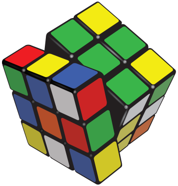
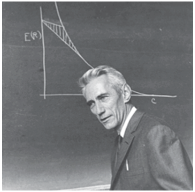
MARKOVOVY ŘETĚZCE A PROCESY
POZNÁMKY A PŘÍKLADY
NMAI 060 – NMAI 165

JAROMÍR ANTOCH



6. ledna 2025



Hlavní cíle přednášky

Hlavním tématem této přednášky je studium Markovských řetězců a Markovských procesů, jejich zobecněním a aplikacím. Více či méně podrobně probereme:

- Pojem rekurence v teorii pravděpodobnosti
- Náhodné procházky
- Markovské řetězce s diskrétními stavy a diskrétním časem
- Markovské řetězce a začátky teorie informace
- Isingův model a odšumování obrázků
- Markov Chain Monte Carlo simulace
- Durbinův – Watsonův proces

- Markovské procesy s diskrétními stavy a spojitým časem
- Modely růstu a zániku
- Základy modelů teorie hromadné obsluhy
- Poissonův proces

Doporučená literatura

- Chung L. Markov Chains, Springer.
- Dupač V., Dupačová J., Markovovy procesy I a II, SPN
- Durrett R. Essentials of Stochastic Processes, Springer.
- Feller W., An Introduction to Probability Theory, Wiley.
- Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley.
- Grimmett G., Stirzaker D. Probability and Random Processes, Oxford Univ. Press.
- Grimmett G., Stirzaker D. One Thousand Exercises in Probability, Oxford Univ. Press.
- Kemeny J.G., Snell L. Finite Markov Chains: With a New Appendix Generalization of a Fundamental Matrix, Springer.
- Prášková Z. and Lachout P. Základy náhodných procesů, Karolinum.,
- Ross S.M. Introduction to Probability Models, 12th ed. Academic Press, Elsevier.
- Svešnikov A.A. a kol. Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí, SNTL.

JEVY S NIMIŽ BUDEME PRACOVAT

- Uvažujme posloupnost opakovaných (ne nutně nezávislých[1]) pokusů, z nichž každý má tutéž konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, kde zpravidla $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}$, a

$$\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\} \tag{1}$$

nechť značí jev, že první pokus skončil výsledkem E_{j_1}, druhý pokus skončil výsledkem E_{j_2}, …, n-tý pokus skončil výsledkem E_{j_n}.
- Nechť ξ je nějaká vlastost konečných posloupností (1) a nechť o každé posloupnosti typu (1) lze jednoznačně rozhodnout, zda má či nemá vlastnost ξ.
- Nechť pro všechny konečné posloupnosti (1) platí: $P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}\right) = \sum_{j_n\in\mathcal{J}} P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}, E_{j_n}\right)$, $1 < n < \infty$, $j_n \in \mathcal{J}$

[1] Připomeňme, že jsou-li jevy $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\}$ sdruženě nezávislé, potom

$$P\left(\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(E_{j_k}\right)$$

Rekurentní jevy

Def. 1: Výrokem ξ *nastává na n-tém místě (konečné nebo nekonečné) posloupnosti* $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots\right\}$ budeme rozumět to, že posloupnost $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\}$ má vlastnost ξ.

Def. 2: Vlastnost ξ nazveme rekurentním jevem, jestliže:

1. ξ nastane na n-tém a $(n+m)$-tém místě posloupnosti $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{n+m}}\right\}$ tehdy a jen tehdy, nastal-li na posledním místě posloupnosti $\left\{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\right\}$ a na posledním místě posloupnosti $\left\{E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}\right\}$ (jinými slovy, jak posloupnost $\left\{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\right\}$ tak posloupnost $\left\{E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}\right\}$ má vlastnost ξ)
2. a jestiže v takovém případě platí:

$$P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}}_{\xi}}^{A}, \overbrace{\underbrace{E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}}_{\xi}}^{B}\Big) = P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}}_{\xi}}^{A}\Big) \cdot P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}}}_{\xi}}^{B}\Big)$$

Recurrent events

- Let ξ be an attribute of finite sequences; that is, we suppose that it is uniquely determined whether a sequence $\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\}$ has, or has not, a characteristic ξ
- We agree that the expression ξ occurs at the n-th place of (finite or infinite) sequence $\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots\}$ means that the sequence $\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\}$ has the property ξ is an abbreviation for the statement that the sequence $\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\}$ has the attribute ξ
- This convention also implies, that the occurrence of ξ at nth place depends solely on the outcome of the first n trials.
- It is also understood that when speaking of a recurrent event ξ, we are really referring to a class of events defined by the property that ξ occurs.

Recurrent events (definition)

Def. 3: The attribute ξ defines a recurrent event if:

1. In order that ξ occurred at the n-th and $n+m$-th place of the sequence $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_{n+m}}\right\}$ it is necessary and sufficient that ξ occurs at the last place of each of the subsequences $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}\right\}$ and $\left\{E_{j_{n+1}}, E_{j_{n+2}}, \dots, E_{j_{n+m}}\right\}$

   By the other words, both the sequence $\left\{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}\right\}$ and the sequence $\left\{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}\right\}$ have property ξ
2. If ξ occurs at the nth place then identically

$$P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}}_{\xi}}^{A}, \overbrace{\underbrace{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}}_{\xi}}^{B}\Big) = P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}}_{\xi}}^{A}\Big) \cdot P\Big(\overbrace{\underbrace{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}}_{\xi}}^{B}\Big)$$

PRAVDĚPODOBNOSTI NÁVRATŮ $\{f_n\}$, $\{u_n\}$ A VZTAH MEZI NIMI

Def. 4: Každému rekurentnímu jevu ξ přiřaďme posloupnosti čísel

$$f_n = P\Big(\xi \text{ nastane v } n-\text{tém pokusu poprvé}\Big) \qquad 1 \le n < \infty$$
$$u_n = P\Big(\xi \text{ nastane v } n-\text{tém pokusu}\Big) \qquad 1 \le n < \infty$$

Dodefinujme formálně $f_0 = 0,\ u_0 = 1$ a zaveďme vytvořující funkce $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ a $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Věta 1: Mezi pravděpodobnostmi $\{f_n\}$ a $\{u_n\}$, resp. mezi jejich vytvořujícími funkcemi$F(x)$ a $U(x)$, platí rekurentní vztah:

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \ldots + f_n u_0, \qquad n \ge 1$$

$$F(x)U(x) = U(x) - 1, \qquad -1 < x < 1$$

Příklady rekurentních jevů

Příklad 1: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p.
Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech si jsou rovny. Srovnejte s příkladem 6.

Příklad 2: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů, a to nezávisle na předchozích krocích. Jednotlivé možnosti nemusí být nutně stejně pravděpodobné.
Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 3: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu, a to nezávisle na předchozích krocích. Jednotlivé možnosti nemusí být nutně stejně pravděpodobné. Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice.

Úkol: Ukažte, že pokud se jedná o symetrickou náhodnou procházku, tj. pohyby v jednotlivých směrech jsou stejně pravděpodobné, potom $u_{2n} \leq konst/(n\sqrt{n})$ a rozhodněte o klasifikaci tohoto rekurentního jevu.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 4: Uvažujme Rubikovu kostku, tj. mechanický hlavolam tvořený zpravidla krychlí složenou z dílčích barevných krychliček. Nejběžnějším typem kostky je model $3 \times 3 \times 3$. Celkový počet kombinací pro tento model je $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 43.25 \times 10^{18}$ (Wikipedia). Úkolem zpravidla je rotacemi přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá stěna byla obarvena jen jednou barvou.

Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice, jíž může být libovolné rozestavení dílčích krychliček.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 5: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí (Z,N) s pravděpodobností zdaru p. Zajímejme se o některý vzor možných výsledků, např. ZZZ, $ZZNZN$, apod.
Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže na konci posloupnosti n-pokusů pozorujeme daný vzor. Aby jev ξ vyhovoval definici rekurentního jevu, budeme vždy po ukončení takové série načítat zdary znovu.
V případě vzoru ZZZ to znamená, že $n^{tý}$, $(n-1)^{ní}$ a $(n-2)^{hý}$ pokus skončil výsledkem Z, takže v posloupnosti $ZZZNZZZZ$ rekurení jev ξ nastává v čase třetím a sedmém.

Úkol: Spočtěte pravděpodobnosti u_n a f_n, a jejich approximace. Využijte k tomu:

1. Vhodný stavový automat.
2. Fakt, že (mimo jiné) platí

$$p^3 = u_n + p u_{n-1} + p^2 u_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

PŘÍKLADY REKURENTNÍCH JEVŮ (POKR.)

Assume a sequence of independent trials with dichotomous response (T,F). We say that recurrent event ξ occurred in time n if some prescribed pattern as, e.g., TTT or $TTFTF$, occurred at the end of n trials and we start from scratch every time a pattern is completed.

