METODA MLE PRO LOGARITMICKO-NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ S PRAHEM

VLADIMÍR VÁCLAVÍK

vladimir.vaclavik@email.cz
Katedra matematiky, Západočeská univerzita v Plzni

ABSTRAKT

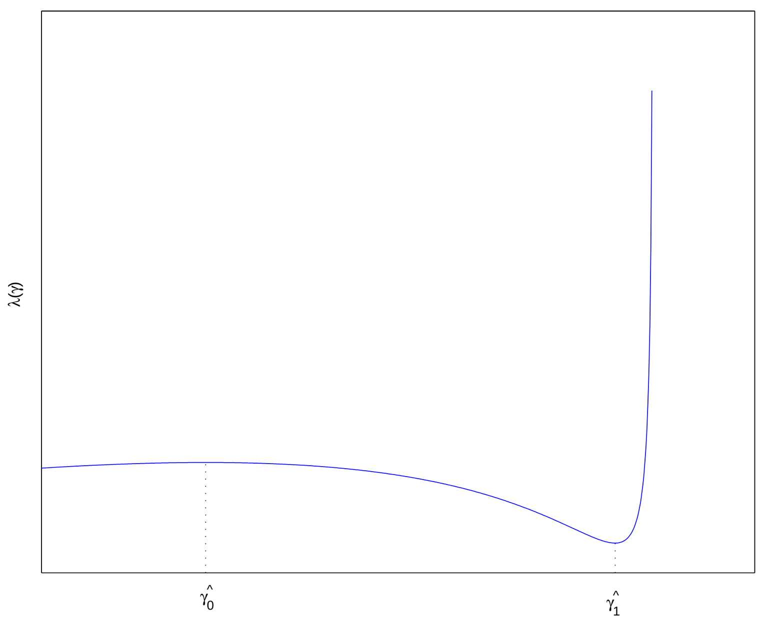
Za odhad parametrů metodou maximální věrohodnosti (MLE) logaritmicko-normálního rozdělení se místo globálního maxima používá lokální maximum věrohodnostní funkce a tato metoda se většinou označuje LMLE. S nalezením lokálního maxima však mohou být spojeny obtíže. Předkládáme metodu, která odhady LMLE najde, pokud existují.

ÚVOD

Pro náhodnou veličinu X, která se řídí logaritmicko-normálním rozdělením s prahovým parametrem $\gamma \in R$, je $\ln(X-\gamma) \sim N(\mu,\sigma^2)$. Píšeme $X \sim LN(\gamma,\mu,\sigma^2)$.
Pro pevné hodnoty $x_1,\dots,x_n \sim LN(\gamma,\mu,\sigma^2)$ má (logaritmus) věrohodnostní funkce tvar

$$L(\gamma,\mu,\sigma) = \ln\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\gamma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[\ln(x_i-\gamma)-\mu]^2.$$

Věrohodnostní funkce je shora neomezená, pro $\gamma \to x_{(1)}$, $\mu \to -\infty$ a $\sigma \to +\infty$ je $L \to +\infty$. Za odhad metodou maximální věrohodnosti se proto považuje bod lokálního maxima (metoda LMLE).



Pro každé pevné $\gamma < \min\{x_1,\dots,x_n\}$ je funkce
$\lambda(\gamma) = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + 1 + \ln\hat\sigma^2_\gamma + 2\hat\mu_\gamma)$,
kde $\hat\mu_\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\gamma)$,
$\hat\sigma^2_\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(x_i-\gamma)-\hat\mu_\gamma]^2$,
maximem věrohodnostní funkce L.
Jestliže $\hat\gamma$ je lokálním maximem funkce λ, pak $\hat\gamma$, $\hat\mu = \hat\mu_{\hat\gamma}$ a $\hat\sigma = \sqrt{\hat\sigma^2_{\hat\gamma}}$ je bodem lokálního maxima věrohodnostní funkce L.

NOVÁ METODA NALEZENÍ ODHADŮ

Označme $f_1(\gamma) = \hat\sigma^2_\gamma$, $f_2(\gamma) = \hat\mu_\gamma$. Potom derivace funkce λ je

$$\lambda'(\gamma) = -\frac{n}{2}\left[\frac{f_1'(\gamma)}{f_1(\gamma)} + 2f_2'(\gamma)\right].$$

Naším cílem je najít lokální maximum funkce λ, tedy řešení (resp. jedno z řešení) rovnic

$$\lambda'(\hat\gamma) = 0 \Leftrightarrow \frac{f_1'(\hat\gamma)}{f_1(\hat\gamma)} = -2f_2'(\hat\gamma) \Leftrightarrow f_1'(\hat\gamma) = 2f_1(\hat\gamma)[-f_2'(\hat\gamma)].$$

