

## Z CYKLU „STATISTICKÝ POHLED NA MĚŘENÍ V ČESKÉ A SVĚTOVÉ LITERATUŘE“ TAJNÝ OSTROV TEMPLÁŘŮ

JAROSLAV MAREK

marek@inf.upol.cz

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, Přírodovědecká fakulta,  
Univerzita Palackého, Tomkova 40, 779 00 Olomouc, tel. (+420)585634606



### OBSAH

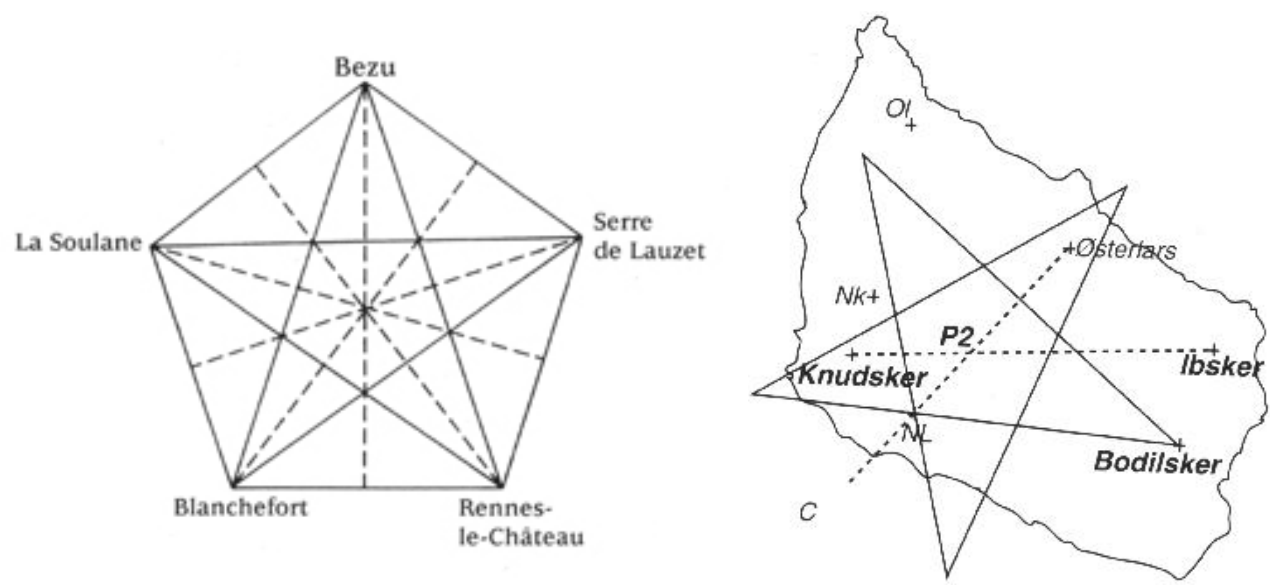
Průspěvek je věnován dvouetapovému regresnímu modelu s podmínkou typu II. Cílem je ukázat aplikační možnosti teorie odhadu.

### 1. MYSTICKÉ PŘÍBĚHY

Často se můžeme setkat s různými úžasnými objevy a teoriemi. Kniha [3] je typickým příkladem. Autoři Erling Haagenen a Henry Lincoln v ní uvádí mystickou teorii, při jejíž konstrukci provedou čtenáře Egyptem, Palestinou, Francií a konečně po ostrově Bornholm. Čtenáři jsou objasněna tajemství pyramid, ukrývající číslo  $\pi$  a délku poledníku. Dále je seznámen s údajně hlavním úkolem templářů, kterým má být uchovat a ukrýt to, co našli „rytíři“ Bernarda z Clairvau v r. 1127 v Jeruzalémě.



To kvůli čemu neváhají členové organizace Opus Dei v knize D. Browna Šifra Mistra Leonarda vraždit — Svatý grál. Kdo pomůže nalézt tajemství ostrova Bornholm? Je to kněz Bérenger Sarnier (toto jméno se také objevuje v knize D. Browna — před několika lety E. Haagenen a H. Lincoln žalovali D. Browna za porušení autorských práv). Tento kněz má nalézt v kostele Rennes-le-Château templářský poklad — když objeví, že kostely v jižní Francii vytváří pětícípou hvězdu.



