O jednom geodetickém problému

Jaroslav Marek

Lubomír Kubáček

Univerzita Palackého
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematické analýzy
a aplikací matematiky
Tř. 17. listopadu 12
779 00 Olomouc

marek@inf.upol.cz

Králíky

přednáška Robust 2010

5. 1. 2010

Pojmy v metrologii

- 1. etapa měření (připojovací), ozn. Θ
  — nejistota typu B
- 2. etapa měření (připojované), ozn. β
  — nejistota typu A
- konfidenční elipsa

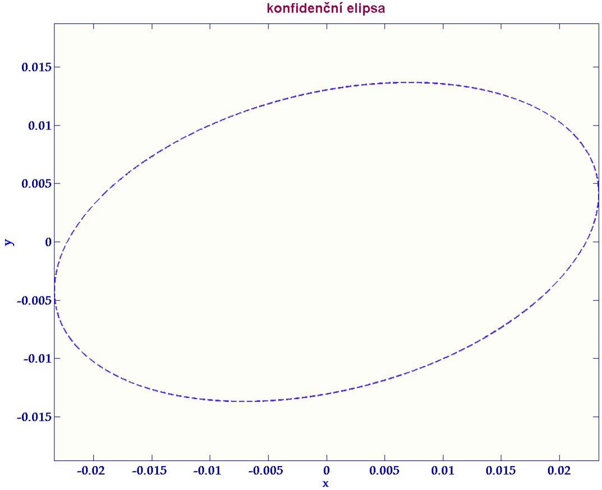
Exkurze do vyrovnávacího počtu

$(1-\alpha)$-konfidenční oblast parametru $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta} \in \underline{\Theta}_\beta$, založená na standardním odhadu BLUE $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, je množina

$$\mathcal{E}_{1-\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \Big\{ \mathbf{b} : \mathbf{b} \in \underline{\Theta}_\beta \subset \mathbb{R}^{k_2}, (\mathbf{b} - \hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})]^- (\mathbf{b} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) \leq \\ \leq \chi^2_{k_2 - q + r(\mathbf{C})}(1-\alpha) \Big\} \, .$$

Symbol $\chi^2_{k_2 - q + r(\mathbf{C})}(1-\alpha)$ znamená $(1-\alpha)$-kvantil χ^2-rozdělení o $k_2 - q + r(\mathbf{C})$ stupních volnosti.

Exkurze do vyrovnávacího počtu



Exkurze do vyrovnávacího počtu

Modelem připojovacího měření budeme nazývat náhodný vektor $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1', \mathbf{Y}_2')$, jehož střední hodnota a kovarianční matice má následující strukturu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right], \qquad (1)$$

kde $\mathbf{X}_1, \mathbf{D}, \mathbf{X}_2$ jsou známé matice typu $n_1 \times k_1$, $n_2 \times k_1$, $n_2 \times k_2$, vyhovující podmínce $\mathcal{M}(\mathbf{D}') \subset \mathcal{M}(\mathbf{X}_1')$; $\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\beta}$ jsou neznámé k_1 a k_2 dimenzionální vektory; $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ jsou známé kovarianční matice vektorů $\mathbf{Y}_1$ a $\mathbf{Y}_2$.
Odhady musí splnit podmínku

$$\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Odhady v modelu připojovacího měření

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} \\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} \left\{ (\mathbf{C}, \mathbf{B}) \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} \right\}^{-1} (\mathbf{C}, \mathbf{B}) \right) \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Theta}} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} -$$

$$- \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ (\mathbf{C}, \mathbf{B}) \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} \right\}^{-1} \mathbf{a}\,.$$

Odhady v modelu připojovacího měření

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} \\ \hat{\hat{\beta}}_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' - \mathbf{C}'(\mathbf{B}_2^{-1})'\mathbf{X}_{2,2}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_{2,1}' - \mathbf{B}_1'(\mathbf{B}_2^{-1})'\mathbf{X}_{2,2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C}, & \mathbf{X}_{2,1} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{D}' - \mathbf{C}'(\mathbf{B}_2^{-1})'\mathbf{X}_{2,2}' \\ \mathbf{0}, & \mathbf{X}_{2,1}' - \mathbf{B}_1'(\mathbf{B}_2^{-1})'\mathbf{X}_{2,2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Theta}} \\ \mathbf{Y} + \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{a} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\hat{\beta}}_2 = -\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{B}_1\hat{\hat{\beta}}_1 + \mathbf{C}\hat{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} + \mathbf{a}).$$