• The term "success run of length r" has been defined in the literature in several different ways. It is largely matter of convention and convenience whether a sequence of three consecutive successes is said to contain 0, 1, or 2 runs of length 2, and for different purposes different definitions have been adapted. However, if we are to use the theory of reccurent events, then the notion of runs of length r must be defined so that we start from scratch every time a run is completed. This means adapting a following definition:

• *A sequence of n letters T and F as many runs of length r as there are nonoverlapping uninterupted successions of exacty r letters T. In a sequence of Bernoulli trials a run of length r occurs at the n^{th} trial, if the n^{th} trial adds a new run to the sequence.*

• Thus in a series $SSSSFSSSSSS$ we have thre runs of length 3, and they occur at trials 3, 8, 11; there are five runs of the length 2, and they occur at trials 2, 4, 7, 9, 11.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Pozn. 1: „Náhodné procházky“ po grafech, po vrcholech krychlí $\{0, 1\}^n$, atd., mohou být též často popsány pomocí rekurentních jevů.

Opakované výskyty rekurentních jevů

Pozn. 2:

- Je-li $f = \sum_n f_n = 1$, pak lze $\{f_n\}$ považovat za rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu ξ.
- Je-li $f < 1$, pak doba čekání T_1 je tzv. nevlastní náhodná veličina, která nabývá s kladnou pravděpodobností ($= 1 - f$) nevlastní hodnoty ∞, kterou interpretujeme tak, že rekurentní jev ξ nenastal.
- Zdůrazněme, že pravděpodobnosti $\{u_n\}$ netvoří rozdělení pravděpodobnosti.

Opakované výskyty rekurentních jevů

Pozn. 3:

- Je-li $f = \sum_n f_n = 1$, pak lze $\{f_n\}$ považovat za rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu ξ.
- Je-li $f < 1$, pak doba čekání T_1 je tzv. nevlastní náhodná veličina, která nabývá s kladnou pravděpodobností $(= 1 - f)$ nevlastní hodnoty ∞, kterou interpretujeme tak, že rekurentní jev ξ nenastal.
- Zdůrazněme, že pravděpodobnosti $\{u_n\}$ netvoří rozdělení pravděpodobnosti.

Věta 2: Označme $f_n^{(r)}$, $1 \leq n < \infty$, pravděpodobnost jevu, že ξ nastane po r-té v n-tém pokusu, a položme $f_0^{(r)} = 0$. Potom platí

$$\left\{f_n^{(r)}\right\} = \left\{f_n\right\}^{r\star}$$

kde $\left\{f_n\right\}^{r\star}$ značí r-tou konvoluční mocninu posloupnosti $\left\{f_n\right\}$.

Věta 3: Pravděpodobnost jevu, že rekurentní jev nastane v nekonečné posloupnosti pokusů alespoň r-krát je rovna f^r, kde $f = \sum_i f_i$.

Klasifikace rekurentních jevů

Def. 5: Rekurentní jev ξ se nazývá trvalý, je-li $f = 1$, respektive přechodný, je-li $f < 1$, kde $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Věta 4: Pravděpodobnost toho, že rekurentní jev ξ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečně mnohokrát je rovna jedné, jedná-li se o jev trvalý, a je rovna nule, jedná-li se o jev přechodný.

Věta 5: Rekurentní jev ξ je přechodný tehdy a jen tehdy, je-li $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < +\infty$. V tom případě je $f = (u-1)/u$, kde $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Def. 6: Je-li $f = 1$, označme $\mu = E\,T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} nf_n$ a interpretujme ji jako střední dobu návratu rekurentního jevu ξ.

Def. 7: Trvalý rekurentní jev ξ se nazývá nenulový, jestliže $\mu < +\infty$, respektive nulový, jestliže $\mu = +\infty$.

Def. 8: Rekurentní jev ξ se nazývá periodický, jestliže existuje přirozené $\lambda > 1$ tak, že $u_n = 0$ pro všechna n, která nejsou dělitelná λ. Největší číslo λ s touto vlastností se nazývá periodou jevu ξ.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 6: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p. Řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech jsou si rovny. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je:

- Pro $p = 1/2$ trvalý.
- Pro $p \neq 1/2$ přechodný.
- Spočtěte pravděpodobnosti u_n a f_n a jejich aproximace.
- $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$
- $F(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$
- $f_{2n-1} = 0,\ f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n q^n,\ n = 1, 2, \ldots$
- Pro $p = 1/2$ je $u_{2n-1} = 0$ a $u_{2n} \approx 1/\sqrt{\pi n}$.
- Nasimulujte několik realizací této náhodné procházky délky alespoň 10^5 pro různé hodnoty p, a nezapomeňte přitom na volbu $p = 1/2$.
- Nakreslete si odpovídající grafy a rozmyslete.

PŘÍKLADY REKURENTNÍCH JEVŮ (POKR.)

Příklad 7: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů. Všechny čtyři možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že rekurentní jev ξ nastává v čase n, jestliže jsme se po n-krocích vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná trvalý periodický rekurentní jev. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Úkol: Ukažte, že pokud se jedná o symetrickou náhodnou procházku, tj. pohyby v jednotlivých směrech jsou stejně pravděpodobné, potom $u_{2n} = 1/\pi n$. Dále odvoďte podobné charakteristiky jako v příkladu 6, tj. $f_n, U(x), F(x),$ atd.

Příklad 8: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu. Všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že rekurentní jev ξ nastáváv čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí

Limitní věta

Věta 6: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý neperiodický. Potom:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Věta 7: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý periodický s periodou λ. Potom

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Pozn. 4: Důkaz se provádí pomocí tvrzení uvedeném v poznámce 60 a v poznámce 57.

Asymptotické rozdělení četností rekurentních jevů (rovnice obnovy)

Věta 8: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý. Označme N_n počet výskytů ξ do času n a $T^{(r)}$ dobu čekání na r-tý výskyt ξ. Potom jevy $[\,N_n \geq r\,]$ a $[\,T^{(r)} \leq n\,]$, $1 \leq r \leq n < \infty$, jsou ekvivalentní. Předpokládejme dále, že rozdělení dob prvních návratů má konečnou střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Potom $N_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3}\right)$ a $T^{(r)} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}\left(r\mu, r\sigma^2\right)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n - n/\mu}{\sqrt{n\sigma^2/\mu^3}} \leq x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1$$

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}} \leq x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1$$

kde

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

Asymptotické rozdělení četností rekurentních jevů

Věta 9: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nenulový. Potom pro $n \to \infty$ platí $E\,N_n \approx n/\mu$, kde μ je střední doba návratu a N_n značí počet výskytů ξ do času n.

Pozn. 5: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nulový. Potom $E\,N_n$ není obecně řádu n^1. Ukažte, že pro model náhodné procházky po přímce popsaný v příkladu 6 platí $E\,N_{2n} \approx 2\sqrt{n/\pi}$.

Alternativní přístup k zavedení rekurentních jevů

Nechť T_i, $1 \le i \le r$, jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny mající totéž rozdělení $\{f_n\}$, kde T_i interpretujeme jako dobu, která uplyne mezi $(i-1)$-ním a i-tým výskytem ξ (tzv. doba návratu). Pak

$$T^{(r)} = T_1 + \ldots + T_r$$

interpretujeme jako dobu čekání na r-tý výskyt ξ.

Def. 9: Nechť T_i, $1 \le i \le r$, jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny mající totéž rozdělení $\{f_n\}$. Potom výrok:

- rekurentní jev ξ nastal v čase n ztotožníme s výrokem existuje r tak, že
$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n$$
- rekurentní jev ξ nastal v čase n po r-té ztotožníme s výrokem
$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n$$

Rekurentní jevy se zpožděním

Rekurentní jevy se zpožděním lze zavést způsobem naznačeným v df 9.

Def. 10: Uvažujme nezávislé celočíselné náhodné veličiny $T_1, T_2, \ldots$, kde T_1 má rozdělení $\{b_n\}$, zatímco $T_2, T_3, \ldots$ mají rozdělení $\{f_n\}$. Řekneme, že rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n po r-té, jestliže

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n; \tag{2}$$

resp. rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n, jestliže existuje r tak, že platí (2).

Pozn. 6: V df 10 interpretujeme T_1 jako dobu čekání na první výskyt ξ, zatímco $T_2, T_3, \ldots$ jako doby návratu.

Příklad 9: Uvažujme Rubikovu kostku, viz př. 9, s libovolným nastavením krychliček na počátku. Úkolem budiž rotacemi přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá stěna byla obarvena jen jednou barvou (počáteční stav). Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže je kostka v počátečním stavu. Zpožděním T_1 je rozdělení (náhodné) trajektorie potřebné k prvnímu dosažení počátečního stavu.

Rekurentní jevy se zpožděním

Věta 10: Nechť u_n značí pravděpodobnost jevu, že rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n. Nechť $u_0 = f_0 = b_0 = 0$. Potom

$$u_n = b_n + f_0 u_n + \ldots + f_n u_0, \quad \text{tj.} \quad \{u_n\} = \{b_n\} + \{f_n\} \star \{u_n\}$$

Pozn. 7: Uvědomme si, že následující jevy jsou ekvivalentní

$$\Big[\xi \text{ nastal v čase } n\Big] \equiv$$
$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \Big[\xi \text{ nastal v čase } n \text{ a předtím naposledy v čase } k\Big]$$
$$\cup \Big[\xi \text{ nastal v čase } n \text{ poprvé}\Big]$$

Rovnice obnovy

Pozn. 8: Limitní věty předchozích odstavců lze považovat za speciální případy obecné věty, kterou lze formulovat analyticky bez použití pravděpodobnostních pojmů. Poznamenejme, že tato věta má také pravděpodobnostní význam.

