POZNÁMKY A PŘÍKLADY K PŘEDMĚTU NMAI060

JAROMÍR ANTOCH

16. ledna 2012

Vytvořující funkce

Definice 1. Nechť $a_0, a_1, a_2, \dots$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

konverguje v některém okolí nuly, nazveme ji *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_j\}$.

Poznámka 1. Je-li $\{a_j\}$ omezená, pak zřejmě $\mathcal{A}(x)$ konverguje alespoň v intervalu $(-1, 1)$.

Definice 2. Je-li X celočíselná náhodná veličina, tj. $P(X = j) = p_j,\ j = 0, 1, 2, \dots,\ \sum_j p_j = 1$, pak její *(pravděpodobnostní) vytvořující funkcí* budeme rozumět $\mathcal{P}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.

Poznámka 2.

- Všimněte si, že $\mathcal{P}(z) = E\, z^X$ $\left[\text{připomeňme: } E\, g(X) = \sum_j p_j g(x_j)\right]$.
- Pro celočíselnou náhodnou veličinu X její vytvořující funkce vždy konverguje také v bodě $x = 1$, neboť $\mathcal{P}(1) = 1$.

Vlastnosti vytvořující funkce I

Věta 1. Označme $q_k = P(X > k) = \sum_{j>k} p_j,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ a odpovídající vytvořující funkci $\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$. Pak pro $-1 < x < 1$ platí $\mathcal{Q}(x) = \big(1 - \mathcal{P}(x)\big)/(1 - x)$.

Věta 2. Pro celočíselnou náhodnou veličinu X platí

$$E\,X = \sum_{i=0}^{\infty} j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \mathcal{P}'(1) = \mathcal{Q}(1)$$

Věta 3. Nechť pro celočíselnou náhodnou veličinu X je poloměr konvergence odpovídající vytvořující funkce větší než jedna. Potom platí

$$var\,X = \mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) - \big(\mathcal{P}'(1)\big)^2 = 2\mathcal{Q}'(1) + \mathcal{Q}(1) - \big(\mathcal{Q}(1)\big)^2$$

Poznámka 3. Věta 3 zůstává v platnosti i v případě, že poloměr konvergence $\mathcal{P}(x)$ je roven jedné, pokud existuje konečná $\lim_{x\to 1_-} \mathcal{Q}''(x)$ a pokud derivaci v bodě $x = 1$ vystupující ve vzorci pro $var\,X$ nahradíme jejich limitami pro $x \to 1_-$.

Rozklad na částečné zlomky

Poznámka 4. Teoreticky je znalost $\mathcal{P}(x)$ ekvivalentní znalosti $\{p_j\}$, neboť $p_j = \mathcal{P}^{(j)}(0)/j!$. V praxi však může být získání jednotlivých pravděpodobností značně náročné. V některých případech nám pomůže následující tvrzení.

Věta 4. Nechť vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ posloupnosti $\{p_j\}$ se dá vyjádřit ve tvaru $\mathcal{P}(x) = U(x)/V(x)$, kde $U(x)$ a $V(x)$ jsou polynomy bez společných kořenů, $U(x)$ je stupně nižšího než $V(x)$ a nechť kořeny polynomu $V(x)$ jsou vesměs jednoduché. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}} + \cdots + \frac{\rho_m}{x_m^{n+1}}, \quad 0 \leq n < \infty,$$

kde m je stupeň polynomu $V(x)$, $x_1, \ldots, x_m$ jsou jeho kořeny a $\rho_k = -U(x_k)/V'(x_k)$, $1 \leq k \leq m$.

Poznámka 5. Pro výpočt ρ_k se zpravidla užívá technika rozkladu na částečné zlomky, kterou ma zabudovanou jak program *Maple* tak program *Mathematica*.

Rozklad na částečné zlomky (pokr.)

Poznámka 6. Nechť x_1 je ten kořen $V(x)$ pro nějž $|x_1| < x_k,\ 2 \leq k \leq m$. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big(\frac{x_1}{x_2}\Big)^{n+1} + \ldots + \frac{\rho_m}{\rho_1}\Big(\frac{x_1}{x_m}\Big)^{n+1}\right),$$

takže pro $n \to \infty$ platí $p_n \approx \rho_1/x_1^{n+1}$, kde $\rho_1 = -U(x_1)/V'(x_1)$.

Poznámka 7. Pro platnost asymptotického vztahu $p_n \approx \rho_1/x_1^{n+1}$ lze vynechat předpoklad, že $U(x)$ je stupně menšího než $V(x)$ a jednoduchost stačí požadovat jenom u kořene x_1. Ze zkušenosti je přitom známo, že aproximace je dobrá i pro malé hodnoty n.

Příklad 1. Nechť q_n je pravděpodobnost toho, že v posloupnosti n hodů mincí nepadne ani jednou trojice líců za sebou. Odvoďte vytvořující funkci $Q(x)$ a spočtěte pro menší hodnoty n pravděpodobnosti q_n jak přesně, tak přibližně.

Řešení: $Q(x) = \big(8 + 4x + 2x^2\big)/\big(8 - 4x - 2x^2 - x^3\big)$.

Vytvořující funkce – příklady

Příklad 2. Ověřte tvar vytvořujících funkci pro následující rozdělení:

- Alternativní ... $\mathcal{P}(x) = q + px$
- Binomické ... $\mathcal{P}(x) = (q + px)^n$
- Poissonovo ... $\mathcal{P}(x) = \exp\{-\lambda + \lambda x\}$
- Geometrické ... $\mathcal{P}(x) = p/(1 - qx)$
  resp. $= px/(1 - qx)$
- Negativně binomické ... $\mathcal{P}(x) = \big(p/(1 - qx)\big)^r$
  resp. $= \big(px/(1 - qx)\big)^r$
- Rovnoměrné ... $\mathcal{P}(x) = (1 - x^{n+1})/\big((n + 1)(1 - x)\big)$
  resp. $= \big(x(1 - x^n)\big)/\big(n(1 - x)\big)$

Spočtěte pomocí těchto vytvořujících funkcí odpovídající střední hodnotu a rozptyl.

Poznámka 8. Uvědomte si, že geometrické, respektive negativně binomické, rozdělení jsou nejjednodušší modely popisující doby čekání.

Konvoluce

Definice 3. Nechť $a_0, a_1, \ldots$ a $b_0, b_1, \ldots$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Potom posloupnost $c_0, c_1, \ldots$ definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

se nazývá konvoluce posloupností $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$, a značí se $\{c_j\} = \{a_j\} \star \{b_j\}$.

Věta 5. Nechť $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$ jsou posloupností s vytvořujícími funkcemi $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{B}(x)$. Potom pro vytvořující funkci jejich konvoluce $\{c_j\}$ platí

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x).$$

Poznámka 9. Konvoluci $\{a_j\} \star \{a_j\}$ nazýváme konvoluční mocninou a značíme ji $\{a_j\}^{2\star}$. Podobně n-tou konvoluční mocninu $\{a_j\} \star \ldots \star \{a_j\}$ značíme $\{a_j\}^{n\star}$.

Věta 6. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j\}$ a vytvořující funkcí $\mathcal{P}(x)$. Pak rozdělení součtu $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ je dáno n-tou konvoluční mocninou $\{p_j\}^{n\star}$ a odpovídající vytvořující funkce je $\mathcal{P}(x) \ldots \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^n(x)$.

Složená rozdělení

Věta 7. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ a N jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny, X_i mají totéž rozdělení $\{f_j\}$ a N nechť má rozdělení $\{g_j\}$. Potom $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ je též celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{h_j\}$ a platí

$$h_j = P(S_N = j) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \{f_j\}^{n\star}.$$

Jsou-li $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ a $\mathcal{C}(x)$ vytvořující funkce pozdělení $\{f_j\}, \{g_j\}$ a $\{h_j\}$, potom $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(x)\big)$ a $E\,S_N = E\,X_1 \cdot E\,N$. Rozptyl spočteme aplikací Věty 3 a pravidel pro derivaci složené funkce.

Poznámka 10. Všimněme si, že náhodná veličina $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ není nic jiného než náhodný součet náhodných veličin.

Příklad 3. Nechť počet snesených vajíček N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda)$ a pravděpodobnost narození jedince z vajíčka nechť je p, tj. X_i se řídí alternativním rozdělením. Ukažte, že potom S_N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda p)$.

Větvící se proces – aneb jak se mohou šířit viry

Rekurentní jevy I

Uvažujme posloupnost opakovaných (ne nutně nezávislých) pokusů, z nichž každý má tutéž konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $E_1, E_2, \ldots$. Nechť

$$\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\} \tag{1}$$

značí jev, že první pokus skončil E_{j_1}, druhý E_{j_2}, ..., n-tý E_{j_n}.

Nechť pro všechny konečné posloupnosti typu (1):

- $P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}\right) = \sum_{j_n=1}^{\infty} P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}, E_{j_n}\right), \ 1 < n < \infty.$
- O každé posloupnosti typu (1) lze jednoznačně rozhodnout, zda má či nemá vlastnost ξ.

Výrokem ξ *nastává na n-tém místě (konečné nebo nekonečné) posloupnosti* $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots$ budeme rozumět právě to, že posloupnost $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}$ má vlastnost ξ.