Odhady v modelu připojovacího měření

$$\hat{\hat{\beta}}_1 = \Big\{(\mathbf{X}_{2,1} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1)'\big[\mathbf{\Sigma} + (\mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,1}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C})\mathbf{V}(\mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C})'\big]^{-1} \times$$
$$\times (\mathbf{X}_{2,1} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1)\Big\}^{-1} (\mathbf{X}_{2,1} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1)' \times$$
$$\times \big[\mathbf{\Sigma} + (\mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C})\mathbf{V}(\mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C})'\big]^{-1} \times$$
$$\times \big[\mathbf{Y} + \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{a} - (\mathbf{D} - \mathbf{X}_{2,2}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{C})\hat{\mathbf{\Theta}}\big].$$

Odhady v modelu připojovacího měření

Předchozí tři odhady jsou shodné a splňují podmínky

$$\mathbf{a} + \mathbf{C}\hat{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} + \mathbf{B}\hat{\hat{\beta}} = \mathbf{0}.$$

Máme tedy k dispozici ekvivalentní algoritmy pro odhadování.

Komplikace

Bohužel jsme v situaci, kdy nesmíme po 2. etapě měření měnit odhad z 1. etapy měření — a to z důvodů legislativních a finančních. Uvedené tři odhady nelze většinou použít.

Komplikace

Je tedy třeba splnit jiné podmínky $\mathbf{a} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Theta}} + \mathbf{B}\tilde{\beta} = \mathbf{0}$, protože odhad $\hat{\mathbf{\Theta}}$ nelze zaměnit za $\hat{\hat{\mathbf{\Theta}}}$.

Odhad $\tilde{\beta}$, který tuto podmínku splní, nazýváme standardní odhad.

Příklad

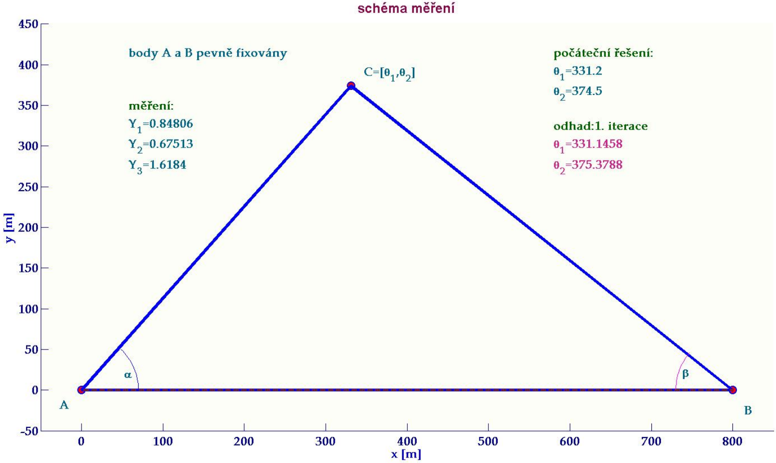


schéma měření
body A a B pevně fixovány
C=[θ1,θ2]
počáteční řešení:
θ1=331.2
θ2=374.5
měření:
Y1=0.84806
Y2=0.67513
Y3=1.6184
odhad:1. iterace
θ1=331.1458
θ2=375.3788
α
β
A
B
y [m]
x [m]