Def. 11: Nechť $a_0, a_1, a_2, \dots$ a $b_0, b_1, b_2, \dots$ jsou dvě posloupnosti takové, že $a_0 = 0, 0 \le a_n \le 1, b_n \ge 0,\ n = 0, 1, 2, \dots,\ \sum_{i=n}^{\infty} b_n < \infty$. Položme $u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} \dots + a_n u_0,\ n = 0, 1, 2, \dots$, tj.

$$\{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} \star \{u_n\} \tag{3}$$

Vztah (3) nazveme *rovnicí obnovy*.

Pozn. 9: Pro vytvořující funkce posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{u_n\}$ uvažované v df 11 platí

$$U(x) = B(x) + A(x)U(x) \quad \equiv \quad U(x) = \frac{B(x)}{1 - A(x)}$$

Rovnice obnovy (pokr.)

Def. 12: Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme periodickou, existuje-li $\lambda > 1$ tak, že $a_n = 0$ pro všechna n nedělitelná λ. Největší takové λ nazveme periodou.

Věta 11: Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neperiodická. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. když lze $\{a_n\}$ považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého neperiodického rekurentního jevu ξ, potom

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} na_n, & \sum_{n=1}^{\infty} na_n < \infty, \\ 0, & \sum_{n=1}^{\infty} na_n = \infty. \end{cases}$$

3. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$, potom pro $n \to \infty$ je

$$u_n \approx \left. \frac{B(x)}{x^{n+1} A'(x)} \right|_{x=1}$$

kde $x < 1$ je jediný kořen rovnice $A(x) = 1$.

ROVNICE OBNOVY (POKR.)

Věta 12: Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je periodická s periodou λ. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\mu = \infty$, potom $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. Je-li $\mu < \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. když lze $\{a_n\}$ považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého periodického rekurentního jevu ξ, potom pro $0 \leq j < \lambda$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda+j} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\lambda+j}}{\mu} \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

Markovovy řetězce

Def. 13: Náhodný proces $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ nabývající hodnoty z některé konečné nebo spočetné množiny hodnot nazveme **homogenní diskrétní Markovův řetězec** s maticí přechodů $\mathbf{P} \equiv \{p_{ij}\}$, jestliže $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big)$$
$$= P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big) \equiv p_{ij}$$

Pokud

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big)$$
$$= P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big) \equiv p_{ij}^{(n)},$$

hovoříme o **nehomogenním diskrétním Markovově řetězeci**.

Pozn. 11:

- Hodnoty p_{ij} reprezentují pravděpodobnost jevu, že je-li proces ve stavu i, tak dalším stavem bude j.
- Zřejmě $p_{ij} \geq 0$ a $\sum_j p_{ij} = 1 \ \forall i$.

Markovovy řetězce

Def. 14: Posloupnost pokusů, z nichž každý má tu samou konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $E_1, E_2, \ldots,$ nazveme Markovovým řetězcem (MŘ), jestliže pravděpodobnosti každé konečné posloupnosti výsledků (pokusů nultého až n-tého) je dána vztahem

$$P\Big(E_{j_0}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\Big) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \ldots p_{j_{n-1} j_n}, \tag{4}$$

kde $a_k,\ k = 1, 2, \ldots$ jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a $p_{jk},\ 1 \leq j, k < +\infty$, je (pro všechny pokusy táž) podmíněná pravděpodobnost výsledku E_k za podmínky výsledku E_j v pokuse předchozím.

Pozn. 12: Posloupnost $\{a_k\}$ nazýváme počátečním rozdělením pravděpodobností, podmíněné pravděpodobnosti p_{jk} nazýváme pravděpodobnostmi přechodu. Zatímco tedy k popisu nezávislých jevů stačí znát pravděpodobnosti p_i, k popisu MŘ potřebujeme znát $\boldsymbol{a} \equiv \{a_k\}$ a $\mathbf{P} \equiv \Big\{p_{jk}\Big\}$. Všimněme si, že $\sum_j p_{ij} = 1\ \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Obecnější definice Markovova řetězce

Mějme MŘ se stavy $S_1, S_2, \ldots$ s počátečním rozdělením $\{a_j\}$ a maticí přechodů $\mathbf{P} \equiv \{p_{ij}\}$. Zaveďme celočíselné náhodné veličiny (cnv) $X_n,\ 0 \le n < \infty$ předpisem

$$X_n \text{ nabývá hodnoty } j \Leftrightarrow \text{je řetězec v čase } n \text{ ve stavu } S_j$$

Potom $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_0 = j\big) = a_j$$

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big) = p_{ij}$$

Pozn. 13: Markovovský řetězec se často ztotožňuje s takto zkonstruovanou posloupností náhodných veličin. Požadujeme-li splnění „pouze druhé rovnosti", tj. pro p_{ij}, dostaneme:

Def. 15: Posloupnost cnv $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, nazveme Markovským řetězcem, jestliže $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big)$$
$$= P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big)$$

Příklady Markovových řetězců

1. Náhodná procházky po přímce.
2. Náhodná procházky po přímce s odrážejícími stěnami.
3. Náhodná procházka po přímce s pohlcujícími stěnami.
4. Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť n rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna molekula s tou samou pstí $1/n$ a přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
5. Modifikovaný Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť n rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna nádoba a jedna molekula z ní se přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
6. Posloupnost nezávislých opakovaných pokusů.
7. Úlohu o zruinování hráče.
8. Rubikova kostka.

Psti přechodu vyšších řádů

Věta 13: Pravděpodobnosti přechodu ze stavu S_j do stavu S_k po n-krocích, jež označíme $p_{jk}^{(n)}$, dostaneme jako prvky matice $\mathbf{P}^n$. Je zvykem dodefinovat $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$.

Pozn. 14: Matici $\mathbf{P}^n$ můžeme spočítat řadou způsobů:

- Postupným umocňováním matice přechodů $\mathbf{P}$.
- Přímo z definice (principu).
- Pomocí Perronova vzorce při znalosti vlastních čísel $\mathbf{P}$ů atd.

Def. 16: Vedle podmíněných pravděpodobností $p_{jk}^{(n)}$ zaveďme nepodmíněné (absolutní) pravděpodobnosti $a_k^{(n)}$ jako pravděpodobnosti jevu, že systém je v čase n ve stavu S_k.

Pozn. 15: Zřejmě platí, že:

$$a_k^{(0)} = a_k, \quad a_k^{(n)} = \sum_j a_j p_{jk}^{(n)} \quad \text{a} \quad a_k^{(m+n)} = \sum_j a_j^{(m)} p_{jk}^{(n)}$$

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}$ nezávislá na j, pak existuje také $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ a jsou si rovny.

ZNAČENÍ

- $f_{jj}^{(n)}$ ... pravděpodobnost prvního návratu do stavu S_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu S_j
- $f_{ij}^{(n)}$ ... pravděpodobnost prvního průchodu stavem S_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu S_i
- $p_{jj}^{(n)}$ ... pravděpodobnost jevu, že systém je v čase n ve stavu S_j,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu S_j
- $p_{ij}^{(n)}$ ... pravděpodobnost průchodu stavem S_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu S_i

Věta 14: Položme $f_{jj}^{(0)} = 0,\ f_{ij}^{(0)} = 0,\ p_{jj}^{(0)} = 1,\ p_{ij}^{(0)} = 0,\ p_{jj}^{(1)} = p_{jj}$.
Potom platí

$$p_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(0)} p_{jj}^{(n)} + f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \ldots + f_{jj}^{(n-1)} p_{jj} + f_{jj}^{(n)} p_{jj}^{(0)}, \qquad 1 \le n < \infty,$$

$$\left\{p_{jj}^{(n)}\right\} = \left\{f_{ij}^{(n)}\right\} + \left\{f_{jj}^{(n)}\right\} \star \left\{p_{ij}^{(n)}\right\}$$

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav S_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_j, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_i, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev se zpožděním.

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav S_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_j, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_i, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev se zpožděním.

Teorie Markovových řetězců je v podstatě teorií rekurentních jevů. Nové je to, že jich studujeme více současně !!!

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav S_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_j, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu S_i, pak každý průchod systému stavem S_j je rekurentní jev se zpožděním.

Teorie Markovových řetězců je v podstatě teorií rekurentních jevů. Nové je to, že jich studujeme více současně !!!

Pojmy o klasifikaci rekurentních jevů se beze změny přenášejí i na stavy Markovova řetězce.

Věta 16: V Markovově řetězci zvolme pevně stav S_j.

- Stav S_j je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. V takovém případě také $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ pro všechna i.
- Stav S_j je trvalý nulový $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$. V takovém případě také $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna i.

KLASIFIKACE STAVŮ MŘ (POKR.)

Věta 17: V Markovově řetězci zvolme pevně stav S_j.