Rekurentní jevy I

Definice 4. Vlastnost ξ nazveme rekurentním jevem, jestliže:

1. ξ nastal na n-tém a (n+m)-tém místě posloupnosti $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{n+m}}$ tehdy a jen tehdy, nastane-li na posledním místě posloupnosti $E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}$ a na posledním místě posloupnosti $E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}$;
2. v takovém případě platí:

$$P\big(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{n+m}}\big) = P\big(E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\big) \cdot P\big(E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}\big)$$

Definice 5. Každému rekurentnímu jevu ξ přiřaďme posloupnosti čísel

$$u_n = P\big(\xi \text{ nastane v pokusu } n - \text{tém}\big) \qquad 1 \leq n < \infty$$

$$f_n = P\big(\xi \text{ nastane v pokusu } n - \text{tém \ poprvé}\big) \qquad 1 \leq n < \infty$$

Dodefinujme formálně $u_0 = 1,\ f_0 = 0$ a zaveďme vytvořující fukce $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ a $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Vztah mezi $\{u_n\}$ a $\{f_n\}$

Poznámka 11. Mezi pravděpodobnostmi $\{u_n\}$ a $\{f_n\}$, respektive mezi jejich vytvořujícími funkcemi $F(x)$ a $U(x)$, platí:

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \ldots + f_n u_0, \quad n \geq 1,$$

$$U(x) - 1 = F(x) U(x), \quad -1 < x < 1.$$

Poznámka 12. Je-li $f = \sum_n f_n = 1$, pak $\{f_n\}$ je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu ξ. Je-li $f < 1$, pak doba čekání T_1 je nevlastní náhodná veličina, která nabývá s kladnou pravděpodobností $(= 1 - f)$ nevlastní hodnoty ∞, kterou interpretujeme tak, že jev ξ nenastal.

Poznámka 13. Nechť T_i, $1 \leq i \leq r$, jsou nezávislé náhodné veličiny mající totéž rozdělení $\{f_n\}$, kde T_i interpretujeme jako dobu, která uplyne mezi (i-1)-ním a i-tým výskytem ξ (tzv. doba návratu). Pak $T^{(r)} = T_1 + \ldots + T_r$ interpretujeme jako dobu čekání na r-tý výskyt ξ.

Pravděpodobnosti r-tých návratů

Označme $f_n^{(r)}, \ 1 \leq n < \infty$ pravděpodobnost toho, že ξ nastane po r-té v n-tém pokusu, a položme $f_0^{(r)} = 0$.

Věta 8. Platí

$$\left\{f_n^{(r)}\right\} = \left\{f_n\right\}^{r\star}$$

Věta 9. Pravděpodobnost jevu, že rekurentní jev nastane v nekonečné posloupnosti pokusů alespoň r-krát je rovna f^r, kde $f = \sum_i f_i$.

Klasifikace rekurentních jevů

Definice 6. Rekurentní jev ξ se nazývá trvalý, je-li $f = 1$, respektive přechodný, je-li $f < 1$, kde $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Věta 10. Pravděpodobnost toho, že rekurentní jev ξ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečně mnohokrát je rovna jedné, jedná-li se o jev trvalý, a je rovna nule, jedná-li se o jev přechodný.

Věta 11. Rekurentní jev ξ je přechodný tehdy a jen tehdy, je-li $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < +\infty$. V tom případě je $f = (u-1)/u$, kde $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Je-li $f = 1$, označme $\mu = E\, T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n$ a interptetujme ji jako střední dobu návratu jevu ξ.

Definice 7. Trvalý rekurentní jev ξ se nazývá nenulový, jestliže $\mu < +\infty$, respektive nulový, jestliže $\mu = +\infty$.

Definice 8. Rekurentní jev ξ se nazývá periodický, jestliže existuje přirozené $\lambda > 1$ tak, že $u_n = 0$ pro všechna n která nejsou dělitelná λ. Největší číslo λ s touto vlastností se nazývá periodou jevu ξ.

Příklady rekurentních jevů I

Příklad 4. Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p. Řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech jsou si rovny. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je pro $p = 1/2$ trvalý a pro $p \neq 1/2$ přechodný. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a f_n a jejich aproximace.

Ukažte, že platí:

- $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$
- $F(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$
- $f_{2n-1} = 0,\ \ f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n q^n,\ \ n = 1, 2, \ldots$
- pro $p = 1/2$ je $u_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$
- Nasimulujte několik realizací této náhodné procházky délky alespoň 10^5 pro různé hodnoty p a nezapomeňte přitom na volbu $p = 1/2$. Nakreslete si odpovídající grafy a rozmyslete.

Příklady rekurentních jevů II

Příklad 5. Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů. Všechny čtyři možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je trvalý. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Příklad 6. Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu. Všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je přechodný. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Pomůcka. Vzpomeňte si na multinomické rozdělení.

Limitní věta

Věta 12. Nechť rekurentní jev ξ je trvalý neperiodický. Potom

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Věta 13. Nechť rekurentní jev ξ je trvalý periodický s periodou λ. Potom

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Poznámka 14. Důkaz se provádí pomocí věty 6 a tvrzení uvedeného v poznámce 4.

Asymptotické rozdělení četností rekurentních jevů

Věta 14. Nechť rekurentní jev ξ je trvalý. Označme N_n počet výskytů ξ do času n a $T^{(r)}$ dobu čekání na r-tý výskyt ξ. Potom jevy $[N_n \geq r]$ a $[T^{(r)} \leq n]$, $1 \leq r \leq n < \infty$ jsou ekvivalentní. Předpokládejme dále, že rozdělení dob prvních návratů má konečnou střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Potom $N_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3}\right)$ a

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \leq y\right) = \Phi(y), \quad y \in \mathbb{R}_1.$$

Věta 15. Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nenulový. Potom pro $n \to \infty$ platí $E\,N_n \approx n/\mu$, kde μ je střední doba návratu.

Poznámka 15. Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nulový. Potom $E\,N_n$ není obecně řádu n^1, viz model náhodné procházky popsaný v příkladu 4. Ukažte, že v tomto případě $E\,N_{2n} \approx 2\sqrt{n/\pi}$.

Rovnice obnovy

Poznámka 16. Limitní věty předchozích odstavců lze považovat za speciální případy určité obecné věty, kterou lze formulovat analyticky bez použití pravděpodobnostních pojmů. Jak uvidíme, i tato obecná věta má pravděpodobnostní význam.

Definice 9. Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ jsou dvě posloupnosti takové, že $a_0 = 0, 0 \leq a_n \leq 1, b_n \geq 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \ \sum_{i=n}^{\infty} b_n < \infty$. Položme $u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} \ldots + a_n u_0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$, tj.

$$\{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} \star \{u_n\} \tag{2}$$

Vztah (2) je v literatuře nazýván *rovnicí obnovy*.

Poznámka 17. Pro vytvořující funkce posloupností uvažovaných v definici 9 platí

$$U(x) = B(x) + A(x)U(x) \quad \equiv \quad U(x) = \frac{B(x)}{1 - A(x)}$$

Rovnice obnovy (pokr. I)

Definice 10. Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme priodickou, existuje-li $\lambda > 1$ tak, že $a_n = 0$ pro všechna n nedělitelná λ. Největší takové λ nazveme periodou.

Věta 16. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neperiodická. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. $\{a_n\}$ lze považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého neperiodického rekurentního jevu ξ, potom

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n, & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty, \\ 0, & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \infty. \end{cases}$$

3. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$, potom pro $n \to \infty$ je

$$u_n \approx \frac{B(x)}{x^{n+1} A'(x)},$$

kde $x < 1$ je jediný kořen rovnice $A(x) = 1$.

Rovnice obnovy (pokr. II)

Věta 17. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je periodická s periodou λ. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\mu = \infty$, potom $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. Je-li $\mu < \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. $\{a_n\}$ lze považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého periodického rekurentního jevu ξ, potom pro $0 \le j < \lambda$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda+j} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\lambda+j}}{\mu} \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} u_{\nu} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}.$$

Rekurentní jevy se zpožděním

Markovovy řetězce

Definice 11. Posloupnost pokusů, z nichž každý má tu samou konečnou nebo spočetou množinu možných výsledků $E_1, E_2, \ldots$ nazveme Markovovým řetězcem (MŘ), jestliže pravděpodobnosti každé konečné posloupnosti výsledků (pokusů nultého až n-tého) je dána vztahem

$$P\left(E_{j_0}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\right) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \ldots p_{j_{n-1} j_n}, \tag{3}$$

kde $a_k,\ k = 1, 2, \ldots$ jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a $p_{jk},\ 1 \leq j < +\infty,\ 1 \leq k < +\infty$ je (pro všechny pokusy táž) podmíněná pravděpodobnost výsledku E_k za podmínky výsledku E_j v pokuse předchozím.

