. Přitom $\Omega_0 = \{\omega^0\}$ a $\Omega_N = \{\omega^N\}$ jsou reflexní stavy. V tomto modelu jsou všechny stavy přechodné. Takovýto proces můžeme interpretovat jako proces šíření události v opravitelném systému.



Model 2 – Opravitelný model

Matici intenzit přechodu Q procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ v modelu 2 lze zapsat v blokovém tvaru jako

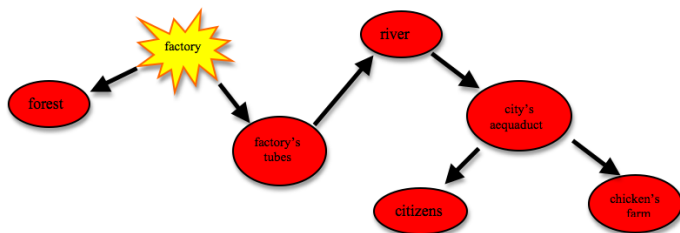
$$Q = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & O & \cdots & O \\ R_{1,0} & D_{1,1} & P_{1,2} & O & \cdots & O \\ O & R_{2,1} & D_{2,2} & P_{2,3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & D_{n,n} \end{pmatrix}$$

kde $P_{i,j}$ je obdélníková matice o velikosti $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$, $R_{j,i}$ je obdélníková matice velikosti $\binom{n}{j} \times \binom{n}{i}$, symbol O označuje matici samých nul a D_{ii} jsou čtvercové diagonální matice pro $i = 1, \dots, n$. Navíc platí

$$-D_{i,i} = (e^i \cdot R'_{i-1,i} + e^{i+1} \cdot P'_{i,i+1}) \cdot I_{i,i}$$

kde $I_{i,i}$ je jednotková matice o rozměru i , e^i je řádkový vektor $\binom{n}{i}$ jedniček.

Doba trvání systému



Jednosměrný model: Doba trvání systému je doba T , za kterou proces $X(t)$ dosáhne stavu $\omega^N = (1, 1, \dots, 1)$.

Během této doby sledovaná událost projde všemi objekty systému (totální zničení systému). Stav ω^N je absorpční.

Doba trvání systému

Jednosměrný model

Doba trvání T systému v modelu 1 je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu s vektorem počátečního rozdělení $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, 0, 0, \dots, 0)$ a horní trojúhelníkovou maticí intenzit

$$S = \begin{pmatrix} D_{1,1} & P_{1,2} & O & \cdots & O \\ O & D_{2,2} & P_{2,3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Doba trvání systému

Jednosměrný model

Doba trvání T systému v modelu 1 je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu s vektorem počátečního rozdělení $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, 0, 0, \dots, 0)$ a horní trojúhelníkovou maticí intenzit

$$S = \begin{pmatrix} D_{1,1} & P_{1,2} & O & \cdots & O \\ O & D_{2,2} & P_{2,3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

V případě PH-rozdělení známe všechny momenty:

$$E(T^k) = (-1)^k k! \pi S^{-k} e, \quad k \in N.$$

kde e je vektor jedniček.

Doba trvání systému

Opravitelný model

Doba trvání T systému v modelu 2 je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu s vektorem počátečního rozdělení $\pi = (1, 0, \dots, 0)$ a maticí intenzit přechodu

$$S = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & \cdots & O \\ R_{1,0} & D_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & O \\ 0 & R_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Doba trvání systému

Opravitelný model

Doba trvání T systému v modelu 2 je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu s vektorem počátečního rozdělení $\pi = (1, 0, \dots, 0)$ a maticí intenzit přechodu

