

ZMĚNY PARAMETRŮ WEIBULLOVA ROZDĚLENÍ

MONIKA RENCOVÁ

rencova@mat.fsv.cvut.cz
Katedra matematiky, FSv ČVUT, Praha

ABSTRAKT

Pro modelování pravděpodobnostního chování meteorologických a hydrologických řad se často používá jiné rozdělení než normální, protože data vykazují výraznou šikmost. To platí například o maximálních a minimálních teplotách. Jedno z rozdělení, které můžeme použít je trojparametrické Weibullovo rozdělení. Zajímáme-li se o změny v parametrech modelu, pak je výhodné sledovat jejich vývoj v čase například tak, že odhad provádíme v postupně se posouvajícím oknu. Ještě lepší odhad získáme, jestliže použijeme váhy podobně jako v jádrových odhadech hustot, viz Hall, Tajvidi (2000). Naším cílem bylo použít tyto metody pro teplotní řady, jejichž vlastnosti byly prezentovány na Robustu 04.

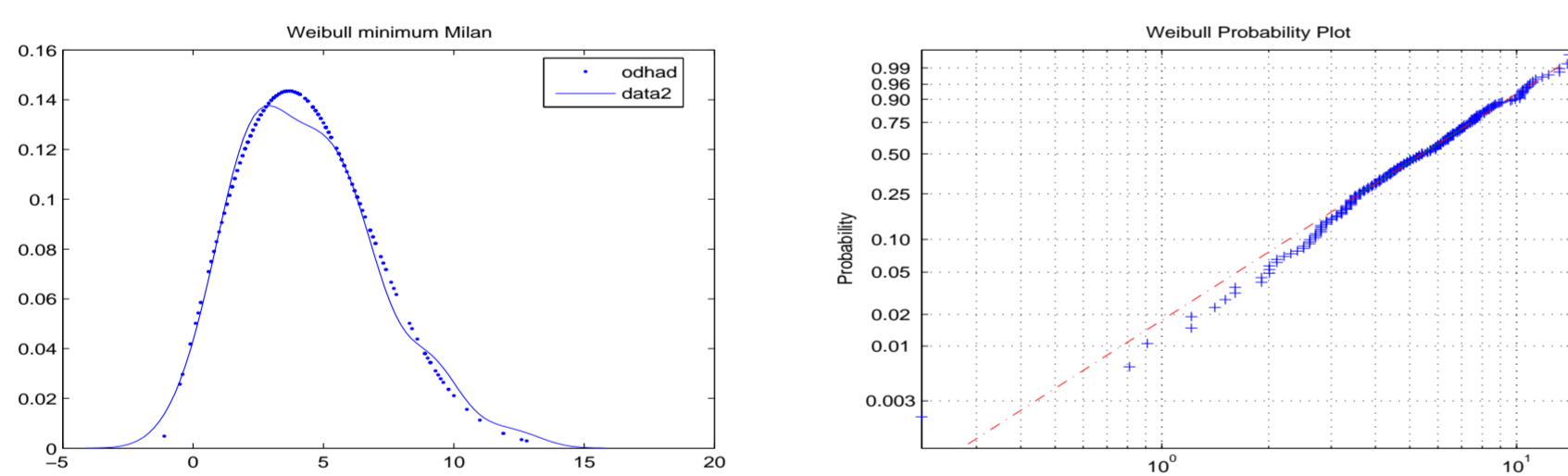
TROJPARAMETRICKÉ WEIBULLOVO ROZDĚLENÍ PRO MINIMA TEPLOTNÍCH ŘAD

V práci byla vyšetřována minima/maxima dlouhých teplotních řad naměřených v 7 meteorologických stanicích pocházející z knihy D. Camuffa a P. Jonese "Improved understanding of past climatic variability from early daily European instrumental sources". Zatímco pro maxima vycházela šikmost kladná s hodnotami blízkými nule a pro modelování těchto dat je možno použít normální rozdělení, šikmost minimálních teplot je záporná s vyššími hodnotami a pro modelování záporných hodnot těchto dat můžeme použít trojparametrické Weibullovo rozdělení s hustotou danou vztahem

$$f(x; \theta, \alpha, \beta) = \alpha\beta(x - \theta)^{\beta-1} e^{-\alpha(x-\theta)^\beta} \quad (\theta < x < \infty, \alpha > 0, \beta > 0).$$