Příklad

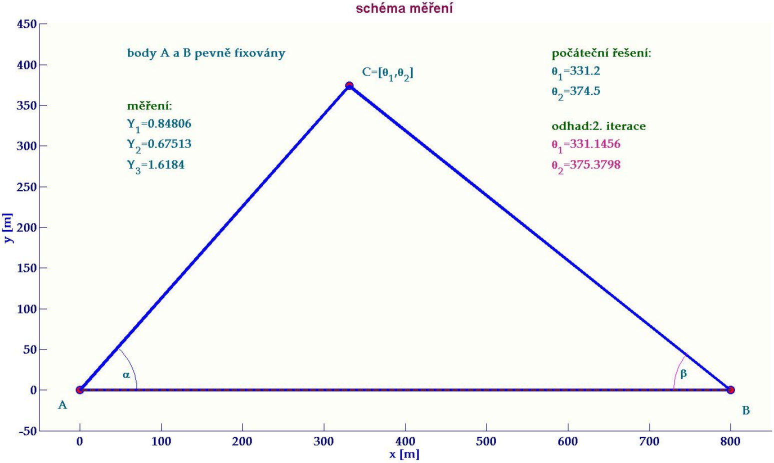


schéma měření
body A a B pevně fixovány
C=[θ1,θ2]
počáteční řešení:
θ1=331.2
θ2=374.5
měření:
Y1=0.84806
Y2=0.67513
Y3=1.6184
odhad:2. iterace
θ1=331.1456
θ2=375.3798
α
β
A
B
y [m]
x [m]
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
0
100
200
300
400
500
600
700
800

Příklad

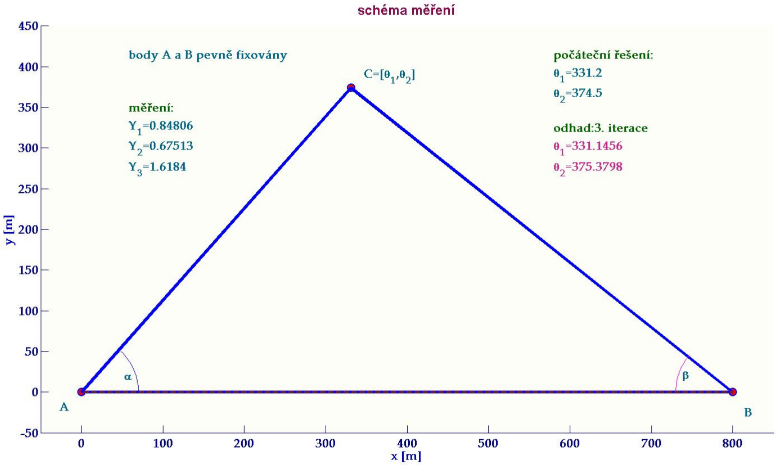


schéma měření
body A a B pevně fixovány
měření:
Y1=0.84806
Y2=0.67513
Y3=1.6184
C=[θ1,θ2]
počáteční řešení:
θ1=331.2
θ2=374.5
odhad:3. iterace
θ1=331.1456
θ2=375.3798
α
β
A
B
y [m]
x [m]
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
0
100
200
300
400
500
600
700
800

Příklad

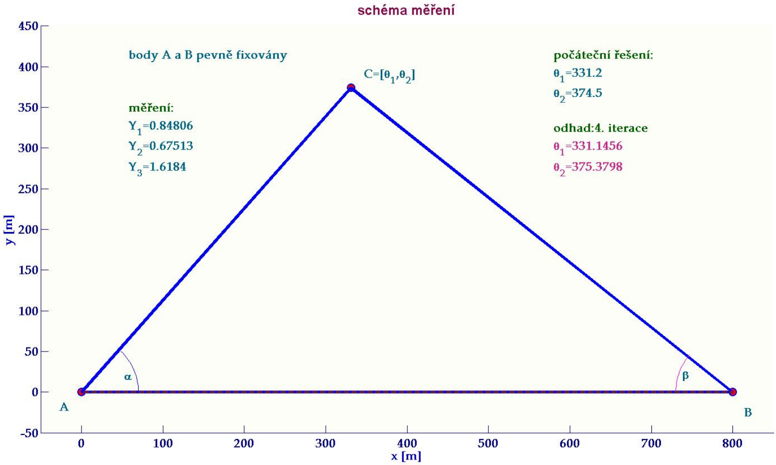


schéma měření
body A a B pevně fixovány
měření:
Y1=0.84806
Y2=0.67513
Y3=1.6184
C=[θ1,θ2]
počáteční řešení:
θ1=331.2
θ2=374.5
odhad:4. iterace
θ1=331.1456
θ2=375.3798
A
B
α
β
y [m]
x [m]
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
0
100
200
300
400
500
600
700
800