- Je-li stav S_j trvalý nenulový neperiodický, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j},\ i \neq j, \quad \text{kde} \quad f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$$

- Je-li stav S_j trvalý nenulový periodický s periodou λ, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j}$$

a pro všechna $i \neq j$ a $0 \leq \nu \leq \lambda - 1$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n\lambda+\nu)} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k\lambda+\nu)}}{\mu_j}$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \quad \text{kde} \quad \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}$$

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce

Def. 17: Řekneme, že stav S_k je dosažitelný ze stavu S_j, jestliže existuje $n \geq 0$ takové, že $p_{jk}^{(n)} > 0$.

Pozn. 16: Ve smyslu df 17 je každý stav dosažitelný sám ze sebe, neboť $p_{jj}^0 = 1$.

Def. 18: Neprázdná množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu v C. Nejmenší uzavřená množina obsahující danou množinu stavů se nazývá jejím uzávěrem.

Věta 18: Množina stavů C je uzavřená $\Leftrightarrow$ $p_{jk} = 0$ pro všechna $S_j \in C$ a $S_k \notin C$.

Def. 19: Je-li jednobodová množina $\{S_j\}$ uzavřená, tj. je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav S_j nazývá absorbční stav.

Pozn. 17: Vynecháme-li v matici přechodů $\boldsymbol{P}$ Markovova řetězce řádky a sloupce odpovídající stavům vně uzavřené množiny C, dostaneme opět stochastickou matici. Množina C tedy také představuje Markovovův řetězec, kterému se říká podřetězec původního Markovova řetězce.

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce (pokr.)

Def. 20: MŘ se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm kromě množiny všech stavů neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů. V opačném případě se nazývá rozložitelný.

Věta 19: Řetězec je nerozložitelný $\Leftrightarrow$ každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Věta 20: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný $\Leftrightarrow$ odpovídající matice $\boldsymbol{P}$ je po případném přečíslování stavů tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

kde v diagonálních blocích stojí čtvercové matice.

Pozn. 18: Řekneme-li, že stavy S_j a S_k jsou téhož typu, budeme tím rozumět, že jsou buď oba přechodné, nebo jsou oba trvalé nulové, nebo jsou oba trvalé nenulové a současně jsou buď oba neperiodické nebo oba periodické s toutéž periodou.

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce (pokr.)

Věta 21: Je-li stav S_k dosažitelný ze stavu S_j a naopak, stav S_j je dosažitelný ze stavu S_k, pak jsou oba stavy téhož typu.

Věta 22: V nerozložitelném MŘ jsou všechny stavy téhož typu.

Věta 23: V MŘ s konečně mnoha stavy neexistují stavy nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

Stacionární rozdělení

Def. 21: Mějme nerozložitelný MŘ s maticí pravděpodobností přechodů $\boldsymbol{P}$. Rozdělení $\{v_j\}$ se nazývá stacionární rozdělení tohoto řetězce, jestliže

$$v_j = \sum_i v_i p_{ij} \quad \forall j$$

Tento vztah lze maticově zapsat jako $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{P}'$ značí matici transponovanou k $\boldsymbol{P}$.

Věta 24: V nerozložitelném MŘ existuje stacionární rozdělení $\Leftrightarrow$ všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto stacionární rozdělení $\boldsymbol{v}$ je jediné a pro všechna i, j platí:

$$v_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \text{v neperiodickém případě}$$

$$v_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0 \qquad \text{v periodickém případě}$$

STACIONÁRNÍ ROZDĚLENÍ (POKR.)

Pozn. 19: V nerozložitelném MŘ s konečně mnoha stavy jsou dle věty 22 a 23 všechny stavy trvalé nenulové, takže stacionární rozdělení existuje.

Def. 22: Matice s nezápornými prvky taková, že všechny řádkové i sloupcové součty jsou rovny jedné, se nazývá dvojně stochastická.

Věta 25: Mějme nerozložitelný řetězec s dvojně stochastickou maticí. Je-li počet stavů konečný, řekněme n, potom stacionární rozdělení je rovnoměrné, tj. $v_i = 1/n$ pro $1 \leq i \leq n$. Je-li počet stavů nekonečný, potom stacionární rozdělení neexistuje.

Příklad 10:

- Nalezněte stacionární rozdělení pro náhodnou procházku s dvěma odrážejícími stěnami.
- Zjistěte, pro které hodnoty p existuje stacionární rozdělení v případě náhodné procházky s odrážející stěnou v nule a neohraničenou zprava.
- Nalezněte stacionární rozdělení pro Ehrenfestům myšlený pokus.

Reverzibilní Markovovy řetězce

Def. 23: Uvažujme nerozložitelný MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a})$. Jestliže existují kladná čísla π_i tak, že $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i, j$, řekneme, že MŘ je reverzibilní.

Pozn. 20: Uvažujme nerozložitelný reverzibilní MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a})$ pro který $\sum_i \pi_i = 1$. Potom platí:

$$P(X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k) = P(X_0 = k, X_1 = j, X_2 = i) \qquad \forall\ i, j, k$$

Věta 26: Jestliže MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ je reverzibilní, potom odpovídající vektor $\boldsymbol{\pi}$ je jeho stacionárním rozdělením pokud $\sum_i \pi_i = 1$.

Pozn. 21: Předchozí tvrzení neplatí naopak, tj. existence stacionárního rozdělení neimplikuje, že se nutně jedná o reverzibilní MŘ.

Příklad 11: Rozhodněte, zda pro řetězec popsaný schématem

$$S_1 \xrightarrow{1} S_2 \xrightarrow{1} S_3 \xrightarrow{1} S_1$$

existuje stacionární rozdělení a zda je tento MŘ reverzibilní.

Rozložitelné řetězce

Pozn. 22: Připomeňme, že dle df 18 se neprázdná množina stavů C nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C. Nejmenší uzavřená množina obsahující danou množinu stavů se nazývá jejím uzávěrem.

Věta 27: Uvažujme rozložitelný MŘ s konečně mnoha stavy. Potom pravděpodobnost jevu, že řetězec skončí v některé uzavřené podmnožině stavů konverguje pro $n \to \infty$ k 1 bez ohledu na to, kde řetězec začal.

Pozn. 23: Uvažujme rozložitelný MŘ s konečně mnoha stavy a maticí přechodů $\boldsymbol{P}$. Konstruujme postupně matice $\boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{P}^3, \ldots$, kde

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}^2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{RS} + \boldsymbol{QR} & \boldsymbol{Q}^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}^3 & \boldsymbol{0} \\ \ldots & \boldsymbol{Q}^3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}^3} \quad \cdots$$

Potom $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{0}$ a $p_{ij}^{(n)} \to 0$ exponencielně rychle pro každé dva stavy S_i a S_j, jež jsou přechodné.

Rozložitelné řetězce

Pozn. 24: Pro každý rozložitelný MŘ daný maticí $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$ má $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ inverzi a platí

$$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right)^{-1}$$

Matice $\boldsymbol{N} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right)^{-1}$ se nazývá fundamentální matice.

Věta 28: Uvažujme rozložitelný MŘ s konečně mnoha stavy a označme $\mathcal{T}$ podmnožinu stavů přechodných. Nechť u_{ij} je střední dobu strávená v $S_j \in \mathcal{T}$, když začneme v $S_i \in \mathcal{T}$. Potom

$$u_{ij} = I_{[i=j]} + \sum_{k\in\mathcal{T}} p_{ik} u_{kj} + \sum_{k\notin\mathcal{T}} p_{ik} u_{kj} \quad \equiv \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}$$

odkud

$$\boldsymbol{U} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right)^{-1} = \boldsymbol{N}$$

Pozn. 25: Podobně umíme spočítat i rozptyl délky setrvání v $S_j \in \mathcal{T}$, pro nějž lze ukázat platnost vztahu $\boldsymbol{N}\Big(2diag(\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{I}\Big) - \boldsymbol{N}^{\cdot 2}$

PŘECHODNÉ STAVY

Uvažujme MŘ obsahující stavy přechodné i trvalé. Nechť T je množina všech přechodných stavů a C je nějaká nerozložitelná uzavřená množina trvalých stavů. Zafixujme některý stav $S_j \in T$ a označme:

- $x_j = P\big(S_j \to C\big)$ pravděpodobnost absorbce v C
- $1 - x_j$ pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu S_j, navždy setrvá v T, nebo dojde k absorbci v jiné uzavřené množině stavů
- $x_j^{(1)} = \sum_{k \in C} p_{jk}$ pravděpodobnost absorbce v C v prvním kroku
- y_j pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu S_j, navždy setrvá v T.

Přechodné stavy (pokr.)

Věta 29: Pravděpodobnosti $x_j,\ j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\xi_j - \sum\nolimits_{\nu \in T} p_{j\nu} \xi_\nu = x_j^{(1)}, \quad j \in T \tag{5}$$

Věta 30: Pravděpodobnosti $y_j,\ j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\eta_j = \sum\nolimits_{\nu \in T} p_{j\nu} \eta_\nu, \quad j \in T \tag{6}$$

Věta 31: Soustava (5) má jediné omezené řešení $\Leftrightarrow$ soustava (6) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 32: Pravděpodobnosti setrvání y_j jsou rovny nule $\forall\, j \in T \Leftrightarrow$ soustava (6) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 33: V řetězci s konečně mnoha stavy jsou všechna $y_j = 0$, takže x_j jsou jediným řešením soustavy (5).

