STOCHASTICKÁ VERZE KLASICKÉHO MODELU VÝVOJE EPIDEMIE

Jakub Staněk

kubiks@post.cz

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Karlova Univerzita, Praha

1 Úvod

Vývoj epidemie v populaci, jejíž velikost je náhodná (tj. je brán v úvahu vliv migrace), je zde popsán 3-dimenzionální stochastickou diferenciální rovnicí. Je ukázáno, za jakých podmínek existuje jednoznačné silné řešení této rovnice.
Vychází se z publikace Štěpán, J., Hlubinka, D.(2006): Kermack-McKendrick epidemic model revisited. (Preprint)

2 Kermack-McKendrikův model

Kermack-McKendrikův model je klasický deterministický model vývoje epidemie. Tento model uvažuje v čase konstantní velikost populace N, která je rozdělena do tří skupin, jejichž velikost se v čase mění. $x(t)$ je počet jedinců, kteří jsou zdraví, ale mohou být nakaženi (dále jen "zdraví"), $y(t)$ je počet nakažených jedinců, kteří jsou přenašeči nemoci (dále jen "nemocní") a $z(t)$ je počet jedinců, kteří již nemoc prodělali, nemohou být znovu nakaženi a nejsou infekční (dále jen "imunní"). Tento model je popsán 3-dimenzionální diferenciální rovnicí:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -\beta x(t)y(t), \quad x(0) = x_0 > 0, \\ dy(t) &= \beta x(t)y(t) - \gamma y(t), \quad y(0) = y_0 > 0, \\ dz(t) &= \gamma y(t), \quad z(0) = 0, \end{aligned}$$

kde intenzita $\beta > 0$ a $\gamma > 0$.

3 Stochastická verze klasického modelu vývoje epidemie

Uvažujme model vývoje epidemie s proměnlivou velikostí populace N_t, kde $0 < a \leq N_t \leq b < \infty \; \forall t > 0$. Označme X_t počet zdravých, Y_t počet nemocných a Z_t počet imunních v čase t. Tento model je popsán následující 3-dimenzionální stochastickou diferenciální rovnicí:

$$\begin{aligned} dX_t &= -\beta(X_., Y_., Z_., t)X_tY_tdt + X_t\sigma(X_t+Y_t+Z_t)dW_t \\ dY_t &= \beta(X_., Y_., Z_., t)X_tY_tdt - \gamma Y_tdt + Y_t\sigma(X_t+Y_t+Z_t)dW_t \\ dZ_t &= \gamma Y_tdt + Z_t\sigma(X_t+Y_t+Z_t)dW_t \end{aligned} \qquad \text{(R1)}$$

s počáteční podmínkou $X_0 = x_0 > 0, \; Y_0 = y_0 > 0, \; Z_0 = 0$.

Označme $\triangle_{ab} := \{(x_., y_., z_.) \in \mathcal{C}(R^+, R^3) : a \leq x_t + y_t + z_t \leq b \text{ a } x_t, y_t, z_t \geq 0 \; \forall t \geq 0\}$. Předpokládejme, že $\beta(x_., y_., z_., t)$ je progresivní funkcionál na $\mathcal{C}(R^3, R^+) \times R^+$, který je Lipschitzovský na $\triangle_{ab}$, a $\sigma(x+y+z)$ je omezená lokálně Lipschitzovská funkce na R^+, $\text{supp}(\sigma) \subset [a, b]$.

3.1 Existence a jednoznačnost silného řešení

Platí následující věta:

Předpokládejme, že σ a β splňují předchozí podmínky. Pak má rovnice (R1) jednoznačné silné řešení a libovolné řešení $L_t = (X_t, Y_t, Z_t)$ je nezáporný proces na $(0, \infty)$.

Důkaz: Uvažujme omezené, lokálně Lipschitzovské a progresivní funkcionály φ_i na $\mathcal{C}(R^3, R^+) \times R^+$, $i = 1, 2$, pro které platí:

$$\varphi_1(x_., y_., z_., t) = -\beta(x_., y_., z_., t) \cdot y_t$$
$$\varphi_2(x_., y_., z_., t) = \beta(x_., y_., z_., t) \cdot x_t$$

pro $(x_., y_., z_., t)$ splňující $a \leq x_{\tilde{t}} + y_{\tilde{t}} + z_{\tilde{t}} \leq b \; \forall \tilde{t} \in [0, t]$.
Označme $L_t = (X_t, Y_t, Z_t)$ a uvažujme rovnici (R2) ve tvaru