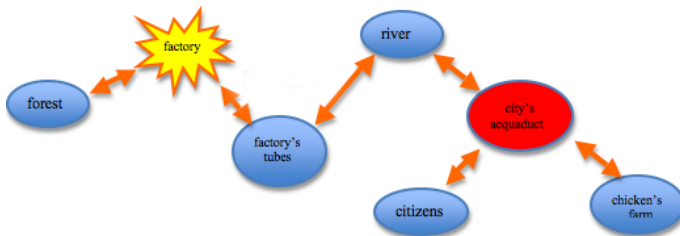
$$S = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & \cdots & O \\ R_{1,0} & D_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & O \\ 0 & R_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Speciálně

$$E(T) = -\pi S^{-1} e,$$

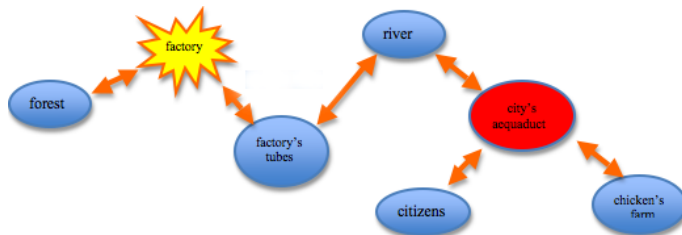
$$\text{Var}(T) = 2\pi S^{-2} e - (\pi S^{-1} e)^2.$$

Doba prvního zasažení





Doba prvního zasažení

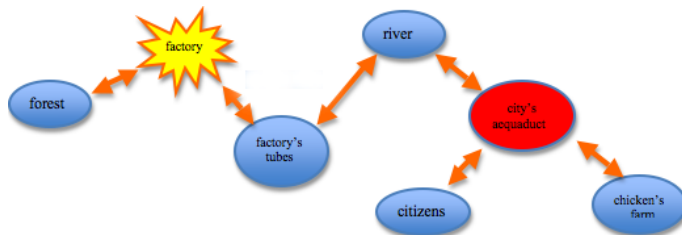


Pro dané i označme

$$S_0^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0\}$$

$$S_1^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$$

Doba prvního zasažení



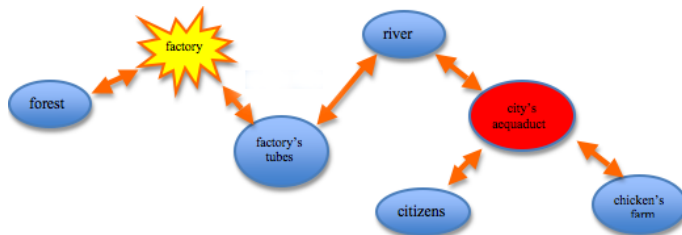
Pro dané i označme

$S_0^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0\}$ – množina stavů systému, ve kterých nebyl zasažen i -tý objekt

$S_1^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$



Doba prvního zasažení

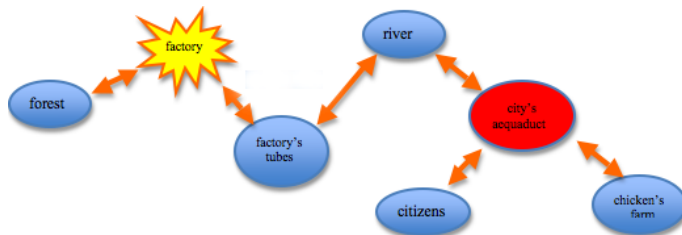


Pro dané i označme

$$S_0^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0\}$$

$S_1^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$ – množina stavů systému, ve kterých je i -tý objekt zasažen