Přechodné stavy (pokr.)

Věta 34: V řetězci se stavy $S_0, S_1, S_2, \dots$ jsou všechny stavy přechodné $\Leftrightarrow$ soustava

$$\eta_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}\eta_\nu, \quad 1 \le j < \infty, \tag{7}$$

má netriviální omezené řešení.

Obecnější definice Markovova řetězce

Mějme MŘ se stavy $S_1, S_2, \dots$ s počátečním rozdělením $\{a_j\}$ a maticí přechodů $\mathbf{P} \equiv \{p_{ij}\}$. Zaveďme celočíselné náhodné veličiny (cnv) $X_n,\ 0 \le n < \infty$ předpisem

$$X_n \text{ nabývá hodnoty } j \Leftrightarrow \text{je řetězec v čase } n \text{ ve stavu } S_j$$

Potom $\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_0 = j\big) = a_j$$

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big) = p_{ij}$$

Pozn. 26: Markovovský řetězec se často ztotožňuje s takto zkonstruovanou posloupností náhodných veličin. Požadujeme-li splnění „pouze druhé rovnosti“, tj. pro p_{ij}, dostaneme:

Def. 24: Posloupnost cnv $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, nazveme Markovským řetězcem, jestliže $\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big)$$
$$= P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big)$$

Obecnější definice Markovova řetězce (pokr.)

Pozn. 27: Markovovy řetězce, kterými jsme se až doposud zabývali, měly navíc vlastnost nezávislosti pstí p_{ij} na n. Takové řetězce budeme nazývat homogeními. Pokud $P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big)$ bude na n záležet, což budeme značit $p_{ij}(n, n+1)$, budeme hovořit o řetězcích nehomogeních.
Pozn. 28: Pravděpodobnosti

$$P\big(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n\big) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \ldots p_{j_{n-1} j_n},$$

se změní na

$$P\big(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n\big)\big) = a_{j_0}(0,1) p_{j_0 j_1}(1,2) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(n-1, n)$$

Příklad 12: Nechť $Y_k,\ 1 \leq k < \infty$ jsou nezávislé cnv. Nechť $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Potom posloupnost $\big\{X_n\big\},\ 1 \leq n < \infty$ tvoří Markovův řetězec. Ověřte.

Příklad 13: Nechť $Y_k,\ 1 \leq k < \infty$, jsou nezávislé cnv. Uvažujme posloupnost klouzavých součtů $X_n^\star = \sum_{k=1}^{r} Y_{n+k},\ r$ pevné. Ověřte, že posloupnost $\big\{X_n^\star,\ 1 \leq n < \infty\big\}$ obecně netvoří Markovův řetězec.

Isingův model — úvodní pojmy

- G ... graf
- V ... vrcholy (vertexes) grafu
- $|V| = card(V)$
- E ... hrany (edges)
- $[i \leftrightarrow j]$ ... indikátor hrany mezi stavy i a j
- Nejjednodušší situace : každý vrchol i má stavy $\sigma_i \in \{-1, +1\}$
- Obecně mohou být stavy $\sigma_i \in \{1, \ldots, K\}$ a popisovat úrvně šedi, podobně pro barvy vyjádřené ať již v prostoru RGB nebo CMYK, apod.
- $\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|V|}\right)$ popisuje stav systému
- Prostorem stavů $\mathcal{S}$ rozumíme $\{-1, +1\}^{|V|}$, resp. $\{1, \ldots, K\}^{|V|}$, atd.

Isingův model

Def. 25: Klasický **Isingův model** je pravděpodobnostní rozdělení $\pi(\sigma;\beta)$ na prostoru stavů $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^{|V|}$, kde

$$\pi\big(\sigma;\beta\big) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{C_\beta}, \qquad \beta \geq 0,\ \sigma \in \mathcal{S},$$

$$H(\sigma) = \sum\nolimits_{[i\leftrightarrow j]\in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big] \quad \text{a} \quad C_\beta = \sum\nolimits_{\sigma^\star\in\mathcal{S}} e^{-\beta H(\sigma^\star)}$$

Pozn. 29: Funkce $H(\sigma)$ se ve fyzice nazývá Hamiltonián a reprezentuje „energii“ konfigurace stavů σ.

Pozn. 30: Pro $\beta > \mathbf{0}$ jsou v daném modelu nejpravděpodobnější ty konfigurace stavů σ, pro něž je $H(\sigma)$ malá, tj. mnoho sousedů má tutéž hodnotu stavu (týž spin), tj. mají malou energii (informaci).

Def. 26: Středním spinem konfigurace σ rozumíme

$$M(\sigma) = \frac{1}{|V|}\sum\nolimits_{i\in V} \sigma_i$$

Modifikace Isingova modelu

Klasický Isingův model

$$\mathcal{S} = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\sigma) = \sum\nolimits_{[i \leftrightarrow j] \in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big]$$

$$\underset{S}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{H(S)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{S}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{H(S)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Isingův model s vnějším polem

$$\mathcal{S} = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\sigma, h) = \sum\nolimits_{[i \leftrightarrow j] \in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big] - h \sum_{i \in V} \sigma_i$$

Pro všechna $\beta > 0$ a $h > 0$ jsou hodnoty $+1$ preferovány před hodnotami -1.

Modifikace Isingova modelu (pokr.)

- **Potův model** dovolující více než dvě hodnoty pro každý spin

$$\mathcal{S} = \{1, \ldots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{[i \leftrightarrow j] \in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big]$$

- **Isingův model** pro „náhodné záplatování“ šedotónových obrázků

$$\mathcal{S} = \{1, \ldots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{[i \leftrightarrow j] \in E} f\big(\sigma_i, \sigma_j\big)$$

kde $f(.)$ je některá vhodná vzdálenost, např.

$$f(\sigma_i, \sigma_j) = \big|\sigma_i - \sigma_j\big|^p, \quad p \geq 1$$

Vrcholy typicky reprezentují pixely a na rozdíl od Potova modelu zde chceme, aby sousedi byli „podobně šedí“, nikoliv identičtí.

Aplikace v analýze obrazu

Zadání

- Uvažujme černobílý obrázek reprezentovaný maticí pixelů rozměrů $L_1 \times L_2$
- Vrcholy jsou jednotlivé pixely
- Hrany spojují sousední pixely
- Stavy $\{1, \ldots, K\}$ reprezentují různé úrovně šedi
- Prostor stavů $\mathcal{S} = \{1, \ldots, K\}^V$
- Obrázek je reprezentován konfigurací $\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|V|}\right) \in \mathcal{S}$
- Pozorujeme zašuměný obraz $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{|V|} \sim N\left(0, \delta^2\right)$

Problém: Nalézt skutečný obrázek $\boldsymbol{\sigma}$, pozorujeme-li $\boldsymbol{Y}$ a předpokládáme, že $\boldsymbol{\sigma}$ má za apriorní rozdělení Isingův model s rozdělením $e^{-\beta H(\sigma)} / C_\beta$.

Nástroj: Bayesovská statistika a Markov Chain Monte Carlo postupy (Markovovy řetězce a náhodná procházka po grafu).

Aplikace v analýze obrazu (pokr.)

Sdružené rozdělení vektoru $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y})$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y}) \sim \frac{e^{-\beta H(\boldsymbol{\sigma})} \cdot \prod_{i\in V} \exp\left\{-\left(Y_i - \sigma_i\right)^2 / 2\delta^2\right\}}{\text{konstanta jež záleží na } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y})}$$

Aposteriorní rozdělení

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y}) \sim \frac{\exp\left[-\beta H(\boldsymbol{\sigma}) + \left(2\delta^2\right)^{-1} \sum_{i\in V}\left(2Y_i\sigma_i - \sigma_i^2\right)\right]}{\text{funkce jež záleží na } (\boldsymbol{\sigma}, \beta, \boldsymbol{Y})}$$

Možná řešení

- Naivní řešení: Generovat z aposteriorního rozdělení $(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y})$. Rozsáhlý výběr pak reprezentuje konfigurace, které lze považovat za možné (věrohodné) reprezentace obrazu.
- Alternativou poskytující zpravidla mnohem lepší řešení je nalézt nejpravděpodobnější obraz, tj. nalézt konfiguraci $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ maximalizující $P(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y})$.