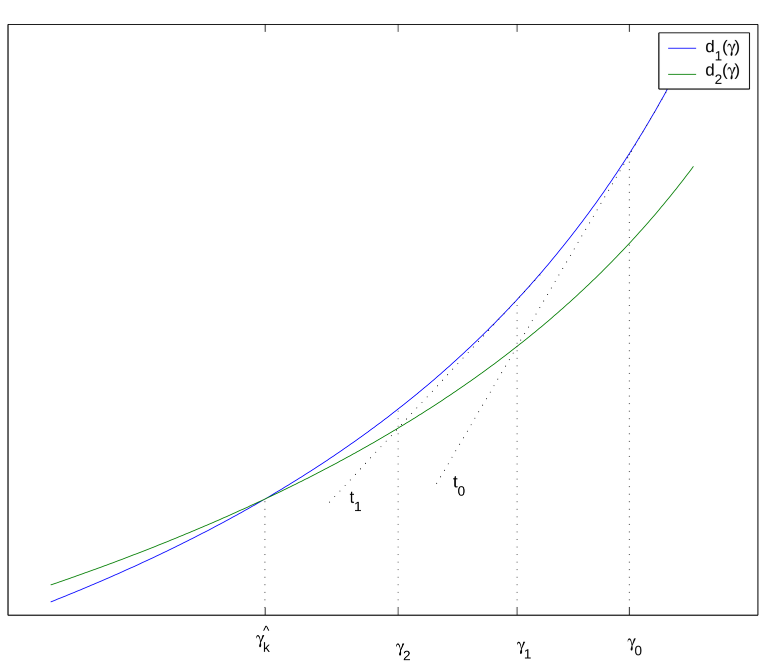
Tvar levé a pravé strany poslední rovnice popisuje následující tvrzení, jehož důkaz bude z prostorových důvodů uveden v příspěvku ve sborníku.

Tvrzení: Pro libovolné $x_1,\dots,x_n$, pro které $\exists i,j : x_i \neq x_j$, jsou funkce $d_1(\gamma) = f_1'(\gamma)$, $d_2(\gamma) = 2f_1(\gamma)[-f_2'(\gamma)]$ ostře rostoucí a konvexní pro $\gamma \in (-\infty, x_{(1)})$.

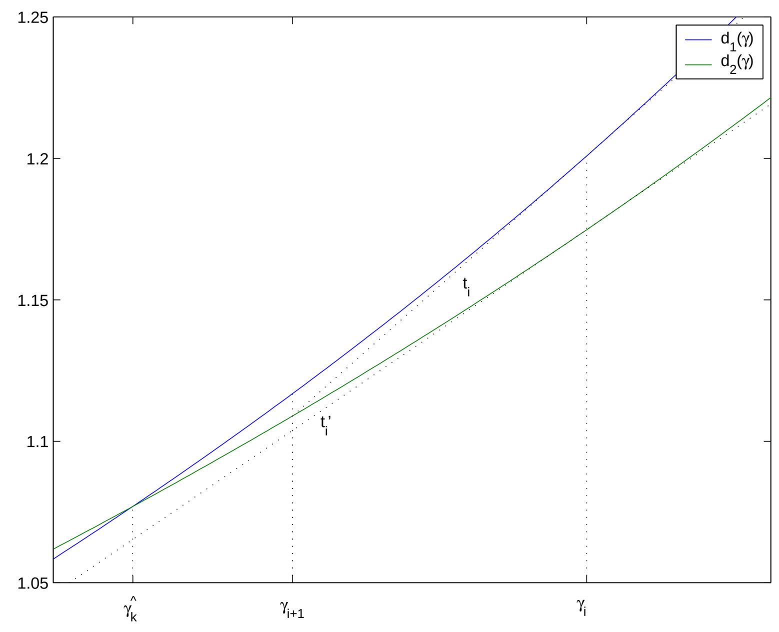
Podle nám známé literatury může mít funkce λ nejvýše dva stacionární body (na následujících obrázcích $\hat\gamma_0$ a $\hat\gamma_1$), které budeme hledat jako průsečíky funkcí d_1 a d_2.