Doba prvního zasažení



Pro dané i označme

$$S_0^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0\}$$

$$S_1^i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$$

Množiny S_0^i a S_1^i jsou disjunktní a je $S_0^i = \Omega - S_1^i$



Doba prvního zasažení

Jednosměrný model

Přeuspořádáním stavů v obou množinách S_0^i a S_1^i vzestupně podle $|\omega|$ dostaneme blokové vyjádření matice intenzit přechodů ve tvaru

$$\begin{matrix} S_0^i \\ S_1^i \end{matrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

kde

A je horní trojúhelníková matice velikosti $(2^{n-1} - 1) \times (2^{n-1} - 1)$,

B je horní trojúhelníková matice velikosti $2^{n-1} \times 2^{n-1}$,

Doba prvního zasažení

Jednosměrný model

Přeuspořádáním stavů v obou množinách S_0^i a S_1^i vzestupně podle $|\omega|$ dostaneme blokové vyjádření matice intenzit přechodů ve tvaru

$$\begin{matrix} S_0^i \\ S_1^i \end{matrix} \begin{pmatrix} S_0^i & S_1^i \\ A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

kde

A je horní trojúhelníková matice velikosti $(2^{n-1} - 1) \times (2^{n-1} - 1)$,

B je horní trojúhelníková matice velikosti $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$,

Opravitelný model

Po přeuspořádání stavů dostaneme matici intenzit přechodu

$$\begin{matrix} S_0^i \\ S_1^i \end{matrix} \begin{pmatrix} S_0^i & S_1^i \\ A & C \\ G & B \end{pmatrix}$$

kde G je nenulová matice.

Doba prvního zasažení

Tvrzení

Doba T_i prvního zasažení objektu i v systému je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu $PH(\pi^i, A)$, kde

$$\pi^i = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-1}, 0, \dots, 0, \pi_i).$$



Doba prvního zasažení

Tvrzení

Doba T_i prvního zasažení objektu i v systému je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu $PH(\pi^i, A)$, kde

$$\pi^i = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-1}, 0, \dots, 0, \pi_i).$$

A je matice v podobném tvaru jako matice S v předchozích tvrzeních: pro **jednosměrný model**

$$A = \begin{pmatrix} D_{1,1} & P_{1,2} & O & \dots & O \\ O & D_{2,2} & P_{2,3} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

kde

$P_{i,j}$ je obdélníková matice velikosti $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$, O je nulová matice,

D_{ii} jsou čtvercové diagonální matice pro $i = 1, \dots, n$. Navíc,

$D_{i,i} = -(e \cdot P'_{i,i+1} \cdot I_{i,i})$, kde e je řádkový vektor $\binom{n}{j}$ jedniček a

$I_{i,i}$ je jednotková matice o velikosti i .



Doba prvního zasažení

Tvrzení

Doba T_i prvního zasažení objektu i v systému je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu $PH(\pi^i, A)$, kde

$$\pi^i = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-1}, 0, \dots, 0, \pi_i).$$

A je matice v podobném tvaru jako matice S v předchozích tvrzeních: pro **opravitelný model**

$$A = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & \cdots & O \\ R_{1,0} & D_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & O \\ 0 & R_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

kde

$R_{j,i}$ jsou obdélníkové matice o velikosti $\binom{n}{j} \times \binom{n}{i}$ a

$$D_{i,i} = -(e^i \cdot R'_{i-1,i} + e^{i+1} \cdot P'_{i,i+1}) \cdot I_{i,i}$$

Délka cyklu obnovy

Za předpokladu opravitelnosti v **modelu 2** můžeme proces šíření události chápat jako proces obnovy. Okamžik obnovy nastává tehdy, když se proces dostane do stavu ω^0 . Cyklus obnovy je doba, kterou proces, který začal ve stavu ω^0 , potřebuje k tomu, aby se znovu dostal zpět do stavu ω^0 .

Délka cyklu obnovy

Za předpokladu opravitelnosti v **modelu 2** můžeme proces šíření události chápat jako proces obnovy. Okamžik obnovy nastává tehdy, když se proces dostane do stavu ω^0 . Cyklus obnovy je doba, kterou proces, který začal ve stavu ω^0 , potřebuje k tomu, aby se znovu dostal zpět do stavu ω^0 .

V tomto případě budeme chápat stav ω^0 dvěma způsoby:

- jako počáteční stav ($\pi^0 = (1, 0, \dots, 0)$)
- jako absorpční stav v okamžiku, kdy se do něho proces dostane z jiného stavu.