Metropolisův algoritmus

Cíl Generovat reverzibilní MŘ s předepsaným stacionárním rozdělením $\boldsymbol{\pi}$, $\pi_i > 0\ \forall i$, odpovídajícím nějakému MŘ $\mathcal{S}$ se spočetně mnoha stavy

- $\boldsymbol{Q}$ budiž symetrická matice psti přechodů na $\mathcal{S}$
- $\boldsymbol{a}$ budiž nějaký pravděpodobnostní vektor ($a_i \geq 0, \sum_i\ a_i = 1$) na $\mathcal{S}$

Alg. 1: Metropolisův algoritmus

- Stav S_{init} je vybrán náhodně za pomocí $\boldsymbol{a}$ $\left[Y_0 = S_{init}\right]$
- V každém z následujících kroků, řekněme kroku i, označme stav ve kterém se nacházíme jako S_{cur}
  1. Zvolme nový stav S_{can} s pomocí $\boldsymbol{Q}$, a nazvěme jej kandidátem
  2. Stav S_{can} přijměme s pravděpodobností $\alpha = min\left(1, \pi_{can}/\pi_{cur}\right)$ $\left[Y_i = S_{can}\right]$; jinak setrvejme v S_{cur} $\left[Y_i = S_{cur}\right]$

Pozn. 31: Takto zkonstruovaný MŘ, tzv. Metropolisův MŘ pro $\boldsymbol{\pi}$ s návrhovou maticí $\boldsymbol{Q}$, má pravděpodobnosti přechodu tvaru

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij} \min\left(1, \pi_j/\pi_i\right) & j \neq i \\ 1 - \sum_{k\neq i} q_{ik} \min\left(1, \pi_k/\pi_i\right) & j = i \end{cases}$$

Metropolisův – Hastingsův algorithm

Věta 35: Předpokládejme, že $\boldsymbol{Q}$ je nerozložitelný MŘ na $\mathcal{S}$, a $\boldsymbol{\pi}$, $\pi_i > 0\ \forall i$, je pravděpodobnostní rozděleni na $\mathcal{S}$. Potom Metropolisův MŘ generovaný Metropolisovým algoritem je nerozložitelný a reverzibilní vzhledem k $\boldsymbol{\pi}$.

Metropolisův – Hastingsův algorithm

Věta 35: Předpokládejme, že $\boldsymbol{Q}$ je nerozložitelný MŘ na $\mathcal{S}$, a $\boldsymbol{\pi}$, $\pi_i > 0\ \forall i$, je pravděpodobnostní rozděleni na $\mathcal{S}$. Potom Metropolisův MŘ generovaný Metropolisovým algoritem je nerozložitelný a reverzibilní vzhledem k $\boldsymbol{\pi}$.

- Pokud matice $\boldsymbol{Q}$ není symetrická, potom můžeme, mimo jiných, použít tzv. Metropolisův – Hastingsův algoritmus

Alg. 3: Metropolisův – Hastingsův algoritmus Nechť $\pi, \pi_i > 0\ \forall i$, je „cílové" rozdělení na diskrétním stavovém prostoru $\mathcal{S}$. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je některá matice pravděpodobností přechodů na $\mathcal{S}$. Definujme $\forall\ i, j, i \neq j$,

$$t_{ij} = \pi_j q_{ji} / \pi_i q_{ij}$$

Budiž $A : [0, \infty] \to [0, 1]$ libovolná funkce taková, že platí $A(z) = zA(1/z)\ \forall z \in [0, \infty]$. Dále definujme

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij} A\big(t_{ij}\big) & j \neq i \\ 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij} A\big(t_{ij}\big) & j = i \end{cases}$$

Metropolisův – Hastingsův algoritmus pokr.

Ukažte, že platí:

- Předpokládejme, že $q_{ij} > 0 \ \forall i, j$. Potom $\boldsymbol{P}$ je matice pstí přechodů MŘ, který je reverzibilní vzhledem k π.
  Generuje-li $\boldsymbol{Q}$ nerozložitelný MŘ, potom také $\boldsymbol{P}$ generuje nerozložitelný MŘ.
- Předpokládejme, že $q_{ij} = 0$ pro nějaká (i, j). Potom $\boldsymbol{P}$ je také dobře definována a generuje reverzibilní MŘ vzhledem k π. Nicméně, $\boldsymbol{P}$ v tomto případě nemusí generovat nerozložitelný MŘ ani v případě, kdy jej generuje $\boldsymbol{Q}$.
- $min\{1, z\}$ může bý použito jako funkce $A(z)$, a že její použití vede na klasický Metropolisův algoritmus pokud $\boldsymbol{Q}$ je symetrická.
- Jaké funkce tvaru $A(z) = z^a / \left(1 + z^b\right)$ mohou být použity?

Exponenciální rozdělení – opakování

Def. 27: Řekneme, že náhodná veličina X se řídí exponenciálním rozdělením, což značíme $X \sim Exp(\lambda)$, má-li hustotu tvaru:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \lambda > 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Věta 36: Nechť $X \sim Exp(\lambda)$. Potom $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E\,X = \lambda^{-1}$ a $var\,X = \lambda^{-2}$. Parametr λ má význam intenzity.

Věta 37: Vlastnost zapomínání. Nechť $X \sim Exp(\lambda)$ a interpretujme ji jako dobu života nějakého procesu. Potom pravděpodobnost jevu, že proces přežije dobu $y(> 0)$ za podmínky, že doposud přežil dobu $x(> 0)$ na době dosavadního života nezáleží.

- Pro exponenciální rozdělení platí, že je jediné spojité rozdělení pro něž

$$P(X > x + y \,|\, X > x) = P(X > y).$$

- Mezi diskrétními rozděleními má tuto vlastnost pouze $X \sim Ge(p)$.

Funkce intenzity

Def. 28: Nechť náhodná veličina X má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom funkcí intenzity nazveme

$$\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_1.$$

Pozn. 32: Nechť náhodná veličina X, kterou interpretujme jako dobu života nějakého procesu, má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom pro pravděpodobnost okamžitého selhání platí:

$$P\big(x < X \leq x + \Delta \,|\, X > x\big) = \frac{P(x < X \leq x + \Delta)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \frac{\Delta}{\Delta} \overset{\Delta \to 0}{\approx} \Delta \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Pozn. 33: Nechť $X \sim Exp(\lambda)$, potom $\Lambda(x) = \lambda$. Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení mající konstantní intenzitu.

SIMULACE USPOŘÁDANÝCH VÝBĚRŮ Z $R(0,1)$

- Nechť $U_1, \ldots, U_n$ je náhodný výběr z $R(0,1)$ a $U_{(1)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$ jsou odpovídající pořádkové statistiky
- Položme $S_{(i)} = U_{(i)} - U_{(i-1)},\ i = 1, \ldots, n+1$, kde $U_{(0)} = 0, U_{(n+1)} = 1$

Věta 38: $\left(S_1, \ldots, S_n\right)$ je rovnoměrně rozdělena na simplexu

$$A_n = \left\{\left(x_1, \ldots, x_n\right) \middle| \, x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\right\}$$

Věta 39: $S_1, \ldots, S_{n+1}$ je rozdělena jako $\frac{E_1}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i}, \ldots, \frac{E_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i}$

kde $E_1, \ldots, E_{n+1}$ je náhodný výběr z $Exp(1)$

- Je-li navíc G_{n+1} nezávislá na $\left(S_1, \ldots, S_{n+1}\right)$ a má rozdělení $Ga(n,1)$, potom $S_1 G_{n+1}, \ldots, S_{n+1} G_{n+1}$ je rozdělena jako $E_1, \ldots, E_{n+1}$

Simulace uspořádaných výběrů z $Exp(1)$

- Nechť $E_1, \ldots, E_n$ je náhodný výběr z $Exp(1)$ a $E_{(1)} \leq \cdots \leq E_{(n)}$ jsou odpovídající pořádkové statistiky
- Položme $W_{(i)} = E_{(i)} - E_{(i-1)},\ i = 1, \ldots, n$, kde $E_{(0)} = 0$

Věta 40:

- $W_1, \ldots, W_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z exponenciálního rozdělení $Exp(1)$
- $\frac{E_1}{n}, \frac{E_1}{n} + \frac{E_2}{n-1}, \ldots, \frac{E_1}{n} + \frac{E_2}{n-1} \cdots + \frac{E_n}{1}$

jsou rozdělena jako $E_{(1)}, \ldots, E_{(n)}$

Věta 41: Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s gama rozdělením $Ga(\alpha, 1)$ a $Ga(\beta, 1)$. Potom náhodná veličina $Z = X/(X + Y)$ má rozdělení beta $Be(\alpha, \beta)$.

Lineární proces zrodu a zániku

Uvažujme systém, který má konečně nebo spočetně mnoho stavů, a ze stavu S_n může s nezanedbatelnou pravděpodobností přecházet pouze do stavů sousedních, tj.

- $S_n \to S_{n+1}$ ... **zrod**
- $S_n \to S_{n-1}$ ... **zánik**
- Do jiných sousedů může přejít pouze s pravděpodobností „nekonečně malou“.

Pravděpodobnosti přechodů v časovém intervalu $(t, t+h)$ nechť jsou:

- $P\big(S_n \to S_{n+1}\big) = \lambda_n h + o(h)$
- $P\big(S_n \to S_{n-1}\big) = \mu_n h + o(h)$
- $P\big(S_n \to S_{n\pm j},\ j > 1\big) = o(h)$

Lineární proces zrodu a zániku (pokr.)

Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost toho, že systém je v čase t ve stavu S_n. **Cílem je** určit $P_n(t+h)$ a najít $p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$.

- Pravděpodobnosti $P_n(t)$ splňují následující systém diferenciálních rovnic:

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \tag{8}$$
$$P_n'(t) = -\big(\lambda_n + \mu_n\big) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 1$$

- Je-li systém v čase 0 ve stavu S_i, pak jsou splněny následující počáteční podmínky, tj. $P_i(0) = 1$ a $P_n(0) = 0$ pro $n \neq i$.
- Pravděpodobnosti p_n existují, nezávisí na počátečních podmínkách a vyhovují systému lineárních rovnic, který dostaneme z (8) položíme-li $P_n'(t) = 0,\ n \geq 0$, tj. soustavě

$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \tag{9}$$
$$0 = -\big(\lambda_n + \mu_n\big) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1}, \quad n \geq 1$$

LINEÁRNÍ PROCES ZRODU A ZÁNIKU (POKR.)