Příklad

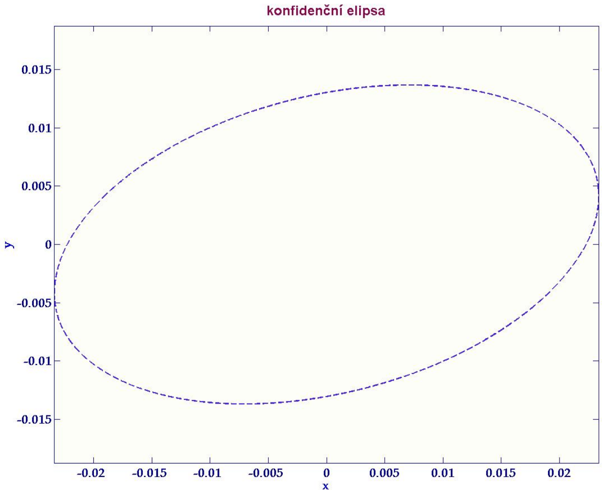
Model měření lze popsat

$$\mathbf{Y}_3 \sim N_3\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}\right] = N_3\left[\begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\theta_6-\theta_2}{\theta_5-\theta_1}\right) - \arctan\left(\frac{\theta_4-\theta_2}{\theta_3-\theta_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{\theta_3-\theta_5}{\theta_4-\theta_6}\right) - \arctan\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_4-\theta_2}\right) \\ \pi - \arctan\left(\frac{\theta_6-\theta_4}{\theta_3-\theta_5}\right) - \arctan\left(\frac{\theta_6-\theta_2}{\theta_5-\theta_1}\right) \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}\right],$$

kde

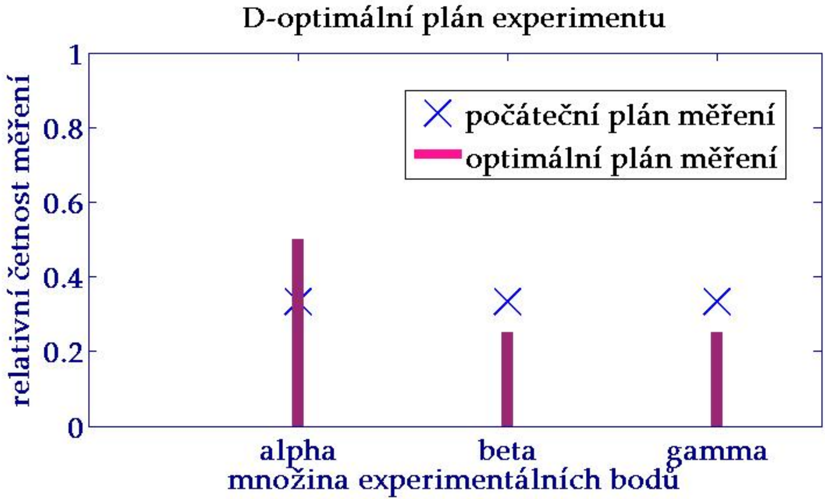
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} (5'')^2 & 0 & 0 \\ 0 & (5'')^2 & 0 \\ 0 & 0 & (5'')^2 \end{pmatrix}.$$

Příklad



konfidenční elipsa
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
y
-0.02
-0.015
-0.01
-0.005
0
0.005
0.01
0.015
0.02
x

Vhodná strategie opakovaného měření



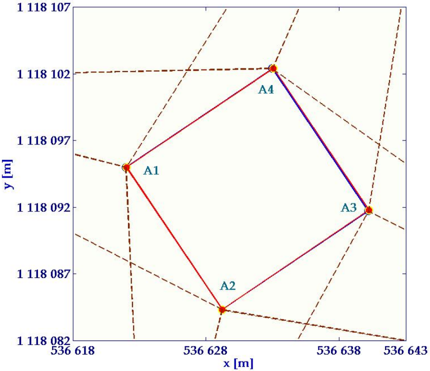
Studovaný geodetický problém

Jakýkoli nový objekt (např. budova, přehrada, tunel, jaderná elektrárna, atd.) musí být popsán ve státním souřadnicovém systému. Často může nastat situace, kdy je přesnost stávajících bodů ve státním systému mnohem nižší než přesnost vnitřních souřadnic objektu. Problém je zařadit nový objekt do státní sítě a nepokazit přesnost charakteristických bodů nového objektu v naší vnitřní síti.