$$dL_t = b(L_., t)dt + a(L_t)dB_t, \quad L_0 = (x_0, y_0, 0),$$

kde

$$b(l_., t) = \begin{pmatrix} b_1(l_., t) \\ b_2(l_., t) \\ b_3(l_., t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(l_., t)x_t \\ \varphi_2(l_., t)y_t - \gamma y_t \\ \gamma y_t \end{pmatrix} = \; : R^3 \to R^3,$$

$$a(l) = \begin{pmatrix} x\sigma(x+y+z) & 0 & 0 \\ y\sigma(x+y+z) & 0 & 0 \\ z\sigma(x+y+z) & 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad R^3 \to M^3$$

a $B_t = (W_t, W_t^2, W_t^3)$ je 3-dimenzionální Wienerův proces.
Lze ukázat, že $a(l)$ a $b(l_., t)$ jsou lokálně Lipschitzovské, a navíc platí, že pro libovolné N existuje takové $C_N < \infty$, pro které

$$|a(l)| + |b(l_., t) \leq |C_N\|l_t\|_t \; \forall t \in [0, N].$$

Z Theorem (12.1) v [2], str. 132, plyne, že rovnice (R2) má jednoznačné silné řešení. Dále lze z Itôovy formule ukázat, že je toto řešení nezáporné. Označme $\triangle^{ab} := \{(x, y, z) \in [0, b]^3, \; a \leq x+y+z \leq b\}$ a definujme $\tau := \inf\{t > 0 : L_t \notin \triangle^{ab}\}$ první výstup $L = (X, Y, Z)$ z $\triangle^{ab}$. Pak dostáváme rovnost řešení rovnice (R1) a (R2) na intervalu $[0, \tau)$.
Jelikož $N_t = n_0 + \int_0^t N_u\sigma(N_u)dW_u$ a $\text{supp}(\sigma) \subset [a, b]$, pak $a \leq N_t \leq b \; \forall t \geq 0$. Protože navíc $X_t, Y_t, Z_t \geq 0 \; \forall t \geq 0$, pak dostáváme $\tau = \infty$.
Tedy rovnice (R1) má jednoznačné silné řešení na $(0, \infty)$, čímž je důkaz hotov.

3.2 Příklady

V klasickém Kermack-McKendrickově modelu je koeficient β konstantní. To znamená, že přírůstek nemocných (dY_t) v čase t závisí pouze na počtu nemocných (Y_t) a počtu zdravých (X_t) jedinců v tomto čase. Ve skutečnosti však závisí počet nově nakažených na stavu populace po celý časový interval $[t - \tilde{t}, t]$, kde $\tilde{t}$ je inkubační doba sledované nemoci. Proto může být vhodné použít například model s volbou

$$\beta(x_., y_., z_., t) = C \int_{t-\tilde{t}}^t y_u du,$$

kde C je kladná konstanta, a dodefinovat $Y_s = y_0$ na $(-\tilde{t}, 0)$.
Při této volbě je koeficient β větší, resp. menší, pokud bylo během inkubační doby více, resp. méně, nemocných.
Další možné volby koeficientu β jsou:

$$\beta(x_., y_., z_., t) = C \int_{t-\tilde{t}}^t \frac{y_u}{x_u+y_u+z_u} du,$$
$$\beta(x_., y_., z_., t) = C \int_{t-\tilde{t}}^t \frac{x_u y_u}{(x_u+y_u+z_u)^2} du,$$

kde velikost koeficientu β nezávisí přímo na počtu nemocných, ale na poměru nemocných jedinců v populaci, resp. na součinu poměrů nemocných a zdravých jedinců, po celou inkubační dobu nemoci. Při těchto volbách dodefinujeme X_t a Y_t na intervalu $(-\tilde{t}, 0)$ analogicky s předchozím případem.
Lze jednoduše ukázat, že takto definované koeficienty β splňují požadavky existenční věty.

Poděkování: Autor by rád poděkoval panu prof. Štěpánovi za věcné připomínky a odbornou pomoc.

Literatura

[1] Štěpán, J., Hlubinka, D. (2006): Kermack-McKendrick epidemic model revisited. (Preprint)

[2] Rogers, L. C. G., Williams, D. (1994): Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 2 - Itô Calculus. *John Wiley and Sons, Chisenter, New York, Brisbane, Toronto, Singapore*