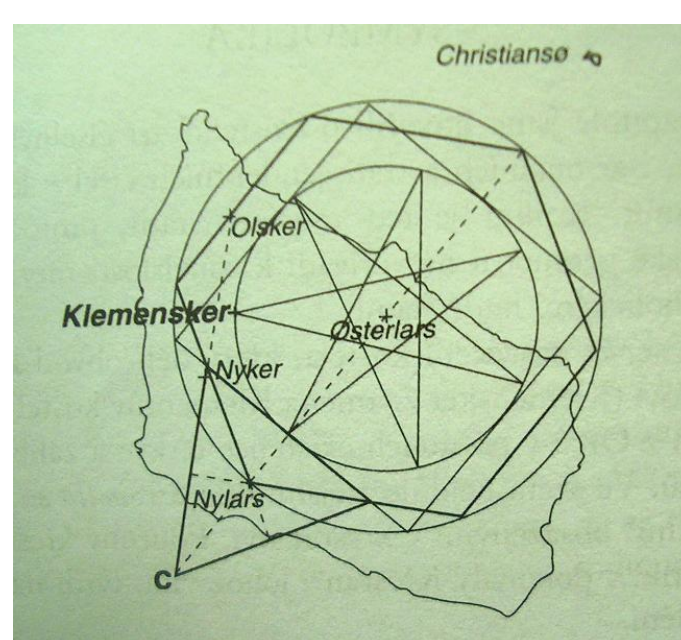
Mystické rozmístění templářských kostelů v jižní Francii a na ostrově Bornholm

Haagenen a Lincoln stejný útvar naleznou na ostrově Bornholm. Stopy ke Svatému grálu vedou na malý dánský ostrov. Při studiu polohy bornholmských kostelů autoři zjišťují překvapivé skutečnosti o templářích a o jejich vědomostech, ke kterým by se měli vyslovit vědci různých vědních disciplín, když už zastupci církve mehou jejich tvrzení jen těžko vyvracet. Matematici by mohli zpochybnit fakta o schopnostech templářských rytířů provést trisekci úhlu, přesně zkonstruovat odmocniny z čísla 2, 3, 5 a 7. Architekti by mohli posoudit, zda je pravda, že kostel Nylars je postaven jako přesná kopie Božího hrobu v Jeruzalémě. Historici by se mohli věnovat tvrzením o působení templářů na Bornholmu či rytířích Bernarda z Clairvau. Jazykovědci by mohli posoudit tvrzení, že slovo Bornholm je odvozeno od Burgundská.

K dovednostem templářů provést trisekci úhlu nebo vytyčit vzdálenost danou jistým číslem násobeným podílem odmocniny ze sedmi a ze tří, a to ještě po moři, se nebudeme vyslovovat. Hlavním cílem tohoto článku bude pouze posoudit tvrzení o konfiguraci kostelů na ostrově Bornholm.

### 2. BORNHOLMSKÉ KOSTELY

Z jednoho z mnoha schémat v [3] nakonec vyplyne, že kostely nejsou situovány ve vrcholech pětícípé hvězdy — ale v bodech dle náčrtku. Čtenář může být zklamán — pokud si náčrtku povšíme. Oporu pro tvrzení poskytnou výpočty Nielse Linda uveřejněné v knize.



Autoři uvádí (viz schema) následující skutečnosti ( $S$  představuje střed mystické konfigurace — kostel Osterlars):

- 1) kostel Nylars se nachází na kružnici  $k$ , s poloměrem  $\gamma_3$  a středem  $S = [\gamma_1, \gamma_2]$ ,
- 2) kostel Olsker se nachází na kružnici s poloměrem  $\Theta_1 \times \gamma_3 = \sqrt{(\frac{3}{2} - \sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} \times \gamma_3$  a středem  $S = [\gamma_1, \gamma_2]$ ,
- 3) kostel Nyker se nachází na kružnici s poloměrem  $\Theta_2 \times \gamma_3 = \sqrt{(-\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{7}}{3})^2} \times \gamma_3$  a středem  $S$ ,
- 4) kostel Klemensker se nachází na kružnici s poloměrem  $\Theta_3 \times \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \gamma_3$  a středem  $S = [\gamma_1, \gamma_2]$ ,
- 5) kostel Rutsker se nachází na kružnici  $k$ .