Délka cyklu obnovy

Za předpokladu opravitelnosti v **modelu 2** můžeme proces šíření události chápat jako proces obnovy. Okamžik obnovy nastává tehdy, když se proces dostane do stavu ω^0 . Cyklus obnovy je doba, kterou proces, který začal ve stavu ω^0 , potřebuje k tomu, aby se znovu dostal zpět do stavu ω^0 .

V tomto případě budeme chápat stav ω^0 dvěma způsoby:

- jako počáteční stav ($\pi^0 = (1, 0, \dots, 0)$)
- jako absorpční stav v okamžiku, kdy se do něho proces dostane z jiného stavu.



Délka cyklu obnovy

Za předpokladu opravitelnosti v **modelu 2** můžeme proces šíření události chápat jako proces obnovy. Okamžik obnovy nastává tehdy, když se proces dostane do stavu ω^0 . Cyklus obnovy je doba, kterou proces, který začal ve stavu ω^0 , potřebuje k tomu, aby se znovu dostal zpět do stavu ω^0 .

V tomto případě budeme chápat stav ω^0 dvěma způsoby:

- jako počáteční stav ($\pi^0 = (1, 0, \dots, 0)$)
- jako absorpční stav v okamžiku, kdy se do něho proces dostane z jiného stavu.

⇒ Můžeme popsat chování délky cyklu obnovy pomocí PH-rozdělení.

Délka cyklu obnovy

Délka cyklu obnovy v modelu 2 je náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti fázového typu $PH(\pi^0, W)$, kde

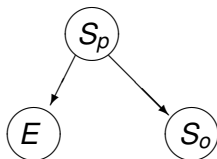
$$W = \begin{pmatrix} D_{0,0} & P_{0,1} & O & O & \cdots & O \\ R_{1,0} & D_{1,1} & P_{1,2} & O & \cdots & O \\ O & R_{2,1} & D_{2,2} & P_{2,3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & D_{n,n} \end{pmatrix}$$

kde $P_{i,j}$ je obdélníková matice o velikosti $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$, symbolem O označujeme nulovou matici a D_{ii} jsou čtvercové diagonální matice pro $i = 1, \dots, n$. Navíc je

$$-D_{i,i} = e \cdot P'_{i,i+1} \cdot I_{i,i}$$

kde $I_{i,i}$ je jednotková matice velikosti i , e je řádkový vektor $\binom{n}{j}$ jedniček.

SET model



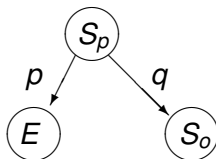
Řetězec sousledných událostí (SEC)



SET model

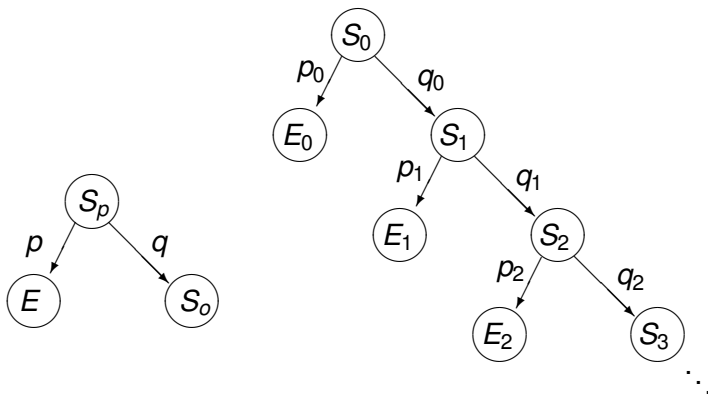
V čase $t > 0$ se SEC rozhoduje mezi třemi možnostmi:

- opustit stav S_p a pokračovat k následné události S_o s intenzitou q
- ukončit řetězec s intenzitou p .
- setrvat ve stavu S_p po náhodnou dobu T , která má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $\text{Exp}(-(q + p))$



Řetězec sousledných událostí (SEC)

SET model



Řetězec sousledných událostí (SEC) $\rightarrow$ strom sousledných událostí (SET)

SET model

$\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ množina sousledných událostí,

$\mathcal{E} = \{E_0, E_2, \dots, E_n\}$ množina ukončení.