ODHAD PARAMETRŮ TROJPARAMETRICKÉHO WEIBULLOVA ROZDĚLENÍ

Pro jednotlivé teplotní řady byly metodou maximální věrohodnosti nalezeny odhady parametrů. Program Matlab nabízí k tomuto účelu funkci `weibfit`, která odhaduje parametry dvojparametrického Weibullova rozdělení. Tato funkce byla doplněna ještě o odhad parametru θ , přičemž je zde využito předpokladu, že $\hat{\theta} < \min_{i=1 \dots n} X_i$ a vlastně hledáme minimum věrohodnostní funkce na intervalu např., $(\min_{i=1 \dots n} X_i - 2, \min_{i=1 \dots n} X_i - 0.01)$. Pro odhad záporných hodnot minim Milána jsme dostali odhady $\hat{\alpha} = 0.0150$, $\hat{\beta} = 2.2458$, $\hat{\theta} = -1.3100$.



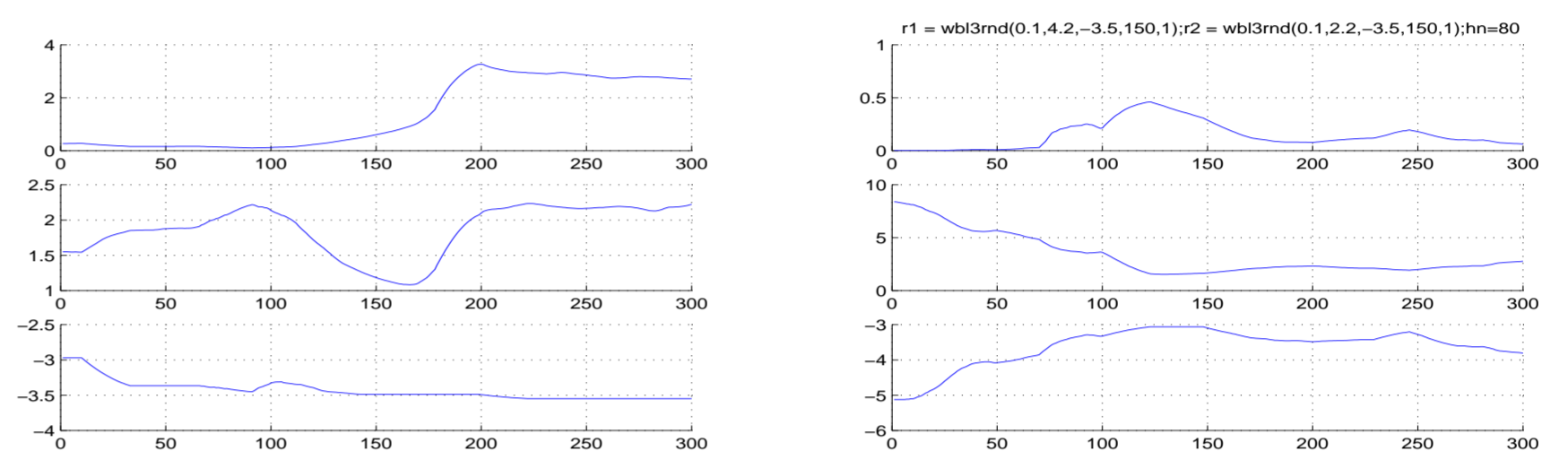
Obrázek 1: Ověřování správnosti modelu trojparametrického Weibullova rozdělení s naměřenými daty minim z ročních teplot v Miláně, vlevo - porovnání hustoty z řady minim ročních teplot v Miláně s odhadnutou hustotou s parametry $\hat{\alpha} = 0.0150$, $\hat{\beta} = 2.2458$, $\hat{\theta} = -1.3100$, vpravo - qq plot pro záporné hodnoty z řady minim ročních teplot v Miláně.