Studovaný geodetický problém

Mějme dva souřadnicové systémy ve 2D.
První z nich je státní souřadnicový systém bodů v okolí našeho nově zaměřovaného objektu.
Druhý souřadnicový systém je vnitřní systém objektu. Souřadnice bodů objektu v tomto systému jsou odhadovány mnohem přesněji než souřadnice ve státním systému.
Problém je najít nové souřadnice vnitřních bodů a zároveň nepokazit vnitřní přesnost bodů zaměřovaného objektu.

Studovaný geodetický problém

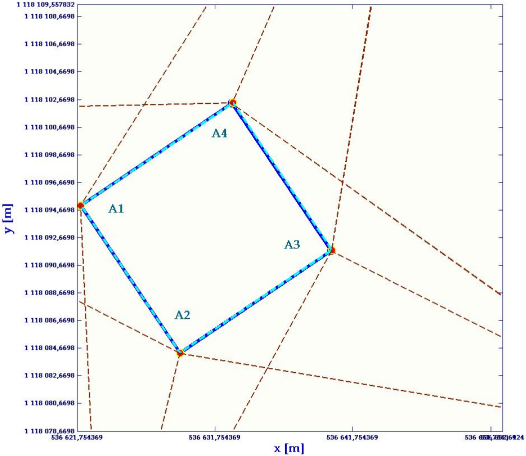


Studovaný geodetický problém

Nechť $\mathbf{a} = (\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_k)'$ je souřadnicový vektor charakteristických bodů $A_1, \ldots, A_k$, nového objektu v našem vnitřním systému, $\mathbf{a}_i$ je dvourozměrný vektor i-tého charakteristického bodu $A_i,\ i = 1, \ldots, k$. Souřadnice těchto bodů ve státním systému označíme $\mathbf{b}$.

Nechť $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ je odhad státních souřadnic bodů $C_1, \ldots, C_N$, v sousedství nového objektu, který nám umožňuje určit nové státní souřadnice bodů $A_1, \ldots, A_k$.
Zápisem $\widehat{\boldsymbol{\Theta}} \sim_{2N} (\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{W})$ rozumíme, že střední hodnota $E(\widehat{\boldsymbol{\Theta}})$ odhadu $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ je $\boldsymbol{\Theta}$ a jeho kovarianční matice je $\mathbf{W}$.

Studovaný geodetický problém



Studovaný geodetický problém

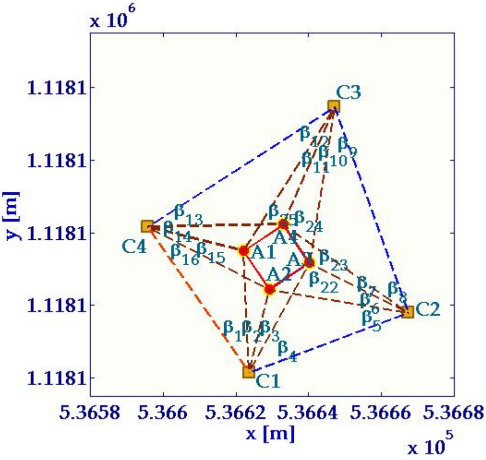
Nejlepší lineární odhad **b** v modelu

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Theta}} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim_{2N+n} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}, & \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{W}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix} \right]$$

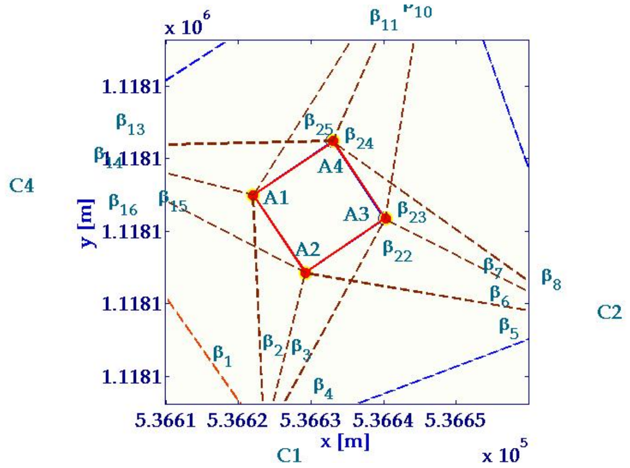
je

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &= \left[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}\mathbf{F}\right]^{-1}\mathbf{F}'(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}), \\ \mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{b}}) &= \left[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}\mathbf{F}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Studovaný geodetický problém