Poznámka 18. Posloupnost $\{a_k\}_k$ nazýváme počátečním rozdělením pravděpodobností, podmíněné pravděpodobnosti p_{jk} nazýváme pravděpodobnostmi přechodu. Zatímco tedy k popisu nezávislých jevů stačí znát pravděpodobnosti p_i, k popisu MŘ potřebujeme znát $\mathbf{a} \equiv \{a_k\}$ a $\mathbf{P} \equiv \{p_{jk}\}$. Všimněme si, že $\sum_j p_{ij} = 1\ \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Příklady Markovových řetězců

Sestavte matice přechodu MŘ vhodného pro popis:

1. Náhodné procházky po přímce.
2. Náhodné procházky po přímce s odrážejícími stěnami.
3. Náhodná procházka po přímce s pohlcujícími stěnami.
4. Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť a rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna molekula s tou samou pstí $1/a$ a přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
5. Modifikovaný Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť a rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna nádoba a jedna molekula z ní se přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
6. Posloupnost nezávislých opakovaných pokusů.
7. Modelujte pomocí MŘ úlohu o zruinování hráče.

Psti přechodu vyšších řádů

Věta 18. Pravděpodobnosti přechodu ze stavu E_j do stavu E_k po n-krocích, jež označíme $p_{jk}^{(n)}$, dostaneme jako prvky matice $\mathbf{P}^n$. Je přitom zvykem dodefinovat $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$.

Poznámka 19. Matici $\mathbf{P}^n$ můžeme spočítat řadou způsobů:

- Postupným umocňováním.
- Přímo z definice (principu).
- Pomocí tzv. Perronova vzorce využívajícího znalosti vlastních čísel $\mathbf{P}$.

Definice 12. Vedle podmíněných pravděpodobností $p_{jk}^{(n)}$ zaveďme nepodmíněné (absolutní) pravděpodobnosti $a_k^{(n)}$ jako pravděpodobnosti jevu, že systém je v čase n ve stavu E_k.

Poznámka 20. Zřejmě platí, že:

$$a_k^{(0)} = a_k, \quad a_k^{(n)} = \sum_j a_j p_{jk}^{(n)} \quad \text{a} \quad a_k^{(n+m)} = \sum_j a_j^{(m)} p_{jk}^{(n)}$$

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}$ nezávislá na j, pak existuje také $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ a jsou si rovny.

Značení

Označme:

- $f_{jj}^{(n)}$ rozdělení pravděpodobností prvních návratů do stavu E_j, začínáme-li ve stavu E_j.
- $p_{jj}^{(n)}$ pravděpodobnost toho, že systém je v čase n ve stavu E_j, začínáme-li ve stavu E_j.
- $f_{ij}^{(n)}$ pravděpodobnosti prvního průchodu stavem E_j, začínáme-li ve stavu E_i.

Věta 19. Položme

$$f_{jj}^{(0)} = 0,\ p_{jj}^{(1)} = p_{jj},\ p_{jj}^{(0)} = 1, f_{ij}^{(0)} = 0,\ p_{ij}^{(0)} = 0.$$

Potom platí

$$p_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(0)} p_{jj}^{(n)} + f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \ldots + f_{jj}^{(n)} p_{jj}^{(0)}$$

$$\left\{p_{ij}^{(n)}\right\} = \left\{f_{ij}^{(n)}\right\} + \left\{f_{jj}^{(n)}\right\} \star \left\{p_{ij}^{(n)}\right\}$$

Klasifikace stavů MŘ

Věta 20. V Markově řetězci zvolme pevně stav E_j.

a) Je-li systém na počátku ve stavu E_j, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev.

b) Je-li systém na počátku ve stavu E_i, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev se zpožděním.

Teorie Markovských řetězců je tedy v podstatě teorií rekurentních jevů. Nové je jen to, že studujeme více rekurentních jevů současně.

Věta 21. V Markově řetězci zvolme pevně stav E_j.

- Stav E_j je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. V takovém případě $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ pro všechna i.
- Stav E_j je trvalý nulový $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$. V takovém případě $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ pro všechna i.

Klasifikace stavů MŘ pokr.

Věta 22. V Markově řetězci zvolme pevně stav E_j.

- Je-li stav E_j trvalý nenulový neperiodický, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \; i \neq j, \quad \text{kde} \quad f_{ij} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

- Je-li stav E_j trvalý nenulový periodický s periodou λ, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j}$$

a pro všechna $i \neq j$ a $0 \leq \nu \leq \lambda - 1$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n\lambda+\nu)} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k\lambda+\nu)}}{\mu_j}$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \quad \text{kde} \quad \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{k}$$

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce I

Definice 13. řekneme, že stav E_k je dosažitelný ze stavu E_j, jestliže existuje $n \geq 0$ takové, že $p_{jk}^{(n)} > 0$.

Definice 14. Neprázdná množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C.

Věta 23. Množina stavů C je uzavřená $\Leftrightarrow$ $p_{jk} = 0$ pro všechna $E_j \in C$ a $E_k \notin C$.

Definice 15. Je-li jednobodová množina $\{E_j\}$ uzavřená, tj. je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav E_j nazývá **absorbční stav**.

Poznámka 21. Vynecháme-li v matici $\mathbf{P}$ MŘ řádky a sloupce odpovídající stavům vně uzavřené množiny C, dostaneme opět stochastickou matici. Množina C tedy představuje opět Markovův řetězec, kterému se říká **podřetězec** původního MŘ.

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce II

Definice 16. MŘ se nazývá **nerozložitelný**, jestliže v něm kromě množiny všech stavů neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů. V opačném případě se nazývá rozložitelný.

Věta 24. Řetězec je nerozložitelný $\Leftrightarrow$ každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Věta 25. Řetězec s konečně mnoha stavy je rozližitelný $\Leftrightarrow$ odpovídající matice $\mathbf{P}$ je po případném přečíslování stavů tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

kde v diagonálních polích stojí čtvercové matice.

Poznámka 22. Řekneme-li, že stavy E_j a E_k jsou téhož typu, budeme tím rozumět, že jsou buď oba přechodné nebo oba trvalé nulové nebo oba trvalé nenulové a současně že jsou oba neperiodickénebo oba periodické s toutéž periodou.

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce III

Věta 26. Je-li stav E_k dosažitelný ze stavu E_j a naopak, stav E_j je dosažitelný ze stavu E_k, pak jsou oba stavy téhož typu.

Věta 27. Je-li stav E_k dosažitelný ze stavu E_j a stav E_j je dosažitelný ze stavu E_k, pak jsou oba stavy téhož typu.

Věta 28. V nerozložitelném MŘ jsou všechny stavy téhož typu.

Věta 29. V MŘ s konečně mnoha stavy neexistují stavy nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

Stacionární rozdělení I

Definice 17. Mějme nerozložitelný MŘ s maticí pravděpodobností přechodů $\mathbf{P}$. Rozdělení $\{v_j\}$ se nazývá stacionární rozdělení tohoto řetězce, jestliže

$$v_j = \sum_i v_i p_{ij} \quad \forall j$$

Tento vztah lze maticově zapsat jako $\mathbf{v} = \mathbf{P}'\mathbf{v}$, kde $\mathbf{P}'$ značí matici transponovanou k $\mathbf{P}$.

Věta 30. V nerozložitelném MŘ existuje stacionární rozdělení $\Leftrightarrow$ jsou všechny stavy trvalé nenulové. Toto stacionární rozdělení $\mathbf{v}$ je jediné a pro všechna i, j platí:

$$v_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \text{v neperiodickem pripade}$$

$$v_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0 \qquad \text{v periodickem pripade}$$

Stacionární rozdělení II

Poznámka 23. V nerozložitelném MŘ s konečně mnoha stavy jsou dle věty 29, takže stacionární rozdělení existuje.

Definice 18. Matice s nezápornými prvky taková, že všechny řádkové i sloupcové součty jsou rovny jedné se nazývá dvojně stochastická.

Věta 31. Mějme nerozložitelný řetězec s dvojně stochastickou maticí. Je-li počet stavů konečný, řekněme n, potom stacionární rozdělení je rovnoměrné, tj. $v_i = 1/n$ pro $1 \leq i \leq n$. Je-li počet stavů nekonečný, potom stacionární rozdělení neexistuje.

Příklad 7.

- Nalezněte stacionarní rozdělení pro náhodnou procházku s dvěma odrážejícími stěnami.
- Zjistěte, pro které hodnoty p existuje stacionární rozdělení v případě náhodné procházky odrážející stěnou v nule a neohraničenou zprava.
- Nalezněte stacionární rozdělení pro Ehrenfestům myšlený pokus.

Přechodné stavy

Uvažujme MŘ obsahující stavy trvalé i přechodné. Nechť T je množina všech přechodných stavů a C je nějaká nerozložitelná uzavřená množina trvalých stavů.

Zafixujme některý stav E_j a označme:

- $x_j = P\big(E_j \to C\big)$ je pravděpodobnost absorbce v C
- $1 - x_j$ je pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu E_j, navždy setrvá v T nebo dojde k absorbci v jiné uzavřené množině stavů
- $x_j^{(1)} = \sum_{k \in C} p_{jk}$ je pravděpodobnost absorbce v C v prvním kroku
- y_j je pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu E_j, navždy setrvá v T

Přechodné stavy – pokr.

Věta 32. Pravděpodobnosti x_j, $j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\xi_j - \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \xi_\nu = x_j^{(1)}, \quad j \in T. \tag{4}$$

Věta 33. Pravděpodobnosti y_j, $j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\eta_j = \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \eta_\nu, \quad j \in T. \tag{5}$$

Věta 34. Soustava (4) má jediné omezené řešení $\Leftrightarrow$ soustava (6) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 35. Pravděpodobnosti setrvání y_j jsou rovny nule $\forall\, j \in T$ $\Leftrightarrow$ soustava (6) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 36. V řetězci s konečně mnoha stavy všechna $y_j = 0$ a x_j jsou tedy jediným řešením soustavy (4).