ZMĚNA PARAMETRŮ TROJPARAMETRICKÉHO WEIBULLOVA ROZDĚLENÍ - GENEROVANÁ DATA

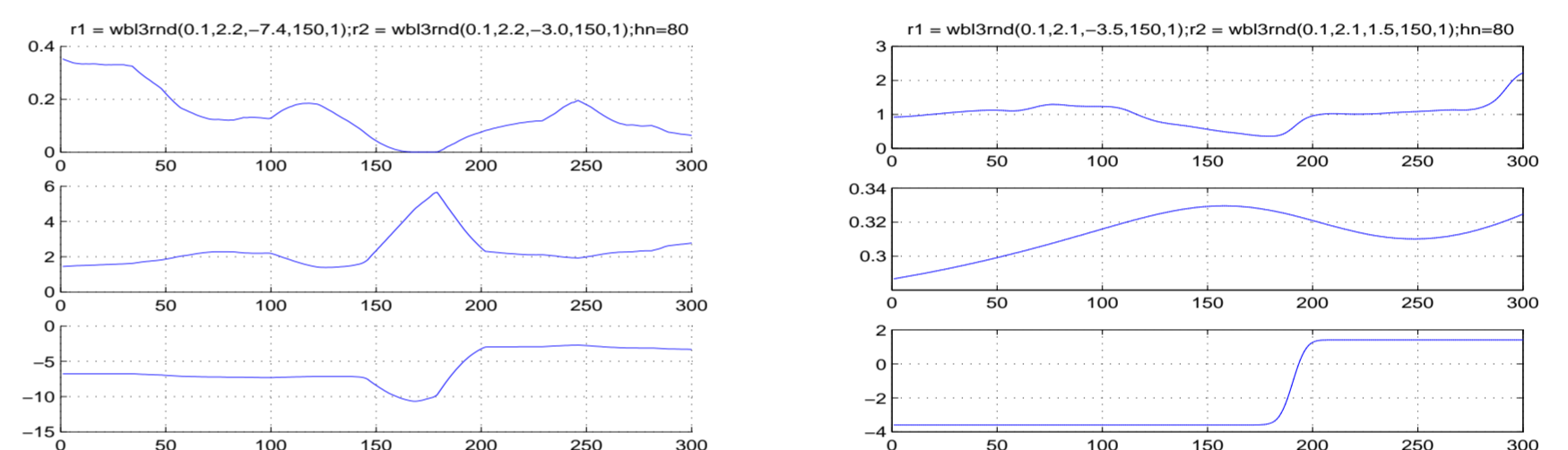
V aplikačních úlohách teorie extrémů na meteorologická data se stalo středem zájmu vyšetřování dočasných trendů v měřeních. U trojparametrického Weibullova rozdělení můžeme zkoumat trend měřítka α , tvaru β a posunutí θ .

Změny parametrů byly nejdříve zkoumány na vygenerovaných datech. Byly porovnávány dvě řady hodnot z trojparametrického Weibullova rozdělení, v nichž došlo ke změně v jednom parametru a bylo sledováno, jak tato změna ovlivní další parametry. K odhadům parametrů v posuvném okénku délky 80 byla použita upravená funkce `weibfit`, k vyhlazení bylo použito normální jádro.

Z obrázků vyplývá, že tato metoda je dobře citlivá na změnu parametrů, zvláště pak na změnu parametru θ . Lze také vysledovat, že s rostoucím parametrem β , klesá parametr α nebo klesající parametr θ se projeví růstem parametru β a poklesem parametru α .



Obrázek 2: Odhady parametrů α, β, θ (shora dolů). Vlevo - změna parametru α , vpravo - změna parametru β .