Studovaný geodetický problém



Studovaný geodetický problém

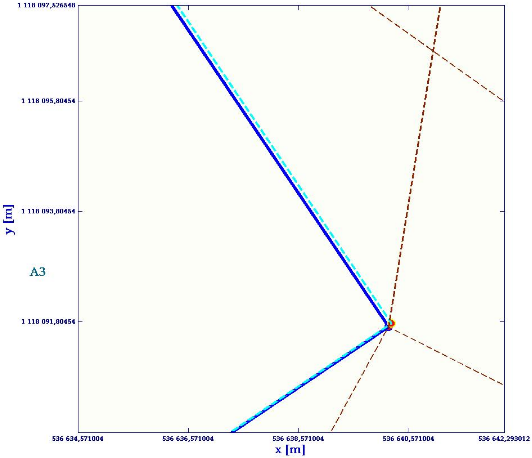
Předběžný odhad $\tilde{\mathbf{b}}_i$ z $\mathbf{b}_i$ je založen na pozorování vektoru $\mathbf{Y} \sim_n (\mathbf{D\Theta} + \mathbf{Fb}, \mathbf{\Sigma})$, na vektoru $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ s kovarianční maticí $\mathbf{W}$. Kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ nemusí splňovat požadavky na přesnost souřadnic ve vnitřním systému, nicméně splňuje požadavek na přesnost státních souřadnic.

Studovaný geodetický problém

Výsledky pomocí standardního odhadu:

$\tilde{\mathbf{b}}$	$\delta\tilde{\mathbf{b}}$
536622.0192	0.0192
1118095.0060	0.0060
536629.2125	-0.0011
1118084.3158	0.0104
536640.2544	0.0561
1118091.7737	0.0590
536633.0712	0.0865
1118102.4382	0.0289

Studovaný geodetický problém



Studovaný geodetický problém

Tento odhad $\tilde{\mathbf{b}}$, který je přibližný, nelze považovat za dobrý odhad státních souřadnic vektoru, neboť jejich kovarianční matice $\left[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}\mathbf{F}\right]^{-1}$ může mít nepřípustné disperze odhadu $\tilde{\mathbf{b}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{i,1} \\ \tilde{b}_{i,2} \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, k$.

Studovaný geodetický problém

Určíme posun a rotaci vnitřního systému do státní sítě takovým způsobem, aby nové polohy bodů $P_1, \ldots, P_k$ byly určeny vztahem

$$\widehat{\mathbf{b}}_i = \begin{pmatrix} \widehat{t}_1 \\ \widehat{t}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\cos\varphi}, & \widehat{\sin\varphi} \\ -\widehat{\sin\varphi}, & \widehat{\cos\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{a}_i, \; i = 1, \ldots, k,$$

když posun $\begin{pmatrix} \widehat{t}_1 \\ \widehat{t}_2 \end{pmatrix}$ a matice rotace $\begin{pmatrix} \widehat{\cos\varphi}, & \widehat{\sin\varphi} \\ -\widehat{\sin\varphi}, & \widehat{\cos\varphi} \end{pmatrix}$ budou optimální ve smyslu metody nejmenších čtverců.
Tato transformace je lineární transformace, která nemění vzdálenost mezi body P_i a P_j nového objektu.

Studovaný geodetický problém

Nechť

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} 1, & 0, & a_{i,1}, & a_{i,2} \\ 0, & 1, & -a_{i,2}, & a_{i,1} \end{pmatrix}, \; i = 1, \ldots, k,$$

$c = \cos\varphi = c_0 + \delta c$, $s = \sin\varphi = s_0 + \delta s$, $t_1 = t_{1,0} + \delta t_1$, $t_2 = t_{2,0} + \delta t_2$,

kde $t_{1,0}$, $t_{2,0}$ c_0, s_0 jsou přibližné hodnoty.

Studovaný geodetický problém

Získáme následující model s podmínkami typu I:

$$\beta = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1,0} \\ t_{2,0} \\ c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \; _{2k}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta c \\ \delta s \end{pmatrix}, \left[\mathbf{F}'(\mathbf{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}\mathbf{F}\right]^{-1} \right], \quad (3)$$

s podmínkami

$$c_0 \delta c + s_0 \delta s = 0$$

(výraz $(\delta c)^2 + (\delta s)^2$ je zanedbán).