Přechodné stavy – pokr.

Poznámka 24. V d???

Věta 37. V řetězci se stavy $E_0, E_1, E_2 \ldots$ jsou všechny stavy přechodné $\Leftrightarrow$ soustava

$$\eta_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}\eta_\nu, \quad 1 \leq j < \infty, \tag{6}$$

má netriviální omezené řešení.

Isingův model – úvodní pojmy

- G . . . graf
- V . . . vrcholy (vertexes), $|V| = card(V)$
- E . . . hrany (edges)
- pro jednoduchost nechť každý vrchol i má stavy $\sigma_i \in \{-1, +1\}$
- obecně mohou být stavy $\{1, \ldots, K\}$ a popisovat šedi či barvy atd.
- $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{|V|})$ popisuje stav systému
- prostorem stavů S rozumíme $\{-1, +1\}^{|V|}$, resp. $\{1, \ldots, K\}^{|V|}$

Isingův model

Definice 19. **Isingův model** je pravděpodobnostní rozdělení $\pi(\beta)$ na prostoru stavů $S = \{-1, +1\}^{|V|}$, kde

$$\pi(\beta) = C_{\beta}^{-1} e^{-\beta H(\sigma)}$$

a

$$H(\sigma) = \sum_{(i,j)\in E} I\left[\sigma_i \neq \sigma_j\right] \quad \text{a} \quad C_{\beta} = \sum_{\sigma^{\star}\in \mathbf{S}} e^{-\beta H(\sigma^{\star})}$$

Funkce $H(\sigma)$ se ve fyzice nazývá **Hamiltonián** a reprezentuje energii konfigurace stavů σ.

Poznámka 25. Pro $\beta > \mathbf{0}$ jsou v daném modelu nejpravděpodobnější ty konfigurace stavů σ, pro něž je $H(\sigma)$ malá, tj. mnoho sousedů má tutéž hodnotu stavu (týž spin), tj. mají malou energii (informaci).

Definice 20. Středním spinem konfigurace σ rozumíme

$$M(\sigma) = \frac{1}{|V|} \sum_{i\in V} \sigma_i$$

Modifikace Isingova modelu

- **Klasický Isingův model**:

$$S = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} I\left[\sigma_i \neq \sigma_j\right].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Isingův model s vnějším polem**:

$$S = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}, h) = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} I\left[\sigma_i \neq \sigma_j\right] - h \sum_{i\in V} \sigma_i.$$

Pro všechna $\beta > 0$ a $h > 0$ jsou hodnoty $+1$ preferovány před hodnotami -1.

Modifikace Isingova modelu – pokračování

- **Potův model** pro „náhodné záplatování barevných obrázků“:

$$S = \{1, \dots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} I\left[\sigma_i \neq \sigma_j\right].$$

- **Isingův model pro černobílé obrázky**:

$$S = \{1, \dots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} f\left(\sigma_i, \sigma_j\right),$$

a $f(.)$ je některá vhodná vzdálenost, například:

$$f\left(\sigma_i, \sigma_j\right) = \left|\sigma_i - \sigma_j\right|^p, \;\; p \geq 1.$$

Vrcholy typicky reprezentují pixely a na rozdíl od Potova modelu zde chceme, aby sousedi byli „podobně šedí“, nikoliv identičtí.

Aplikace v analýze obrazu

Zadání:

- Uvažujme fotku prezentovanou maticí pixelů rozměrů $L_1 \times L_2$.
- Vrcholy jsou jednotlivé pixely.
- Hrany spojují sousední pixely.
- Stavy jsou $\{1, \dots, K\}$.
- Prostor stavů $S = \{1, \dots, K\}^V$.
- Obrázek je reprezentován konfigurací $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{|V|}) \in S$.
- Pozorujeme zašuměný obraz $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{|V|} \sim N(0, \delta^2)$.

Problém: Odhadnout skutečný obraz $\boldsymbol{\sigma}$ pozorujeme-li $\mathbf{Y}$ a předpokládáme, že $\boldsymbol{\sigma}$ má apriorní rozdělení $C_\beta^{-1} e^{-\beta H(\boldsymbol{\sigma})}$.

Nástroj: Bayesovská statistika a Markovské řetězce (náhodná procházka po grafu).

Aplikace v analýze obrazu – pokračování

Sdružené rozdělení vektoru $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$ je

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) \sim \frac{e^{-\beta H(\boldsymbol{\sigma})} \cdot \prod_{i \in V} \exp\left\{ - (Y_i - \sigma_i)^2 / 2\delta^2 \right\}}{\text{konstanta jež zalezi na } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})}$$

Aposteriorní rozdělení je

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \mathbf{Y}) \sim \frac{\exp\left[- \beta H(\boldsymbol{\sigma}) + (2\delta^2)^{-1} \sum_{i \in V} \left(2 Y_i \sigma_i - \sigma_i^2\right)\right]}{\text{funkce jež záleží na } (\boldsymbol{\sigma}, \beta, \mathbf{Y})}$$

Další postup:

- Generovat z aposteriorního rozdělení $(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \mathbf{Y})$. Rozsáhlý výběr pak reprezentuje konfigurace které lze považovat za možné (věrohodné) reprezentace obrazu.
- Alternativou je nalézt nejlepší (nejpravděpodobnější) obraz, tj. nalézt konfiguraci $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ maximalizující $P(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \mathbf{Y})$.

Exponenciální rozdělení – opakování

Definice 21. Řekneme, že náhodná veličina X se řídí exponenciálním rozdělením ($X \sim Exp(\lambda)$), má-li hustotu tvaru:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Věta 38. Nechť $X \sim Exp(\lambda)$. Potom $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E\,X = \lambda^{-1}$ a $var\,X = \lambda^{-2}$.

Věta 39. Vlastnost zapomínání. Nechť $X \sim Exp(\lambda)$ a interpretujme ji jako dobu života nějakého procesu. Potom pravděpodobnost jevu, že proces přežije dobu $y(> 0)$ za podmínky, že doposud přežil dobu $x(> 0)$ na době dosavadního života nezáleží.

- Pro exponenciální rozdělení platí, že je jediné spojité rozdělení pro něž

$$P(X > x + y \,|\, X > x) = P(X > y).$$

- Mezi diskrétními rozděleními má tuto vlastnost rozd. geometrické.

Funkce intenzity

Definice 22. Nechť náhodná veličina X má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom funkcí intenzity nazveme

$$\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_1.$$

Poznámka 26. Nechť náhodná veličina X, kterou interpretujme jako dobu života nějakého procesu, má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom pro pravděpodobnost okamžitého selhání platí:

$$\begin{aligned} P\big(x < X \leq x + \Delta \,|\, X > x\big) &= \frac{P(x < X \leq x + \Delta)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \frac{\Delta}{\Delta} \overset{\Delta \to 0}{\approx} \Delta \frac{f(x)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

Poznámka 27. Nechť náhodná veličina $X \sim Exp(\lambda)$. Potom $\Lambda(x) = \lambda$. Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení s konstantní intenzitou.

Lineární proces zrodu a zániku I

Uvažujme systém, který má konečně nebo spočetně mnoho stacvů a ze stavu E_n může s nezanedbatelnou ravděpodobností přecházet pouze do sousedních stavů, tj.

- $E_n \to E_{n+1}$ . . . **zrod**
- $E_n \to E_{n-1}$ . . . **zánik**
- Do jiných sousedů může přejít pouze s pravděpodobností „nekonečně malou“.

Pravděpodobnosti přechodů v časovém intervalu $(t, t+h)$ nechť jsou:

- $P\big(E_n \to E_{n+1}\big) = \lambda_n h + o(h)$
- $P\big(E_n \to E_{n-1}\big) = \mu_n h + o(h)$
- $P\big(E_n \to E_{n\pm j},\ j > 1\big) = o(h)$

Lineární proces zrodu a zániku II

Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost toho, že systém je v čase t ve stavu E_n. **Cílem je** určit $P_n(t+h)$ a najít $p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$.

- Pravděpodobnosti $P_n(t)$ splňují následující systém diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ P_n'(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), \;\; n \geq 1 \end{aligned} \tag{7}$$

- Je-li systém v čase 0 ve stavu E_i, pak jsou splněny následující počáteční podmínky, tj. $P_i(0) = 1$ a $P_n(0) = 0$ pro $n \neq i$.
- Pravděpodobnosti p_n existují, nezávisí na počátečních podmínkách a vyhovují systému lineárních rovnic, který dostaneme z (7) položíme-li $P_n'(t) = 0, \;\; n \geq 0$, tj. soustavě

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ 0 &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1} \;\; n \geq 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Lineární růst

Model. Předpokládejme, že systém je složen z prvků, které se mohou dělit i zanikat. Za malý časový interval délky h nechť pravděpodobnost toho, že se jeden prvek rozdělí na dva rovna je rovna $\lambda h + o(h)$, a pravděpodobnost, že zanikne, je rovna $\mu h + o(h)$, přičemž λ, μ jsou konstanty, které charakterizují prvky.