Kostel Osterlars

### 3. MĚŘENÍ A PODMÍNKY

Autoři knihy uvádí, že mají k dispozici souřadnice kostelů změřené dánským kartografickým úřadem Kort & Matrikelstyrelsen. Údaje v tabulce jsou uvedeny v metrech.

bod	Nylars	Olsker	Nyker	Klemensker	Rutsker	Osterlars
X	54 748.379	55 653.27	57 665.44	55 525.51	58 866.14	45 385.33
Y	45 803.240	63 844.61	53 086.37	57 063.72	61 535.90	56 658.79

Uvažujeme, že hodnoty  $\Theta_1, \Theta_2$  a  $\Theta_3$  byly templáři určeny a změřeny jako  $(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3) = (0,870263933, 0,890359258, 0,707106781)$ , což jsou hodnoty použité autory při výpočtu. Vzhledem k tvrzení autorů budeme uvažovat přesnost určení těchto hodnot  $\omega_1^2 = 0,0001^2$ .

V druhé etapě měření budeme uvažovat disperzi  $\omega_2^2 = 25^2$  pro měřené souřadnice  $(y_1, y_2, \dots, (y_9, y_{10})) = (54748, 379, 45803, 240, 55653, 27, 63844, 61, 57665, 44, 63086, 37, 55525, 51, 57063, 27, 58866, 14, 61535, 30)$  kostelů Nylars, Olsker, Nyker, Klemensker a Rutsker s rovinnými souřadnicemi  $(\beta_{2i-1}, \beta_{2i})$  pro  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Podmínky lze zapsat takto

$$\begin{aligned} (\beta_1 - \gamma_1)^2 + (\beta_2 - \gamma_2)^2 - \gamma_3^2 &= 0, \\ (\beta_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_4 - \gamma_2)^2 - \Theta_1^2 \times \gamma_3^2 &= 0, \\ (\beta_5 - \gamma_1)^2 + (\beta_6 - \gamma_2)^2 - \Theta_2^2 \times \gamma_3^2 &= 0, \\ (\beta_7 - \gamma_1)^2 + (\beta_8 - \gamma_2)^2 - \Theta_3^2 \times \gamma_3^2 &= 0, \\ (\beta_9 - \gamma_1)^2 + (\beta_{10} - \gamma_2)^2 - \gamma_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Linearizované podmínky zde s ohledem na jednoduchost výpočtu uvádět nebudeme.

### 3. CÍL VÝPOČTU

Z měření souřadnic  $(\beta_{2i-1}, \beta_{2i})$  pro  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  pomocí linearizovaného modelu najdeme odhad souřadnic kostela Osterlars (viz fotografie) a porovnáme jej se souřadnicemi z tabulky.

### 4. MODEL PŘIPOJOVACÍHO MĚŘENÍ S PODMÍNKOU TYPY II

Dvouetapový model připojovacího měření je

$$\begin{pmatrix} \hat{\Theta} \\ \mathbf{Y} - \mathbf{D}\hat{\Theta} \end{pmatrix} \sim_n \left( \begin{pmatrix} \hat{\Theta} \\ \mathbf{X}\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{V}, & -\mathbf{V}\mathbf{D}' \\ -\mathbf{D}\mathbf{V}, & \Sigma_{2,2} + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{D}' \end{pmatrix} \right),$$

Parametrickým prostorem dvouetapového modelu s podmínkou typu II je

$$\Theta = \{(\Theta', \beta') : \mathbf{B}^* \beta + \mathbf{C}^* \Theta + \mathbf{G}\gamma + \mathbf{a} = \mathbf{0}\}$$

kde  $\mathbf{B}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{G}$  jsou dané matice  $q \times k_2, q \times k_1, q \times k_3$  a kde  $\mathbf{a}$  je daný vektor s délkou  $q$ , tak, že  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*) \subset \mathcal{M}(\mathbf{B}^*)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$  a  $r(\mathbf{B}^*) = q < k_2$ .

Z první etapy měření máme k dispozici nevyčýlený odhad  $\hat{\Theta}$  a jeho kovarianční matici  $\text{var}(\hat{\Theta})$ .