Studovaný geodetický problém

Označme

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{DWD}')^{-1}\mathbf{F}\right]^{-1}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_k \end{pmatrix}.$$

Studovaný geodetický problém

Nejlepší lineární nestranný odhad $t_1,\ t_2,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi$ je
$\widehat{t_1} = t_{1,0} + \widehat{\delta t_1},\ \widehat{t_2} = t_{2,0} + \widehat{\delta t_2},\ \widehat{\cos\varphi} = c_0 + \widehat{\delta c},\ \widehat{\sin\varphi} = s_0 + \widehat{\delta s}$, kde

$$\begin{pmatrix} \widehat{\delta t_1} \\ \widehat{\delta t_2} \\ \widehat{\delta c} \\ \widehat{\delta s} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\beta},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}_2'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{B} = (0, 0, c_0, s_0),$$

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} \widehat{\delta t_1} \\ \widehat{\delta t_2} \\ \widehat{\delta c} \\ \widehat{\delta s} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{V}.$$

Studovaný geodetický problém

Výsledná poloha bodu P_i ve státním souřadnicovém systému je dána vektorem

$$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \widehat{t}_1, & 0, & \widehat{\cos\varphi}, & \widehat{\sin\varphi} \\ 0, & \widehat{t}_2 & -\widehat{\sin\varphi}, & \widehat{\cos\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{T}_i \begin{pmatrix} \widehat{t}_1 \\ \widehat{t}_2 \\ \widehat{\cos\varphi} \\ \widehat{\sin\varphi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Výraz pro $\widehat{\mathbf{b}}_i$ lze přepsat jako

$$\widehat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{T}_i \Big\{ \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}' \big[\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}'\big]^{-1} \mathbf{B} \Big\} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{S}^{-1}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_0) =$$

$$= \mathbf{T}_i \Big\{ \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}' \big[\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}'\big]^{-1} \mathbf{B} \Big\} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{F}'(\mathbf{\Sigma} + \mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{D}')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\widehat{\mathbf{\Theta}}).$$

Studovaný geodetický problém

Nechť

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{T}_i \left\{ \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}' \left[\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}'\right]^{-1} \mathbf{B} \right\} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{F}'(\mathbf{\Sigma} + \mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{D}')^{-1}.$$

Pak

$$\mathrm{cov}(\widehat{\mathbf{\Theta}}, \widehat{\mathbf{b}}_i) = -\mathbf{W}\mathbf{D}'\mathbf{Z}_i', \quad \mathrm{cov}(\widehat{\mathbf{b}}_i, \widehat{\mathbf{b}}_j) = \mathbf{T}_i\mathbf{V}\mathbf{T}_j'.$$

Tedy

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{\Theta}} \\ \widehat{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{b}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}, & -\mathbf{W}\mathbf{D}'\mathbf{Z}_1', & \dots, & -\mathbf{W}\mathbf{D}'\mathbf{Z}_k' \\ -\mathbf{Z}_1\mathbf{D}\mathbf{W}, & \mathbf{T}_1\mathbf{V}\mathbf{T}_1', & \dots, & \mathbf{T}_1\mathbf{V}\mathbf{T}_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{Z}_k\mathbf{D}\mathbf{W}, & \mathbf{T}_k\mathbf{V}\mathbf{T}_1', & \dots, & \mathbf{T}_k\mathbf{V}\mathbf{T}_k' \end{pmatrix}.$$

Jiné přístupy pro řešení problému

H-optimální odhady, viz

- Kubáček, L., Kubáčková L.: *Dvouetapové sítě s podmínkami typu I a II.* In. Sborník příspěvků a spolupracovníků k devadesátinám pana profesora Josefa Vykutila. (Ed. D. Dušátko), Praha – Brno, Vojenský zeměpisný ústav Praha 2002, 58–72.
- Marek, J.: *Estimation in connecting measurements.* Acta Universitas Palackianae, Fac. rer. nat., Mathematica (42) 2003, 69–86.
- Marek, J.: *Estimation in connecting measurements with constraints of type II.* Acta Universitas Palackianae, Fac. rer. nat., Mathematica (43) 2004, 119–131.
- Marek, J.: *A digger and a surveyor (From the series "A Statistician's View on Measurement in the Czech and World Literature").* Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masaryk. Brunensis, Math. (15) 2004, 193–208.
- Kubáček, L., Marek, J.: *Partial optimum estimator in two stage regression model with constraints and a problem of equivalence.* Math. Slovaca (55) 2005, 477–494.
- Korbašová, M., Marek, J.: *Connecting Measurements in Surveying and its Problems.* Proceedings of INGEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying, Bratislava, Slovakia, November 11–13, 2004.