Poznámka 28. Je-li chování prvků nezávislé, pak jde o model množení a zániku s parametry $\lambda_n = n\lambda,\ \mu_n = n\mu$.

Věta 40. Soustava (7) má následující řešení:

$$P_0(t) = A(t)$$
$$P_n(t) = \big(1 - A(t)\big)\big(1 - B(t)\big)\big(B(t)\big)^{n-1},\ n \geq 1$$

kde

$$A(t) = \frac{\mu\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}, \quad B(t) = \frac{\lambda\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}.$$

Model ústředny s nekonečně mnoha linkami

Příklad 8. Mějme ústřednu s nekonečně mnoha telefoními linkami. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li obsazeno právě n linek.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že jeden hovor skončí v průběhu intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky hovorů jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ bude obsazena nová linka, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Model telefonní dvojbudky s neomezenou frontou ?K?

Příklad 9. Uvažujme stanici obsluhy, která může současně obsluhovat nejvýše dva zákazníky, např. telefonní dvojbudku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné neomezené fronty. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pokud $\lambda < 2\mu$, pak pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = p_0 \left(\lambda \right)^n \, 1 \quad \text{kde} \quad p_0 = 2\mu - \lambda$$

Model parkoviště před MFF bez fronty

Příklad 10. Uvažujme parkoviště automobilů před MFF UK s kapacitou N míst. Stavem systému je počet aut na parkovišti, fronta se netvoří.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že automobil, který v čase t parkuje, odjede v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky stání jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijede nový automobil, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Model telefonní budky s omezenou frontou

Příklad 11. Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat nejvýše jednoho zákazníka, např. telefonní budku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné omezené fronty délky N. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad \text{kde} \quad p_0 = \mu^{N+1} \frac{\lambda - \mu}{\lambda^{N+2} - \mu^{N+2}}.$$

Problém jednoho opraváře a mnoha strojů ?K?

Příklad 12. Mějme M strojů obsluhovaných jedním opravářem. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže nepracuje právě n strojů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že stroj který je v čase t opravován, začne v intervalu $(t, t+h)$ pracovat, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky oprav jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že stroj který v čase t pracoval, se v intervalu $(t, t+h)$ porouchá, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_{M-k} se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem μ/λ, tj. pro $k = 1, \ldots, M$

$$p_{M-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k p_M, \quad \text{kde} \quad p_M = \left[1 + \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\right]^{-1}$$

Model popisující práci několika svářečů ?K?

Příklad 13. Mějme N svářečů, kteří nezávisle na sobě ve víceméně náhodných intervalech odebírají proud. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže pracuje právě n svářečů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že svářeč který je v čase t pracuje, přestane pracovat v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky sváření jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že svářeč, který v čase t nepracoval, v intervalu $(t, t+h)$ pracovat začne, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\big(N, \mu/(\mu+\lambda)\big)$

$$p_n = \binom{N}{n} \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{N-n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Model kinetiky nevratné chemické reakce

Příklad 14. Mějme látku A (reagent), jejíž molekuly se nevratně přeměňují v molekuly látky B (produkt), přičemž rychlost reakce je dána konstantou $\kappa > 0$. Nechť koncentrace reagentu A v čase t je představována náhodnou veličinou $X(t)$, přičemž $X(0) = n_0$.

Z fyzikální podstaty předpokládejme, že:

- Pst jevu, že se změní jedna molekuly za $(t, t+h)$ v případě, kdy se za čas $(0, t)$ změnilo právě $n_0 - n$ molekul, je $n\kappa h + o(h)$.
- Pst změny více než jedné molekuly za $(t, t+h)$ je nulová.
- Látky A a B jsou statisticky nezávislé.
- Inverzní reakce $B \to A$ nastává s pravděpodobností nula.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\left(n_0, e^{-\kappa t}\right)$.

X

Poissonův proces jako model zrodu a zániku

Příklad 15. Uvažujme fyzikální systém, který podléhá okamžitým změnám způsobeným nahodilými vlivy, např. telefonní hovory, rozpad atomů apod. Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost jevu, že za dobu t nastalo právě n změn.

Předpokládejme:

- Stacionární proces, tj. že tato situace nezávisí na poloze intervalu a délce t na časové ose.
- Bez ohledu na počet změn v intervalu $(0, t)$ nechť pst jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ nastane jedna změna je $\lambda h + o(h)$, zatímco pst jevu, že nastane více změn je $o(h)$.

Poznámka 29. Všimněte si, že změny v intervalech $(0, t)$ a $(t, t+h)$ jsou nezávislé.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pravděpodobnosti $P_n(t)$ se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λt.

Systémy hromadné obsluhy

Definice 23. **Systémem hromadné obsluhy** budeme rozumět:

- Jednu nebo více paralelních stanic obsluhy (linek), k nimž přicházejí zákazníci, kteří obsluhu požadují a po obsloužení systém opouštějí.
- Zákazníci, kteří nemohou být okamžitě obslouženi (protože všechny stanice obsluhy jsou obsazené) se řadí do jediné fronty.
- Doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením A.
- Doby obslohy, do nichž se nezapočítává doba čekání ve frontě) jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením B.

Poznámka 30. Rozdělení dob příchodů se zpravidla předpokládá:

- exponenciální . . . M (Markovian)
- deterministické . . . D (Deterministic)
- obecné . . . G (General)
- Erlangovo, tj. $\Gamma(n, \lambda)$ . . . E_n (Erlang)

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Definice 24. Systémy hromadné obsluhy **M/M/x** jsou charakterizovány tím, že příchody zákazníků se řídí homogenním Poissonovým procesem a doby obsluhy mají exponenciální rozdělení.

Věta 41. Systémy **M/M/x** lze popsat obecným procesem zrodu a zániku.

Poznámka 31. Pro model:

- M/M/1 : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty$ a $\mu_j = \mu,\ 1 \le j < \infty$
- M/M/c : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty,\ \mu_j = j\mu,\ 0 \le j \le c$ a
  $\mu_j = c\mu,\ c \le j < \infty$
- M/M/∞ : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty,\ \mu_0 = 0$ a $\mu_j = j\mu,\ 0 \le j < \infty$

Blíže viz příklad o telefonní ústředně s nekonečně mnoho linkami nebo příklad o dvojbudce s neomezenou frontou, tj. příklady 8 a 9.

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Věta 42. Pro systémy **M/M/x** platí:

- M/M/1 : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$.
- M/M/c : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametry $(c + 1,\ \lambda/\mu)$.
- M/M/∞ : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Věta 43. Pro systém **M/M/c** platí, že odchody ze stabilizovaného systému s neomezenou frontou (beze ztrát, odpadání apod.) s parametry λ (vstup) a μ (výstup) jsou opět popsány homogenním Poissonovým procesem s parametrem λ!

Poznámka 32. Systémy **M/M/c** se tedy dají dobře kombinovat a za předpokladu stabilizovatelnosti se chod výsledného systému dá popsat vhodným Markovským procesem.

M/M/1

Poznámka 33. Uvažujme model **M/M/1**. Z věty 42 víme, že limitní pravděpodobnosti p_n ustáleného chování popisující počet zákazníků v ustáleném provozu systému se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$. Odtud ze základních vlastností geometrického rozdělení vyplývá, že:

- Střední počet zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
- Rozptyl počtu zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$
- Střední délka fronty je $\sum_j j p_{j+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

Poznámka 34. Všimněme si, že rozdíl mezi středním počtem zákazníků v systému a střední dobou fronty je $\lambda - \mu$ a nikoliv 1. Rozmyslete!

M/M/1 – pokračování

Poznámka 35. Uvažujme model **M/M/1**.
Potom doba T_n strávená v systému zákazníkem, který se zařadil jako n-tý se řídí gamma rozdělením $\Gamma(n+1,\mu)$, neboť hledaný čas se skládá ze zbytkového času obsluhovaného zákazníka a časů obsluhy všech čekajících ve frontě, včetně našeho zákazníka.
Rozdělení doby čekání T jednoho náhodně vybraného zákazníka je podle věty o úplné pravděpodobnosti směsí rozdělení T_n s vahami danými pravděpodobnostmi ustáleného provozu p_n. Ukažte, že:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \geq 0,$$

takže střední doba setrvání v systému je rovna $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

M/M/1 + M/M/1 = tandem

Sériové propojení dvou systémů obsluhy M/M/1 se nazývá **tandemové uspořádání**.

Podrobnosti ještě budou doplněny.