Cílem je určit odhad parametru  $\beta$  na základě náhodného vektoru  $\mathbf{Y} - \mathbf{D}\hat{\Theta}$ , kde  $\mathbf{Y}$  je observační vektor z druhé etapy měření na základě odhadu  $\hat{\Theta}$ .

BLUE parametru  $(\beta', \gamma')$  v modelu z definice je

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \left( \mathbf{I} - (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{B}^*)' \left\{ \mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}' \right\}^{-1} - \right. \\ & \left. - [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G} \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}' \right\}^{-1} \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \right\} \mathbf{B}^* \right) \times \\ & \left. \times (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Sigma_{2,2}(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\hat{\Theta}) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' \left\{ \mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}' \right\}^{-1} - \right. \\ & \left. - [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G} \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{G}\mathbf{G}' \right\}^{-1} \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \right\} (\mathbf{a}^* + \mathbf{C}^* \Theta), \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} = & - \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G} \right\}^{-1} \mathbf{G}' \times \\ & \times [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{Y} + \\ & + \mathbf{a}^* + \mathbf{C}^* \Theta]. \end{aligned}$$

Příslušné kovarianční matice jsou

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} \times \\ & \times (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} \times \\ & \times (\mathbf{B}^*)' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \times \\ & \times \mathbf{G} \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G}' \right\}^{-1} \mathbf{G}' \times \\ & \times [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1}, \\ \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) &= -(\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \times \\ & \times \mathbf{G} \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G}' \right\}^{-1}, \\ \text{var}(\hat{\gamma}) &= \left\{ \mathbf{G}' [\mathbf{B}^* (\mathbf{X}'\Sigma_{2,2}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{B}^*)' + \mathbf{G}\mathbf{G}']^{-1} \mathbf{G} \right\}^{-1} - \mathbf{I}. \end{aligned}$$

### 5. ZÁVĚR

Numerickým výpočtem získáváme odhad

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 54748.43 \\ 45803.18 \\ 55633.42 \\ 63830.72 \\ 57652.33 \\ 53090.18 \\ 55530.98 \end{pmatrix} \text{ a } \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 57063.94 \\ 58893.57 \\ 61545.22 \end{pmatrix}.$$

Rovinné souřadnice kostela Osterlars byly změřeny hodnotami (45385.33, 56658.79), souřadnice určené z našeho regresního modelu jsou (45389.41, 56684.33). Diference je velmi malá.

Autor tohoto článku se domníval, že s použitím regresních modelů prokáže nesmyslnost schématu. To se nepodařilo.

Ale při přípravě obrázků bylo zjištěno, že přímkou spojující Nylars a Osterlars má probíhat nedalekým ostrovem Christiansø (viz schéma v části 2). Avšak ze satelitního snímku vyplývá, že tomu tak rozhodně není — viz obrázky vpravo nahoře (kostely jsou označeny bílým křížkem, Christiansø je v pravém horním rohu obrázku). Autoři si tedy na schématu Christiansø mírně posunuli. Přitom jsou v knize uvedeny i souřadnice bodu na Christiansø, kterým měla přímkou procházet. Souřadnice bodu vyhovují jejich výpočtům a zkonstruovaným podmínkám. Je nepochybné, že autoři manipulovali s měřeny údaji, pokud si je rovnou všechny nevymysleli.

Možnost najít polohu kostelů na satelitních snímcích umožní čtenářům tohoto článku i jeho autorovi v budoucnosti provést výpočet z ověřených dat.

Schématu se věnuje článek [4], který rovněž kritizuje výpočty z citované knihy z pohledu sestavování a ověřování statistických hypotéz.

### LITERATURA

- [1] Kubáček L., Marek J. (2005): *Partial optimum estimator in two stage regression model with constraints and a problem of equivalence*. Math. Slovaca **55**, 477–494.
- [2] Kubáček L., Kubáčková, L. (2000): *Statistics and Metrology (in Czech)*, Publishing House of Palacký University, Olomouc.
- [3] Haagenen, E., Lincoln, H. (2003): *Tajný ostrov templářů, rytíři, kněz a poklad, BB art*, Praha.
- [4] Jerkert, J. (2002): *Bayesian confusion*, (online 1. 9. 2008) [www.jerker.se/jesper/bayesian-0312.pdf](http://www.jerker.se/jesper/bayesian-0312.pdf)