SET můžeme popsat jako homogenní Markovský proces $\{X(t), t \geq 0\}$ se spojitým časem a konečnou množinou stavů $\mathcal{S} \cup \mathcal{E}$.

Proces začíná ve stavu S_0 s pravděpodobností 1.

Všechny stavy v $\mathcal{S}$ jsou přechodné a stavy v $\mathcal{E}$ jsou absorpční.

$q_{i,i+1} = q_i$ je intenzita přechodu ze stavu S_i do stavu S_{i+1} ,

$q_{i,n+i+2} = p_i$ je intenzita přechodu ze stavu S_i do absorpčního stavu E_i .

SET model

V každém časovém okamžiku $t > 0$ se SEC musí rozhodnout mezi následujícími třemi možnostmi:

- setrvat ve stavu S_i po náhodnou dobu T_i s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti $\text{Exp}(-(q_i + p_i))$
- opustit stav S_i a pokračovat do dalšího stavu S_{i+1} s intenzitou přechodu q_i
- ukončit řetězec ve stavu E_i s intenzitou p_i .



SET model

Matice intenzit přechodu má blokový tvar

$$Q = \begin{pmatrix} Q_S & Q_E \\ O & O \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde Q_E je $(n+1) \times (n+1)$ diagonální matice, jejíž prvky p_i jsou intenzity ukončení řetězce po realizaci i sousledných událostí S_i , $i = 0, \dots, n$ a O označuje nulovou matici $(n+1) \times (n+1)$. Q_S je $(n+1) \times (n+1)$ matice intenzit přechodu ze stavů z $\mathcal{S}$ do stavů v $\mathcal{S}$ ve tvaru

$$Q_S = \begin{pmatrix} -(q_0 + p_0) & q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(q_1 + p_1) & q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{pmatrix}$$

SET model

Uvažujme vnořený Markovský řetězec $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \dots, n$.
Matice pravděpodobností přechodu Y má blokové vyjádření

$$P = \begin{pmatrix} P_S & P_E \\ O & I \end{pmatrix}$$

kde

$$P_S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_0}{(q_0+p_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q_1}{(q_1+p_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

P_E je $(n+1) \times (n+1)$ diagonální matice, jejíž prvky $p_i/(q_i + p_i)$ jsou pravděpodobnosti zastavení řetězce po i -té sousledné události S_i , $i = 0, \dots, n$. O označuje nulovou matici $(n+1) \times (n+1)$ a I je $(n+1) \times (n+1)$ jednotková matice.



Pravděpodobnostní rozdělení stop-stavů SET

Nechť $\{X(t), t \geq 0\}$ je SET s maticí intenzit přechodu Q . Potom $X(t)$ skončí ve stavu k s pravděpodobností

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{p_0}{p_0 + q_0} = 1 - \frac{q_0}{p_0 + q_0}, \\ \pi_k &= p_k \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1} q_j}{\prod_{j=0}^k (p_j + q_j)}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \pi_n &= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} q_j}{\prod_{j=0}^{n-1} (p_j + q_j)}.\end{aligned}$$

Střední doba do zastavení po i -tém kroku je

$$\tau_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{p_j + q_j}.$$

Příklad

Uvažujme SET složený z n identických SEC. To znamená, že máme $q_i = q$, $p_i = p$ pro všechna $i = 0, \dots, n$. Potom pravděpodobnostní rozdělení koncových stavů $\mathcal{E}$ má tvar

$$\pi_k = \left(\frac{q}{p+q} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{q}{p+q} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\pi_n = \left(\frac{q}{p+q} \right)^{n-1}$$

a střední hodnota času zastavení po k krocích je $T_k = \frac{k}{p+q}$.
Střední hodnota "doby trvání" takového konečného SET je

$$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{q^n}{(p+q)^n} \right) = \frac{1}{p} (1 - \pi_n).$$