Simulace M/M/1

```
for (i in 1:maximální počet zákazníků){
   if (aktcas >= maximální čas){break}
   # simulace končí, pokud je dosaženo maximálního času

   while (min(časy naplánovaných událostí) < čas příchodu
     dalšího zákazníka){
     # někdo skončí obsluhu dřív, než dorazí další zákazník
     aktcas <- min(časy naplánovaných událostí)
     stav <- stav - 1
     záznam události, odebrání zákazníka z~obsluhy

     # začátek obsluhy dalšího zákazníka
     # (uvolnila se obslužná stanice)
     if (fronta není prázdná){
       délka obsluhy <- obsluha(aktcas,stav,stanice)
       začátek obsluhy zákazníka, aktualizace fronty
     }
   }
   # nejbližší událostí je příchod i-tého zákazníka
   aktcas <- čas příchodu dalšího zákazníka
   stav <- stav + 1
   záznam události

   # pokud je volná stanice, bude zákazník rovnou obsluhován
   if (některá stanice je volná){začátek obsluhy zákazníka}
     else{zařazení zákazníka na konec fronty}

   # určení času příchodu dalšího zákazníka
   příchod dalšího zákazníka <- aktcas + prichod(aktcas,stav)}
```

M/M/1

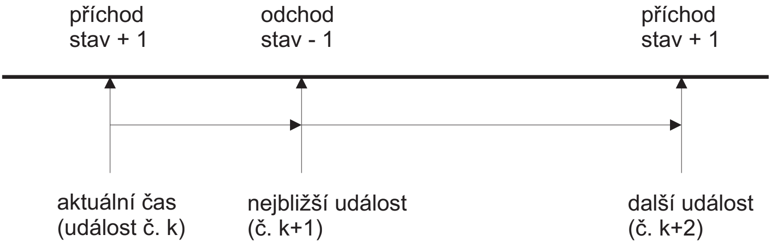
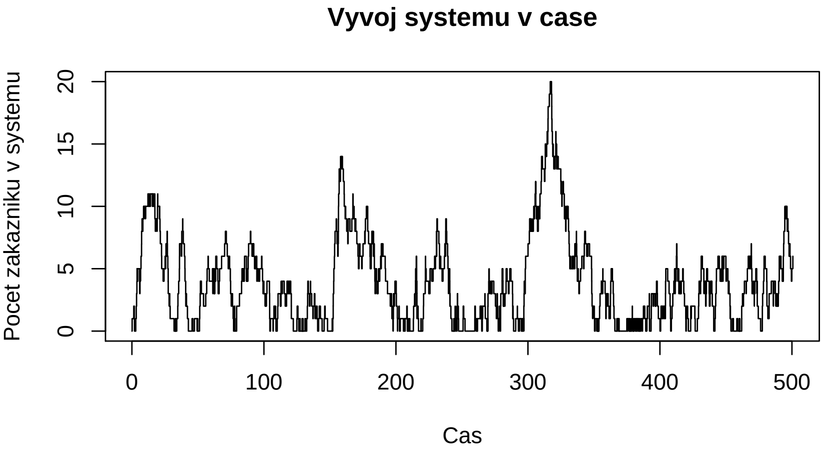


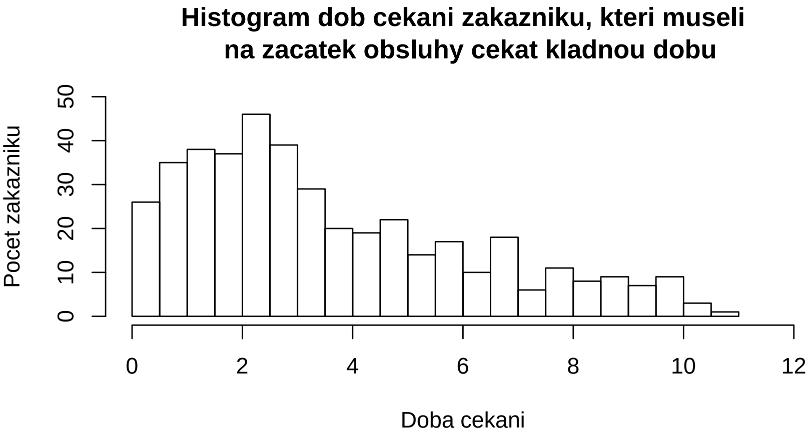
Schéma průběhu uvažovaného simulačního algoritmu.

M/M/1



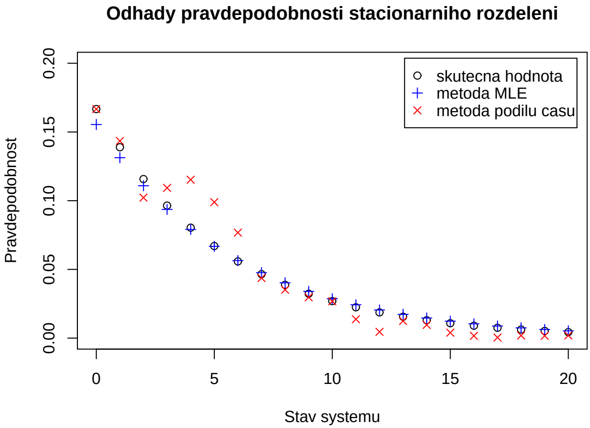
Časový vývoj počtu zákazníků v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$.

M/M/1



Histogram doby čekání na začátek obsluhy těch zákazníků, kteří museli čekat kladnou dobu (v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$).

M/M/1



Srovnání metod odhadu pravděpodobností stacionárního rozdělení v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$.

O spolehlivosti lidí

Human error is here to stay

Anonymous

Předpověď spolehlivosti

Předpověď spolehlivosti je proces, jehož cílem učit, jaké změny (opravy) komponent, resp. bloků systému podniknout, aby se zlepšila spolehlivost celého systému.

Cíle

- Porovnat různá řešení
- Vyhodnotit spolehlivost pro různé konfigurace
- Odhalit slabé body navrženého řešení
- Vylepšit návrh systému

Nástroje

1. Klasické spolehlivostní techniky a modely
2. Analýza stromu poruch (fault tree analysis – FTA)
3. Markovské modelování spolehlivosti
4. Použití pravděpodobnostních stromů atd.

Střední doba do poruchy

Motto: Selhání systému nemusí být způsobeno pouze chybami materiálu, hardware či software, ale také lidskými chybami. Praktické zkušenosti ukazují, že lidské konání může být popsáno podobně jako spolehlivost strojů, výrobků apod., tj. pomocí

- Y . . . doby do (lidské) s chyby odpovídající
- $F(t) = P(Y \leq t)$ . . . distribuční funkcí
- $f(t) = F'(t)$ . . . hustotou
- $R(t) = 1 - F(t) = P(Y > t)$ . . . funkcí spolehlivosti (přežívání)
- $\lambda_H(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ . . . intenzitou poruch t (hazard rate function), kde $P(t < Y \leq t + \Delta \,|\, Y > t) \approx \Delta \cdot \lambda_H(t)$

Střední doba do poruchy

- Snadno lze ukázat, že mimo jiné platí:

$$R(t) = P(Y > t) = e^{-\int_0^t \lambda_H(u)\,du},$$

  což může být použito k predikci spolehlivosti, pokud se doby mezi chybami (poruchami) řídí některým známým rozdělením.

- Odtud lze získat obecný předpis pro střední dobu mezi chybami **mean time to error (MTTE)** pomocí

$$MTTE = \int_0^\infty R(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda_H(u)\,du}\,dt$$

- Mezi nejtypičtější rozdělení užívaná ve spolehlivosti patří
  - exponenciální
  - Weibullovo
  - gamma
  - lognormální

Vybrané cíle statisické inference

Předpokládejme, že sledujeme časy mezi chybami a můžeme o nich usuzovat, že jsou nezávislé. Mezi hlavní cíle statistické inference patří odhadnout základní charakteristiky daného modelu a určit pro ně odpovídající intervaly spolehlivosti, tj.

- odhadnout parametry zvoleného rozdělení
- odhadnout střední dobu do poruchy $E\,Y$
- funkci spolehlivosti $R(t)$ v čase t
- $p\,\%$ kvantil rozdělení poruch (chyb)

Možností je celá řada, v zásadě parametrické a neparametrické.

Weibullovo rozdělení

- Hustota Weibullova rozdělení s parametry β a ν má tvar:

$$f(y;\,\beta,\,\nu)=\begin{cases}\frac{\nu}{\beta}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\nu-1}\exp\left\{-\left(y/\beta\right)^{\nu}\right\}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

kde $E\,Y=\beta\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$ a $var\;Y=\beta^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\nu}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right)$

- MLE $\widehat{\beta}$ and $\widehat{\nu}$ parametrů β a ν dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$\widehat{\beta}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^{\widehat{\nu}}\right)^{1/\widehat{\nu}},$$

$$\frac{1}{\widehat{\nu}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^{\widehat{\nu}}\log Y_i}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^{\widehat{\nu}}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log Y_i,$$

Weibullovo rozdělení

- MLE $E\,Y$ is $\widehat{\beta}\,\Gamma\big(1+\frac{1}{\widehat{\nu}}\big)$. Interval spolehlivosti pro $E\,Y$ se nejprve určí pro

$$\log E\,Y = \log\beta + \log\Gamma\Big(1+\frac{1}{/}\nu\Big) = \eta + \log\Gamma(1+\delta)$$

  a teprve potom transformuje pro $E\,Y$.
- MLE pro $\log\ E\,Y$ je $\widehat{\eta} + \log\Gamma(1+\widehat{\delta})$ a pro jeho asymptotický rozplyl $V(\delta)/n$ platí

$$V(\delta) = n\,var\,\widehat{\eta} + n\,\psi^2(1+\delta)\,var\,\widehat{\delta} + 2n\,\psi(1+\delta)\,cov\,(\widehat{\eta},\widehat{\delta})$$

