Minimálna eficiencia návrhov v kvadratickej regresii na q-rozmernej kocke

Lenka Filová

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Robust 2010
1. – 5. 2. 2010

Obsah

- lin. model $y(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$
  v ktorých bodoch merať, aby sme čo najlepšie odhadli β $\longrightarrow$ návrh ξ

- lin. model $y(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$
  v ktorých bodoch merať, aby sme čo najlepšie odhadli β $\longrightarrow$ návrh ξ
- kritérium optimality $\Phi : \mathcal{M} \to \langle 0, \infty)$

- lin. model $y(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$
  v ktorých bodoch merať, aby sme čo najlepšie odhadli $\beta \;\rightarrow$ návrh ξ
- kritérium optimality $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \langle 0, \infty)$
- optimálny návrh $\xi^* = \arg\max_{\xi \in \Xi} \Phi(M(\xi))$

- lin. model $y(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$
  v ktorých bodoch merať, aby sme čo najlepšie odhadli $\beta \ \rightarrow$ návrh ξ
- kritérium optimality $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \langle 0, \infty)$
- optimálny návrh $\xi^* = \arg\max_{\xi \in \Xi} \Phi(M(\xi))$
- ako určiť, ktoré kritérium je vhodné v danom modeli použiť:
  $$\mathrm{eff}(M(\xi) \mid \Phi) = \frac{\Phi(M(\xi))}{\max_{\zeta \in \Xi} \Phi(M(\zeta))}$$

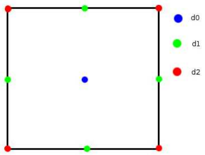
- lin. model $y(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$
  v ktorých bodoch merať, aby sme čo najlepšie odhadli $\beta \rightarrow$ návrh ξ
- kritérium optimality $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \langle 0, \infty)$
- optimálny návrh $\xi^* = \arg\max_{\xi \in \Xi} \Phi(M(\xi))$
- ako určiť, ktoré kritérium je vhodné v danom modeli použiť:
  $$\mathrm{eff}(M(\xi) \mid \Phi) = \frac{\Phi(M(\xi))}{\max_{\zeta \in \Xi} \Phi(M(\zeta))}$$
- min. eficiencia vzhľadom na celú triedu kritérií $\mathbb{O}$:
  $\inf_{\Phi \in \mathbb{O}} \mathrm{eff}(M(\xi) \mid \Phi) = \min_{k=1,\ldots,q} \mathrm{eff}(M(\xi) \mid \Phi_{E_k})$
  $\Phi_{E_k}(M) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(M)$ nie sú všade diferencovateľné

Kvadratická regresia na kocke

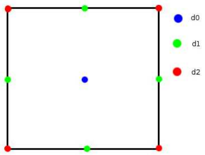
- $$y(x) = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i^2 + \sum_i \beta^{(i)} x_i + \sum_{\{i,j\}} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

Kvadratická regresia na kocke

- $$y(x) = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i^2 + \sum_i \beta^{(i)} x_i + \sum_{\{i,j\}} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$
- stačí uvažovať len tzv. invariantné návrhy (Heiligers 92), t.j. také, ktoré majú support vo vrcholoch, stredoch stien a strede kocky

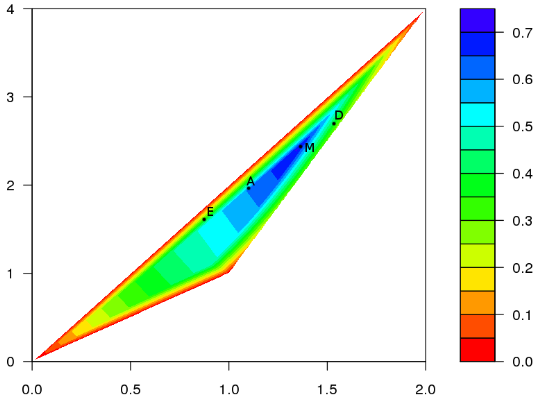


- $$y(x) = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i^2 + \sum_i \beta^{(i)} x_i + \sum_{\{i,j\}} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$
- stačí uvažovať len tzv. invariantné návrhy (Heiligers 92), t.j. také, ktoré majú support vo vrcholoch, stredoch stien a strede kocky



- informačná matica týchto návrhov závisí len od dvoch premenných a, b

Minimálna eficiencia návrhov v kvadratickej regresii na štvorci ($q = 2$)



Zhrnutie výsledkov pre $q = 1, 2, 3, 4$

q	value	d_1	d_2	d_3	d_4
1	0.7646	0.6468			
2	0.7060	0.2922	0.5303		
3	0.6642	0.0675	0.3974	0.3911	
4	0.6326	0.0269	0.2745	0.2179	0.3805

Maximinne eficientné návrhy

q	D	A	E
1	0.7307	0.6666	0.6000
2	0.4963	0.6102	0.4646
3	0.3463	0.5963	0.4001
4	0.2485	0.5743	0.3333

Eficiencie D, A, a E-optimálnych návrhov

Zhrnutie

- Množina informačných matíc prípustných návrhov na kocke je reprezentovateľná v rovine bez ohľadu na rozmer kocky
- Maximinne eficientný návrh dosahuje minimálnu eficienciu približne 70% pre $q = 2$. Pre vyššie dimenzie kocky mierne klesá.
- Z bežne používaných je najviac robustný A-optimálny návrh
- So zvyšujúcou sa dimenziou kocky najviac klesá min.eficiencia D-optimálneho návrhu