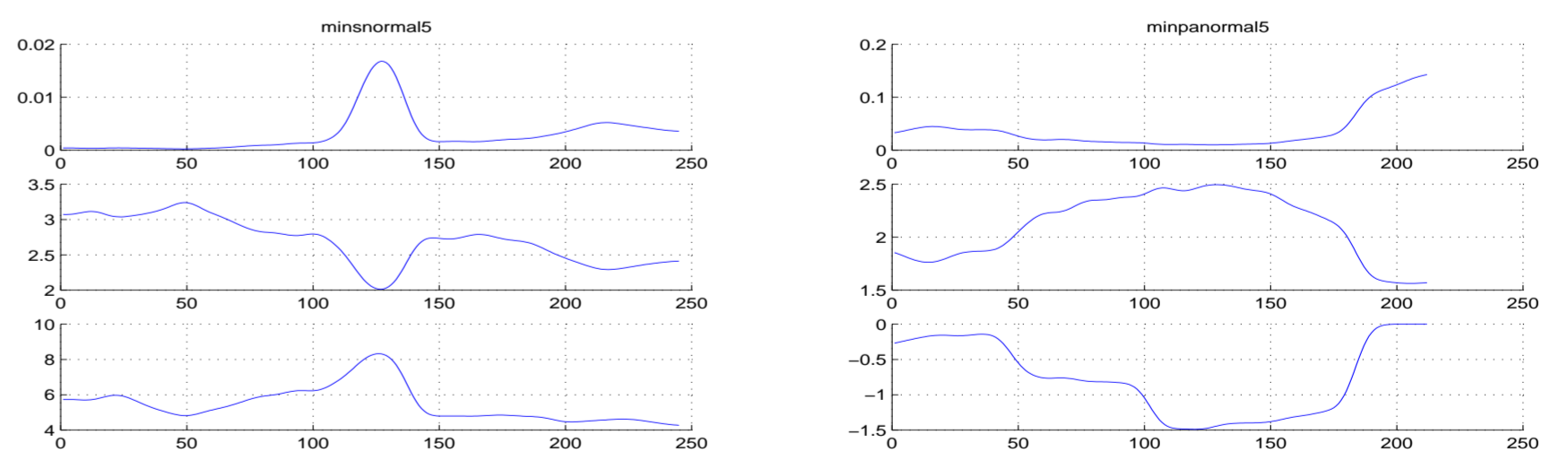


Obrázek 3: Odhady parametrů α, β, θ (shora dolů). Vlevo - malá změna parametru θ , vpravo - větší změna parametru θ .

ZMĚNA PARAMETRŮ TROJPARAMETRICKÉHO WEIBULLOVA ROZDĚLENÍ - ZÁPORNÁ DATA MINIM TEPLOTNÍCH ŘAD

Pracujeme se zápornými hodnotami minim ročních teplot a zajímá nás, zda nedochází ke změně parametrů trojparametrického Weibullova rozdělení. Pro tento model by s časem klesající hodnota parametru β ovlivnila tvar hustoty, u které bychom mohli pozorovat těžší chvost, a tedy větší rozmezí teplot, kdy dochází k minimu. Nebo s časem klesající parametr θ by mohl znamenat postupný růst minimálních teplot.

V našem případě se opět potvrdilo, že pro odhad tří parametrů potřebujeme mnohem větší počet dat. V posuvném okénku délky 80 přidání další minimální hodnoty ovlivní změnu parametru θ , která se pak projeví v odhadu dalších dvou parametrů.



Obrázek 4: Odhady parametrů α, β, θ (shora dolů). Vlevo - záporné hodnoty z minima ve Stockholmu, vpravo - záporné hodnoty z minim ročních teplot v Padově.

References.

- [1] Camuffo D., Jones P. (2001). *Improved understanding of past climatic variability from early daily European instrumental sources*, Climatic Change, Vol.53, No 1-3.
- [2] Hall P., Tajvidi N. (2002). *Nonparametric Analysis of Temporal Trend When Fitting Parametric Models to Extreme-Value Data*. Statistical Science 2000, Vol.15, No 2.
- [3] Rencová M. (2004). *Extrémy v teplotních řadách*. ROBUST 2004.