- Asymptotický $(1-\alpha)\,100\%$ konfidenční interval pro $E\,Y$ má hranice:

$$\widehat{\beta}\,\Gamma\big(1+1/\widehat{\nu}\big)\ \exp\Big\{-u_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\widehat{\delta})/n}\Big\}$$

$$\widehat{\beta}\,\Gamma\big(1+1/\widehat{\nu}\big)\ \exp\Big\{u_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\widehat{\delta})/n}\Big\}$$

Weibullovo rozdělení

- MLE odhad funkce přežívání $R(t)$ je $\widehat{R(t)} = exp\big(-(t/\widehat{\beta})^{\widehat{\nu}}\big)$.
- Asymptotický $(1-\alpha)\,100\,\%$ konfidenční interval má tvar

$$\left(\widehat{R(t)} - u_{1-\alpha/2}\,\widehat{\sigma}_{R(t)},\ \widehat{R(t)} + u_{1-\alpha/2}\,\widehat{\sigma}_{R(t)}\right),$$

  kde $\widehat{\sigma}_{R(t)}$ je standardní odchylka $\widehat{R(t)}$ s parametry nahrazenými MLE odhady etc.
- MLE $p\,\%$ kvantilu t_p je $\widehat{t_p} = \widehat{\beta}\ \exp\left\{\frac{1}{\widehat{\nu}}\log\big(-log(1-p)\big)\right\}$.
  Asymptotický $(1-\alpha)\,\%$ konfidenční interval lze založit na

$$\log t_p = \log\beta + \frac{1}{\nu}\log\big(-\log(1-p)\big) = \eta + \delta\log\big(-\log(1-p)\big).$$

- **etc. etc.**

Weibullovo rozdělení (příklad)

0.58	0.29	0.93	1.11	1.26
1.39	1.89	0.28	0.44	1.57
0.76	0.64	2.12	0.25	1.36
0.63	0.87	0.57	0.64	1.68

- $\overline{Y} = 0.963$ a $\sigma_n^2 = 0.29516$
- $\widehat{\beta} = 1.089$, kde $var\,\widehat{\beta} = 0.01868$
- $\widehat{\nu} = 1.876$, kde $var\,\widehat{\nu} = 0.10698$
- $cov(\widehat{\beta}, \widehat{\nu}) = 0.01400$
- $\widehat{E\,Y} = 0.967$
- $\widehat{R(1)} = \exp\{-(1/\widehat{\beta})^{\widehat{\nu}}\} = 0.426$
- $var\,\widehat{R(1)} = 0.007968$
- asymptotický 95% konfidenční interval pro $R(1)$ je buď $(0.251, 0.601)$ nebo $(0.267, 0.603)$

Vybrané další cíle statistické inference

Předpokládejme, že jsme napozorovali doby mezi poruchami $\{Y_i\}$, o nichž můžeme předpokládat, že tvoří náhodný výběr. Statistika dále nabízí:

- testy o typu rozdělení
- testy o parametrech zvoleného rozdělení
- testy o změnách modelu
- **etc. etc.**

Vybrané další cíle statistické inference

Předpokládejme, že jsme napozorovali doby mezi poruchami $\{Y_i\}$, o nichž můžeme předpokládat, že tvoří náhodný výběr. Statistika dále nabízí:

- testy o typu rozdělení
- testy o parametrech zvoleného rozdělení
- testy o změnách modelu
- **etc. etc.**

CO BYSTE MĚLI MÍT ROZMYŠLENO VY?

CO TYTO POJMY A TESTY ZNAMENAJÍ !

FTA – Analýza stromu poruch

Formální metoda pro výpočet složitých pravděpodobností pomocí "kombinování" jednoduchých, tzv. základních, událostí

Historie

- 1956 – Bell ve snaze zvýšit spolehlivost balistických střel
- Dnes – Aeronautika, automobilový průmysl, spolehlivost složitých průmyslových systémů jako jsou atomové elektrárny či cognitive sciences pro modelování lidského chování

Možnosti

- Graphická reprezentace systému
- Odhalení zdrojů možných potíží
- Výpočet pravděpodobnosti poruch
- Etc., etc.

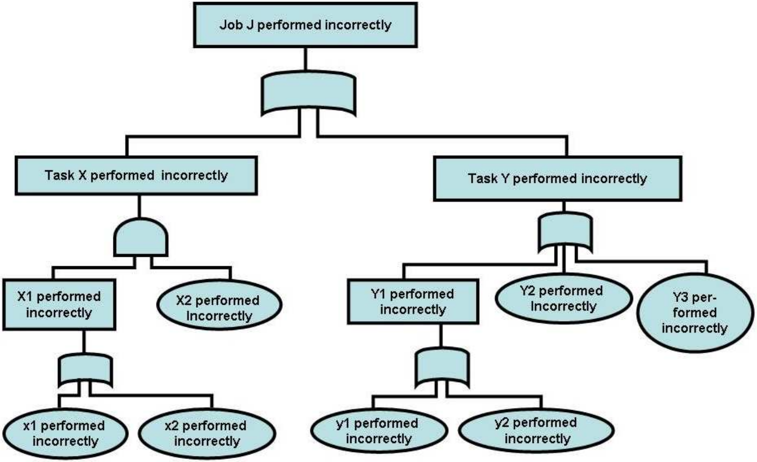
Reálný, byť učebnicový, problém

Vaším úkolem je provést následující úkol, který se skládá z "nezávislých" podúloh X a Y.

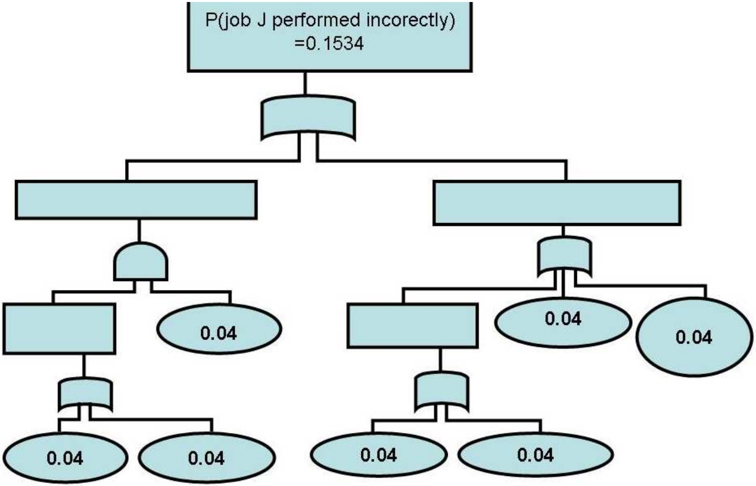
- Aby byl úkol splněn, musí být obě podúlohy provedeny bezchybně.
- Podúloha X se skládá z dvou podúkolů X_1 a X_2. Pro splnění podúlohy X stačí splnění alespoň jednoho z těchto podúkolů.
- Podúloha Y se skládá z tří podúkolů Y_1, Y_2 a Y_3. Aby byla splněna podúloha Y správně, všechny tři podúkoly musí výt vyřešeny správně.
- Podúkohy X_1 a Y_1 se skládají ze dvou kroků, řekněme x_1 a x_2, resp. y_1 a y_2. Pro korektní splnění každého z těchto podúkolů musí být splněny korektně oba kroky.

Úkol pro vás: Navrhněte model pro výše popsanou situaci a spočtěte pravděpodobnost bezchybného splnění úkolu.

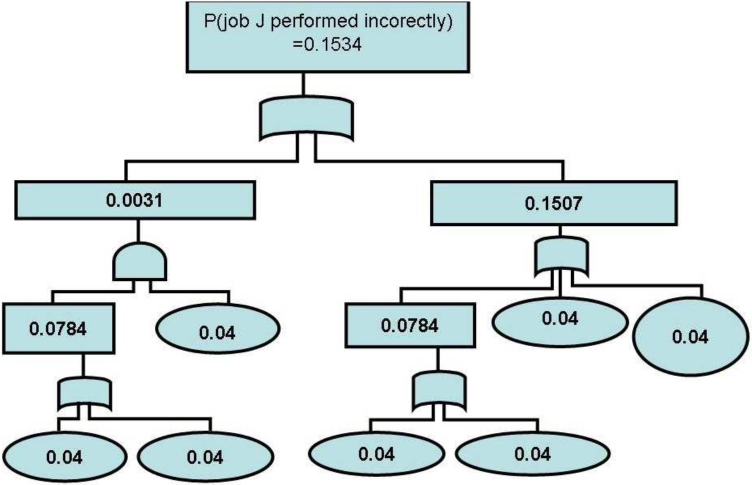
Reálný, byť učebnicový, problém



Reálný, byť učebnicový, problém



Reálný, byť učebnicový, problém



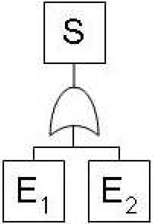
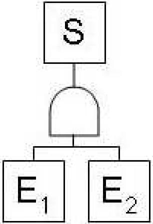
Základní principy FTA

Strom poruch se skládá z úrovní spojených logickými branami popisujícími vytváření nežádoucích událostí.