O jednom literárním problému

Jaroslav Marek

Univerzita Palackého
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematické analýzy
a aplikací matematiky
Tř. 17. listopadu 12
779 00 Olomouc

marek@inf.upol.cz

přednáška Robust 2010

5. 1. 2010

Jak najít poklad

Je třeba rozluštit tajný kód.
Je třeba mít mapu.

Tajný kód

53++!305))6*;4826)4+.)4+);806*;48!8‘60))85;]8*:+*8!83(88)5*!;
46(;88*96*?;8)*+(;485);5*!2:*+(;4956*2(5*-4)8‘8*; 4069285);)6
!8)4++;1(+9;48081;8:8+1;48!85;4)485!528806*81(+9;48;(88;4(+?3
4;48)4+;161;:188;+?;

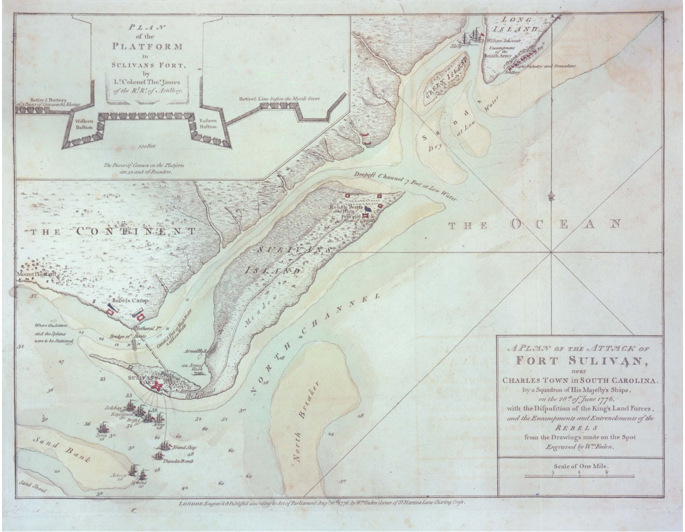
Řešení – viz E.A.Poe: The Gold Bug

A good glass in the bishop’s hostel in the devil’s –twenty-one degrees and thirteen minutes –northeast and by north –main branch seventh limb east side –shoot from the left eye of the death’s-head –a bee-line from the tree through the shot fifty feet out..

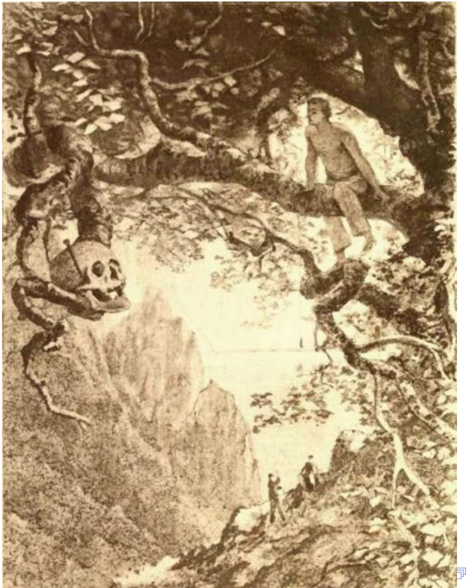
Hledání stromu

Mapa — Sullivan’s Island

Faden, William, Sullivan’s Island Map, Part A: "A Plan of the Attack of Fort Sullivan..." (London, William Faden, 1776). Newberry Library.



Pak už zbývá jen vhodně realizovat měření



Odpověď na zcela zásadní problém

V literatuře vůbec nebývá zkoumána otázka velikosti jámy, kterou je pro nalezení pokladu třeba vykopat.

Odpověď na zcela zásadní problém

Odpověď poskytnu ve svém příspěvku na konferenci (hloubka jámy ale nebude řešena)

ODAM 2010

15. 9. 2010 – 16. 9. 2010