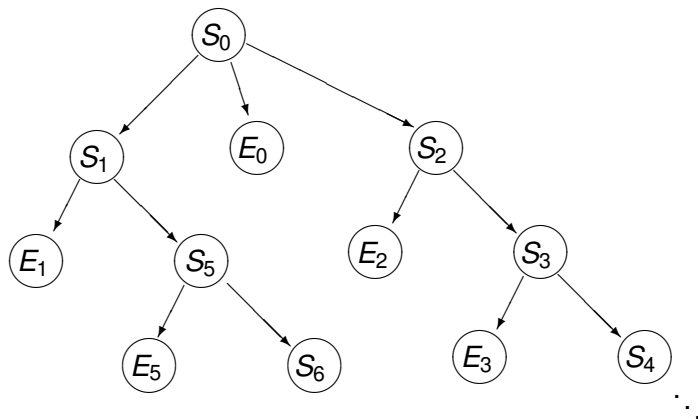
Obecné rozdělení dob setrvání

Uvažujme model, v němž doby setrvání v jednotlivých stavech nejsou nutně exponenciální. To znamená, že budeme uvažovat množinu distribučních funkcí $F_i(t)$, $t \geq 0$ dob setrvání ve stavech S_i , $i = 1, \dots, n$. Potom $X(t)$ tvoří semimarkovský proces. Jestliže vnořený markovský řetězec zůstává stejný jako v předchozím modelu, potom platí předchozí Tvrzení, pouze s tím rozdílem, že střední hodnota času zastavení bude rovna

$$T_k = \sum_{j=0}^k E(\tau_j),$$

kde $E(\tau_j) = \int_0^\infty t dF_j(t)$.

Větvící se model



Rozdělení doby do zastavení v rozvětveném modelu

Nechť $\{X(t), t \geq 0\}$ je SET s maticí intenzit přechodu Q typu $(n \times n)$.
Matice Q má tvar

$$Q = \begin{pmatrix} Q_S & Q_E \\ O & O \end{pmatrix}$$

kde Q_S a Q_E jsou horní trojúhelníkové matice.

Střední dobu do zastavení ve stavu E_k lze vyjádřit vztahem

$$T_k = -\vec{a}(Q_S^{(k)})^{-1}\vec{e}',$$

kde $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)$ a $Q_S^{(k)}$ je shodná s maticí Q_S až na diagonální prvky, které jsou rovny

$$q_{i,i}^{(k)} = q_{i,i} + \sum_{j \neq k} q_{i,j}.$$

Rozdělení stop-stavů rozvětveného modelu

Nechť $\{X(t), t \geq 0\}$ je SET s maticí intenzit přechodu Q typu $(n \times n)$.
Matice Q má tvar

$$Q = \begin{pmatrix} Q_S & Q_E \\ O & O \end{pmatrix}$$

kde Q_S a Q_E jsou horní trojúhelníkové matice. Označme P matici pravděpodobností přechodů vnořeného Markovského řetězce.

Pravděpodobnost zastavení procesu $X(t)$ ve stavu E_k je rovna

$$\vec{\pi} = \vec{a} P_S^* P_E,$$

kde $\vec{a} = (1, 0, \dots, 0)$ je vektor počátečního rozdělení $X(t)$ a
 $P_S^* = \sum_{j=1}^n P_S^j$.

Závěr

- Jednosměrný model
 - reprezentace Markovským procesem
 - rozdělení doby trvání procesu a doby do prvního zasažení vybraného objektu
- Opravitelný model
- strom sousledných událostí



Děkuji za pozornost.

Gejza Dohnal

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby, ČVUT v Praze

dohnal@nipax.cz