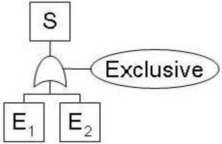
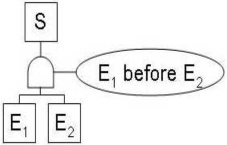
Základní stavební kameny

- **Logické brány (logical gates)**
- **Základní události (basic events)**, umožňující "rozklad" problému
- **Nežádoucí události (undesired events)**: přesně definované negativní události jež jsou pro daný problém jednoznačné

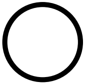
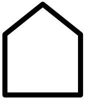
Reprezentace logických bran

Symbol	Název	Popis
	OR gate	Událost S nastane tehdy, nastane-li libovolná z událostí E_1 nebo E_2
	AND gate	Událost S nastane nastanou-li obě události E_1 i E_2

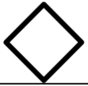
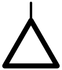
Reprezentace logických bran

Symbol	Název	Popis
	**Exclusive OR gate**	Událost S nastane, jestliže jedna z událostí E_1 nebo E_2 nastane a druhá nikoliv
	**Priority AND gate**	Událost S nastane, jestliže události E_1 a E_2 nastanou v daném pořadí

Reprezentace událostí

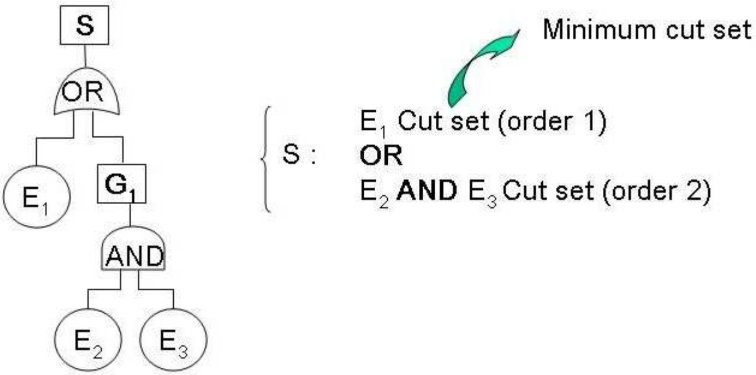
Symbol	Název	Popis
	**Basic event**	Nejnižší úroveň chyb. Mezi základní události patří poruchy individuálních komponent, liské chyby či chyby software.
	**Conditional event**	Podmíněné události závisí na základních poruchách a jsou ve stromu poruch umístěny nad branami.
	**House event**	Událost která může být zapnuta nebo vypnuta. Je.li zapnuta, ze odpovídající pravděpodobnost výskytu poruchy nastavena na 1, jinak je nastavena na 0.

Reprezentace událostí

Symbol	Název	Popis
	Undeveloped event	Tato událost nebyla, z jakéhokoliv důvodu, definována.
	Triangle in	Užívá se pro naznačení opakování části stromu poruch nebo jako pokračování na další straně.
	Triangle out	Používá se ve spojení s blokem **Triangle in**.

“Cut sets”

Definice: **Cut set** may be described as a collection of basic events that will cause the top fault tree event to occur. A cut set is said **minimal** if it cannot be further reduced but it can still to ensure the occurence of the top fault tree event.



Jak nalézt "cut sets"?

"Cut sets" se zpravidla hledající pomocí nástrojů Boolovské algebry.

- Pro každý jev je definovaná boolovská proměnná.
- Boolovský operátor "$\cdot$" je přiřazen bráně **AND Gate**
- Boolovský operátor "$+$" je přiřazen bráně **OR Gate**

Fault Tree je zjednodušen pomocí pravidel Boolovské algebry.

Pravidla Boolovské algebry

Sum proprieties

$0+0=0$	$a+1=1$
$0+1=1$	$a+0=a$
$1+0=1$	$a+a=a$
$1+1=1$	$a+\bar{a}=1$

Product proprieties

$0\,.\,0=0$	$a\,.\,1=a$
$0\,.\,1=0$	$a\,.\,0=0$
$1\,.\,0=0$	$a\,.\,a=a$
$1\,.\,1=1$	$a\,.\,\bar{a}=0$

Negation

$\bar{0}=1$

$\bar{1}=0$

$\bar{\bar{a}}=a$

Commutativity

$a\,.\,b=b\,.\,a$

$a+b=b+a$

Associativity

$a\,.\,(b\,.\,c)=(a\,.\,b)\,.\,c$

$a+(b+c)=(a+b)+c$

Distributivity

$a\,.\,(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c$

$(a+b)\,.\,(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Combined proprieties

$a\,.\,(a+b)=a$	$(a+b)\,.\,(a+\bar{b})=a$
$a+a\,.\,b=a$	$(a+b)\,.\,(a+c)=a+b\,.\,c$
$a+\bar{a}\,.\,b=a+b$	$(a+b)\,.\,(\bar{a}+c)=a\,.\,c+\bar{a}\,.\,b$

Morgan's theorem

$\overline{a+b+c}=\bar{a}\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c}$

$\overline{a\,.\,b\,.\,c}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

Kvantitativní analýza

- Pravděpodobnost nežádoucí události je dána vztahem

$$\begin{aligned} P(\text{Undesired Event}) &= P\big(C_1 + C_2 + \ldots + C_n\big) \\ &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} P\big(C_i\big) - \sum\nolimits_{i<j} P\big(C_1 \cdot C_j\big) \\ &\quad + \ldots + (-1)^{n+1} P\big(C_1 \cdot \ldots C_n\big) \end{aligned}$$

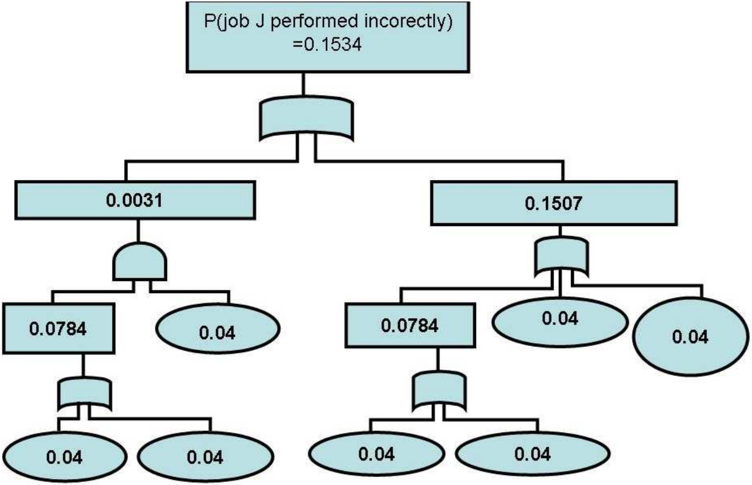
- Bonferroniho approximace pro malá $P(C_i)$

$$P(\text{Undesired Event}) \approx \sum\nolimits_{i=1}^{n} P\big(C_i\big),$$

resp.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} P\big(C_i\big) - \sum_{i<j} P\big(C_i \cdot C_j\big) \le P(\text{Undesired Event}) \le \sum\nolimits_{i=1}^{n} P\big(C_i\big)$$

Reálný, byť učebnicový, problém, naposledy



Výhody a nevýhody FTA

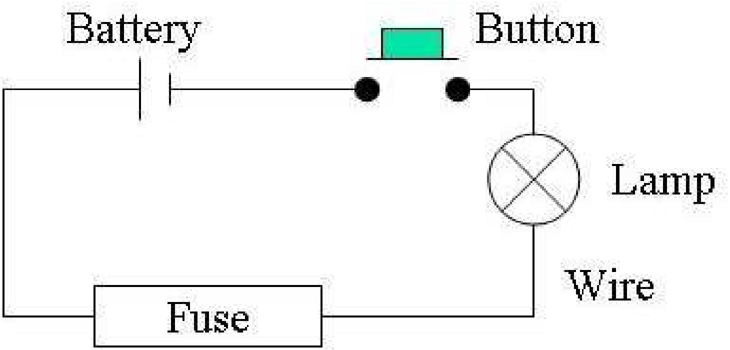
Výhody

- Deduktivně identifikuje poruchy (zdroje poruch)
- Slouží jako grafický nástroj pro rozhodování
- Poskytuje náhled na chování celého systému
- Je schopna se vypořádat i s velmi složitými systémy
- Dovoluje se soustředit v daném čase na specifické chyby.
- Dovoluje jak kvantitativní tak kvalitativní analýzu problému.

Nevýhody

- Analytik musí problému rozumět skutečně do hloubky
- Je náročná na čas i náklady
- Není snadné provést její nezávislou kontrolu
- Typicky pracuje pouze s událostmi typu ANO/NE a není snadné s její pomocí popsat systémy, které pracují tzv. "napůl" (částečně)

Jiný učebnicový příklad



Nežádoucí událost: Zmáčkneme vypínač a lampa se nerosvítí.

Úkol pro vás: Navrhněte strom poruch a spočtěte pravděpodobnost nežádoucí události.

O užitečnosti stochastiky

MOHOU BÝT VÝSLEDKY PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY UŽITEČNÉ TAKÉ PRO INFORMATIKY?

O užitečnosti stochastiky

MOHOU BÝT VÝSLEDKY PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY UŽITEČNÉ TAKÉ PRO INFORMATIKY?

SOUDÍM, ŽE ANO, A PROTO JSEM VÁM O TOM CELÝ SEMESTR POVÍDAL