Model

$$P\Big(S_n \to S_{n+1}\Big) = \lambda_n h + o(h)$$
$$P\Big(S_n \to S_{n-1}\Big) = \mu_n h + o(h)$$
$$P\Big(S_n \to S_{n\pm j},\ j > 1\Big) = o(h)$$

$\mathbf{Q}$	S_0	S_1	S_2	S_3	$\dots$
S_0	$\cdot$	λ_0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
S_1	μ_1	$\cdot$	λ_1	$\cdot$	$\cdot$
S_2	$\cdot$	μ_2	$\cdot$	λ_2	$\cdot$
S_3	$\cdot$	$\cdot$	μ_3	$\cdot$	λ_3

Doplňme diagonální prvky tak, aby řádkové součty **Q** byly rovny nule

$\mathbf{Q}^\star$	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	$\dots$	$\sum$
S_0	$-\lambda_0$	λ_0	0	0	$\dots$	$\dots$	0
S_1	μ_1	$-(\lambda_1 + \mu_1)$	λ_1	0	0	$\dots$	0
S_2	0	μ_2	$-(\lambda_2 + \mu_2)$	λ_2	0	$\dots$	0
S_3	0	0	μ_3	$-(\lambda_3 + \mu_3)$	λ_3	$\dots$	0

Lineární proces zrodu a zániku (pokr.)

- $P_n(t)$ je pravděpodobnost jevu, že systém je v čase t ve stavu S_n
- $P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$
  $P_n'(t) = -\big(\lambda_n + \mu_n\big) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t)$

$\boldsymbol{Q}^{\star\top}$	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_0	$-\lambda_0$	μ_1	0	0	0	$\dots$
S_1	λ_0	$-(\lambda_1 + \mu_1)$	μ_2	0	0	$\dots$
S_2	0	λ_1	$-(\lambda_2 + \mu_2)$	μ_3	0	$\dots$
S_3	0	0	λ_2	$-(\lambda_3 + \mu_3)$	μ_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\sum$	0	0	0	0	0	$\dots$

Systém retrospektivních Kolmogorovových diferenciálních rovnic má (maticově) tvar

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}^{\star\top}\,\boldsymbol{P}(t)$$

kde $\boldsymbol{P}'(t) = \big(P_0'(t), P_1'(t), \dots\big)^\top$ a $\boldsymbol{P}(t) = \big(P_0(t), P_1(t), \dots\big)^\top$

LINEÁRNÍ RŮST A ZÁNIK

Model. Předpokládejme, že systém je složen z prvků, které se mohou dělit i zanikat. Nechť pravděpodobnost toho, že za malý časový interval délky h se jeden prvek rozdělí na dva, je rovna $\lambda h + o(h)$, zatímco pravděpodobnost toho, že zanikne, je rovna $\mu h + o(h)$, přičemž λ a μ jsou kladné konstanty.

Pozn. 34: Je-li chování prvků nezávislé, pak jde lineární proces zrodu a zániku s parametry $\lambda_n = n\lambda$ a $\mu_n = n\mu$.

Věta 42: Soustava (8) má následující řešení:

$$P_0(t) = A(t)$$

$$P_n(t) = \Big(1 - A(t)\Big)\Big(1 - B(t)\Big)\Big(B(t)\Big)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

kde

$$A(t) = \frac{\mu\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \quad a \quad B(t) = \frac{\lambda\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}$$

MODEL ÚSTŘEDNY S NEKONEČNĚ MNOHA LINKAMI

Příklad 14: Mějme ústřednu s nekonečně mnoha telefoními linkami. Řekneme, že se systém nachází ve stavu S_n, je-li obsazeno právě n linek. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že jeden hovor skončí v průběhu intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky hovorů jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ bude obsazena nová linka, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Model telefonní dvojbudky s neomezenou frontou

Příklad 15: Uvažujme stanici obsluhy, která může současně obsluhovat nejvýše dva zákazníky, např. telefonní dvojbudku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné neomezené fronty. Řekneme, že se systém nachází ve stavu S_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pokud $\lambda < 2\mu$, pak pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{kde} \quad p_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

Model parkoviště před MFF bez fronty

Příklad 16: Uvažujme parkoviště automobilů před MFF UK s kapacitou N míst. Stavem systému je počet aut na parkovišti, fronta se netvoří. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že automobil, který v čase t parkuje, odjede v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky stání jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijede nový automobil, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

MODEL TELEFONNÍ BUDKY S OMEZENOU FRONTOU

Příklad 17: Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat nejvýše jednoho zákazníka, např. telefonní budku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné omezené fronty délky N. Řekneme, že se systém nachází ve stavu S_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad \text{kde} \quad p_0 = \mu^{N+1}\frac{\lambda-\mu}{\lambda^{N+2}-\mu^{N+2}}$$

Problém jednoho opraváře a mnoha strojů

Příklad 18: Mějme M strojů obsluhovaných jedním opravářem. Řekneme, že se systém nachází ve stavu S_n, jestliže nepracuje právě n strojů. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že stroj který je v čase t opravován, začne v intervalu $(t, t+h)$ pracovat, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky oprav jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že stroj který v čase t pracoval, se v intervalu $(t, t+h)$ porouchá, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_{M-k} se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem μ/λ, tj. pro $k = 1, \ldots, M$

$$p_{M-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k p_M, \quad \text{kde} \quad p_M = \left[1 + \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\right]^{-1}$$

Model popisující práci několika svářečů

Příklad 19: Mějme N svářečů, kteří nezávisle na sobě ve víceméně náhodných intervalech odebírají proud. Řekneme, že se systém nachází ve stavu S_n, jestliže pracuje právě n svářečů. Předpokládejme dále, že:

- Pravděpodobnost jevu, že svářeč, který v čase t pracuje, přestane pracovat v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky sváření jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že svářeč, který v čase t nepracoval, v intervalu $(t, t+h)$ pracovat začne, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\big(N, \mu/(\mu+\lambda)\big)$

$$p_n = \binom{N}{n} \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{N-n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

MODEL KINETIKY NEVRATNÉ CHEMICKÉ REAKCE

Příklad 20: Mějme látku A (reagent), jejíž molekuly se nevratně přeměňují v molekuly látky B (produkt), přičemž rychlost reakce je dána konstantou $\kappa > 0$. Nechť koncentrace reagentu A v čase t je představována náhodnou veličinou $X(t)$, přičemž $X(0) = n_0$. Z fyzikální podstaty předpokládejme, že:

- Pst jevu, že se změní jedna molekuly během $(t, t+h)$ v případě, kdy se za čas $(0, t\,]$ změnilo právě $n_0 - n$ molekul, je $n\kappa h + o(h)$.
- Pst změny více než jedné molekuly během $(t, t+h)$ je nulová.
- Látky A a B jsou statisticky nezávislé.
- Inverzní reakce $B \to A$ nastává s pravděpodobností nula.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\big(n_0, e^{-\kappa t}\big)$. Stav S_0 je zřejmě absorbční.

Čítací proces

Def. 29: Stochastický proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **čítací proces**, jestliže reprezentuje celkový počet „událostí“ jež se vyskytly do času t.

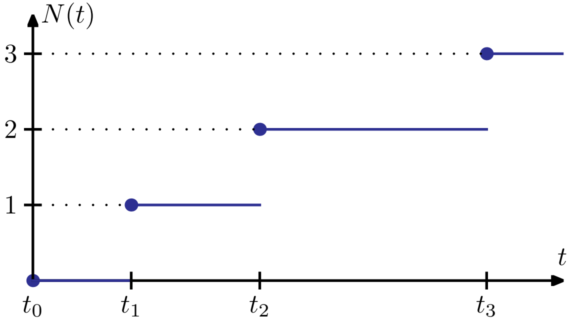
Pozn. 35: Čítací proces musí vždy splňovat:

- $N(t) \geq 0$.
- $N(t)$ nabývá přirozených hodnot.
- Jestliže $s < t$, potom $N(s) \leq N(t)$.
- Pro $s < t$ se $N(t) - N(s)$ rovná počtu událostí, jež se vyskytly v intervalu $(s, t]$.

Def. 30: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **proces s nezávislými přírůstky**, jestliže počty událostí jež se vyskytují v disjunktních intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny.

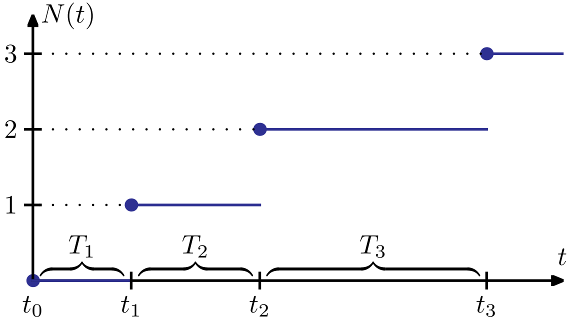
Def. 31: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **proces se stacionárními přírůstky**, jestliže rozdělení počtu událostí, které se vyskytnou v libovolném intervalu, záleží pouze na jeho délce, nikoliv na jeho umístění.