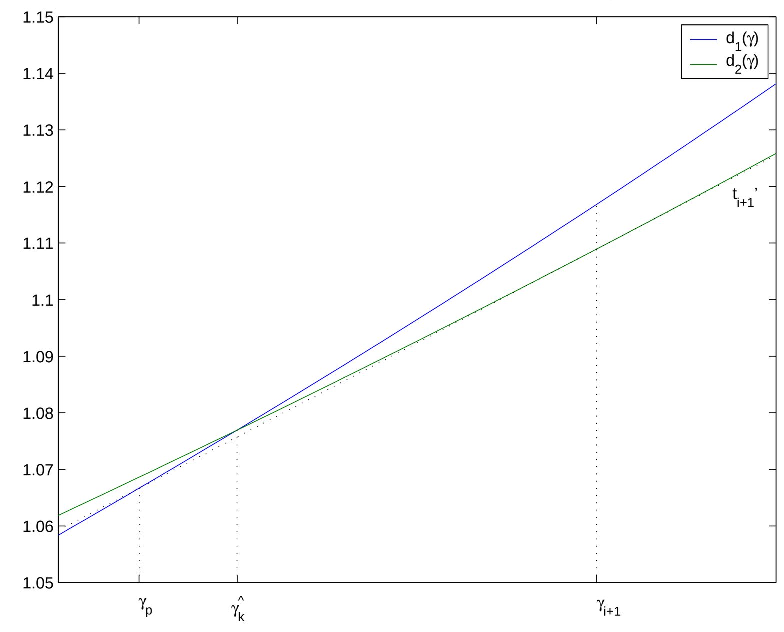
POSTUP NALEZENÍ STACIONÁRNÍHO BODU

Mějme výchozí bod $\gamma_0 < x_{(1)}$ a hledejme $\hat\gamma_k$, kde $k=0$ nebo $k=1$. V bodě γ_0 sestrojíme tečnu t_0 k funkci, která má v γ_0 vyšší funkční hodnotu, v našem příkladu (viz obrázky) tedy k funkci d_1. Najdeme bod $\gamma_1 < \gamma_0$, pro který platí $f_0(\gamma_1) = d_2(\gamma_1)$, což je průsečík tečny t_0 a funkce d_2 vlevo od bodu γ_0. Postup opakujeme, z bodu $[\gamma_i, d_1(\gamma_i)]$ sestrojíme tečnu t_i a najdeme další bod γ_{i+1}. Tímto postupem dostaneme posloupnost $\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \hat\gamma_k$, která v našem příkladu konverguje ke stacionárnímu bodu $\hat\gamma_0$.



Chtějme nyní stanovit interval I_k, ve kterém leží pouze hledané $\hat\gamma_k$, tedy $\hat\gamma_k \in I_k$ a $\hat\gamma_{k'} \notin I_k$, $k' = 1-k$. Libovolné γ_i získané popsaným postupem lze vzít za pravou mez intervalu I_k. Pro nalezení levé meze v každém kroku předchozího postupu stanovíme navíc tečnu dolní funkce t_i'.





Jestliže existuje bod $\gamma_p < \gamma_i$, pro který je $f_i'(\gamma_p) = d_1(\gamma_p)$, je dolní mez nalezena. Interval $I_k = (\gamma_p, \gamma_{i_0})$, kde $i_0 \geq 0$ lze zvolit libovolně, obsahuje hledané $\hat\gamma_k$. Hodnotu $\hat\gamma_k$ lze stanovit např. metodou půlení intervalu pro funkci $\lambda'(\gamma)$.

NALEZENÍ LOKÁLNÍHO MAXIMA

Výše uvedný postup použijeme, pokud $\lambda'(\gamma_0) < 0$ a naším předpokladem tedy je $\gamma_0 \in (\hat\gamma_0, \hat\gamma_1)$. Nalezené $\hat\gamma = \hat\gamma_0$ je pak hledaným odhadem parametru γ.

Jestliže je $\lambda'(\gamma_0) > 0$, uvažujeme tři možnosti: $\gamma_0 \in (-\infty, \hat\gamma_0)$ nebo $\gamma_0 \in (\hat\gamma_1, x_{(1)})$, popř. funkce λ nemá ani jeden stacionární bod. Na základě našich simulací doporučujeme nejprve hledat vpravo od γ_0. Použijeme **postup nalezení stacionárního bodu** z předchozí části, je však třeba hledat v opačném směru, což znamená najít posloupnost $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_p$.

Při našich simulacích (s volbou $\gamma_0 = x_{(1)} - R/(n-1)$) nebylo maximum věrohodnostní funkce nikdy nalezeno vlevo od γ_0 (pro $\lambda'(\gamma_0) > 0$). Přesto tuto variantu nelze vyloučit, jestliže tedy není maximum nalezeno vpravo od γ_0, hledáme **postupem nalezení stacionárního bodu** interval $I_1 = (\gamma_p, \gamma_i)$, který obsahuje sedlový bod $\hat\gamma_1 \in I_1$, vlevo od γ_0. Protože $\gamma_p < \hat\gamma_1$ (a $\hat\gamma_0 < \gamma_p$, pokud existuje), je $\lambda'(\gamma_p) < 0$. Použijeme γ_p jako novou startovací hodnotu $\gamma_0 := \gamma_p$ a najdeme $\hat\gamma = \hat\gamma_0$ **postupem nalezení stacionárního bodu**.

Pokud není $\hat\gamma = \hat\gamma_0$ nalezeno, potom lokální maximum funkcí λ a L neexistuje, popř. se nachází v oblasti, kterou nejsme schopni danou výpočetní technikou obsáhnout, nebo byl vyčerpán maximální počet iterací.

Autor byl podporován z výzkumného záměru MSM 4977751301.

Literatura

[1] Cohen, A. C., Whitten, B. J.: Estimation in the Three-Parameter Lognormal Distribution. Amer. Stat. Assoc. 75(1980), č. 370, str. 399–404.

[2] Kane, V. E.: Standard and Goodness-of-Fit Parameter Estimation Methods for the Three-Parameter Lognormal Distribution. Commun. Statist. — Theor. Meth. 11 (1982), str. 1935–1957.