ČÍTACÍ PROCES



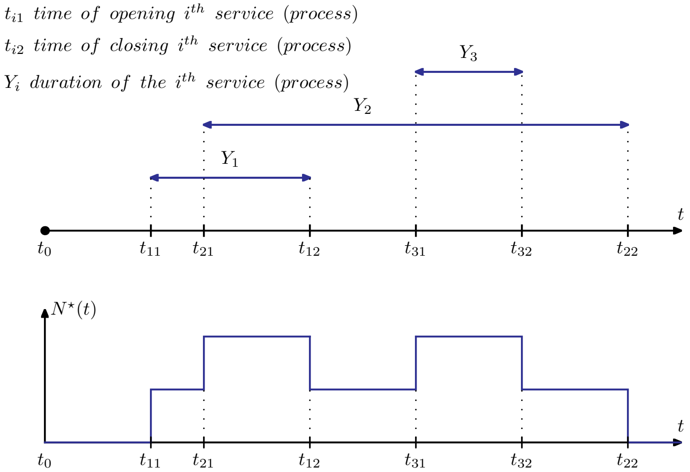
Průběh čítacího procesu $N(t)$

ČÍTACÍ PROCES



Časy mezi příchody požadavků a odpovídající čítací proces $N(t)$

ČÍTACÍ PROCES



Doby obsluhy Y_i a průběh čítacího procesu popisujícího obsazení systému

Homogenní Poissonův proces (HPP)

Def. 32: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou λ**, $\lambda > 0$, jestliže:

i) $N(0) = 0$
ii) Proces má nezávislé přírůstky
iii) Počet událostí v libovolném intervalu délky t má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tj.

$$P\Big(N(t+s) - N(s) = n\Big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Def. 33: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou λ**, $\lambda > 0$, jestliže:

i) $N(0) = 0$
ii) Proces má stacionární a nezávislé přírůstky
iii) $P\Big(N(h) = 1\Big) = \lambda h + o(h)$
iv) $P\Big(N(h) \geq 2\Big) = o(h)$

HPP – VLASTNOSTI

Věta 43: Definice 32 a 33 Poissonova procesu jsou ekvivalentní

Pozn. 36: Podmínky (ii) – (iv) lze nahradit následující množinou ekvivalentních podmínek:

iii) Proces má nezávislé přírůstky

iv) $P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) = \lambda h + o(h)$

v) $P\big(N(t+h) - N(t) \geq 2\big) = o(h)$

Pozn. 37: Poissonův proces má stacionární přírůstky a $EN(t) = \lambda t$

Pozn. 38: Výsledek, že $N(t)$ se řídí Poissonovým rozdělením, je důsledkem aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

HPP – DOBY MEZI UDÁLOSTMI

Def. 34: Uvažujme Poissonův proces s intenzitou λ. Označme $T_n,\ n = 1, 2, \ldots$ dobu mezi n-tou a $(n-1)$-ní událostí, kde $T_0 = 0$. Posloupnost $\{T_n\}$ se nazývá **posloupností dob mezi událostmi**.

Věta 44: Uvažujme Poissonův proces s intenzitou λ. Posloupnost dob mezi událostmi se řídí exponenciálním rozdělením s intenzitou λ.

Věta 45: Uvažujme posloupnost dob mezi událostmi $\{T_n\}$. Nechť $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$. Potom S_n se řídí gamma rozdělením $\Gamma(n, \lambda)$ s hustotou

$$f_{S_n}(t; n; \lambda) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Rada. Vzpomeňte si na proces obnovy (11), odkud

$$N(t) \geq n \quad \Longleftrightarrow \quad S_n \leq t,$$

a zderivujte odpovídající distribuční funkci.

Poissonův proces jako model zrodu a zániku

Uvažujme fyzikální systém, který podléhá okamžitým změnám způsobeným nahodilými vlivy, např. telefonní hovory, rozpad atomů apod. Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost jevu, že za dobu t nastalo právě n změn. Předpokládejme dále:

- Stacionární proces, tj. že tato situace nezávisí na poloze intervalu a délce t na časové ose.
- Bez ohledu na počet změn v intervalu $(0, t)$ nechť pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t + h)$ nastane jedna změna je $\lambda h + o(h)$, zatímco pst jevu, že nastane více změn je $o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pravděpodobnosti $P_n(t)$ se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λt.

Pozn. 39: Všimněte si, že změny v intervalech $(0, t)$ a $(t, t + h)$ jsou nezávislé.

NEHOMOGENNÍ POISSONŮV PROCES (NHPP)

Def. 35: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou** $\lambda,\ \lambda > 0$, jestliže:

- i) $N(0) = 0$.
- ii) Proces má stacionární a nezávislé přírůstky
- iii) $P\big(N(h) = 1\big) = \lambda h + o(h)$
- iv) $P\big(N(h) \geq 2\big) = o(h)$

Def. 36: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **nehomogenní Poissonův proces s intenzitou** $\lambda(t) > 0,\ t > 0$, jestliže:

- i) $N(0) = 0$.
- ii) Proces $N(t),\ t \geq 0$ má nezávislé přírůstky
- iii) $P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) = \boldsymbol{\lambda(t)} h + o(h)$
- iv) $P\big(N(t+h) - N(t) \geq 2\big) = o(h)$.

NHPP – VLASTNOSTI

Věta 46: Nechť $N(t)$ a $M(t)$ jsou nezávislé NHPP s funkcemi intenzity $\lambda(t)$ a $\mu(t)$. Potom pro náhodný proces $R(t) = N(t) + M(t)$ platí:

- **i)** Jedná se o NHPP s intenzitou $\kappa(t) = \lambda(t) + \mu(t)$
- **ii)** Nechť v čase t nastala událost procesu $R(t)$. Potom, nezávisle na tom co nastalo do času t, se pravděpodobnost jevu, že se jednalo o událost procesu $N(t)$, je rovna $\lambda(t)/\big(\lambda(t) + \mu(t)\big)$.

Věta 47: Uvažujme proces typu $M/G/\infty$, to jest vstupy popsané Poissonovým procesem, nekonečný počet obslužných linek a obecné rozdělení dob obsluhy. Potom výstup z tohoto systému tvoří NHPP s intenzitou $\lambda(t) = \lambda G(t)$.

SLOŽENÝ POISSONŮV PROCES

Náhodný proces $X(t)$ se nazývá složený Poissonův Proces, jesliže může být reprezentován jako

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \qquad t \geq 0,$$

kde $N(t),\ t \geq 0$ je Poissonův proces a Y_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, které jsou nezávislé na $N($.

- i) Jestliže $Y_i = 1$, potom $X(t) \equiv N(t)$
- ii) $E\,X(t) = \lambda t\, E\,Y_1$ a $var\,X(t) = \lambda t\, E\,Y_1^2$
- iii) Jestliže zákazníci přijíždějí auty náhodně podle HPP a počty zákazníků v každém autě se řídí týmž rozdělením, a jsou nezávislé jak mezi sebou tak na $N(t)$, potom $X(t)$ je složený Poissonův proces popisující počet zákazníků, kteří dorazili do času t.
- iv) Jestliže zákazníci opouštějí obchod náhodně podle HPP a utracené částky se řídí týmž rozdělením, a jsou nezávislé jak mezi sebou tak na $N(t)$, potom $X(t)$ je složený Poissonův proces popisující množství utracených peněz do času t.

Systémy hromadné obsluhy

Def. 37: Systémem hromadné obsluhy budeme rozumět:

- Jednu nebo více paralelních stanic obsluhy (linek), k nimž přicházejí zákazníci, kteří obsluhu požadují a po obsloužení systém opouštějí.
- Zákazníci, kteří nemohou být okamžitě obslouženi (protože všechny stanice obsluhy jsou obsazené) se řadí do jediné fronty.
- Doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením A.
- Doby obsluhy, do nichž se nezapočítává doba čekání ve frontě) jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením B.

Pozn. 40: Rozdělení dob příchodů se zpravidla předpokládá:

- exponenciální . . . M (Markovian)
- deterministické . . . D (Deterministic)
- obecné . . . G (General)
- Erlangovo, tj. $\Gamma(n, \lambda)$ . . . E_n (Erlang)

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Def. 38: Systémy hromadné obsluhy **M/M/x** jsou charakterizovány tím, že příchody zákazníků se řídí homogenním Poissonovým procesem a doby obsluhy mají exponenciální rozdělení.

Věta 48: Systémy **M/M/x** lze popsat obecným procesem zrodu a zániku.

Pozn. 41: Pro model:

- M/M/1 : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \leq j < \infty$ a $\mu_j = \mu,\ 1 \leq j < \infty$
- M/M/c : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \leq j < \infty,\ \mu_j = j\mu,\ 0 \leq j \leq c$ a
  $\mu_j = c\mu,\ c \leq j < \infty$
- M/M/∞ : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \leq j < \infty,\ \mu_0 = 0$ a $\mu_j = j\mu,\ 0 \leq j < \infty$

Blíže viz příklad o telefonní ústředně s nekonečně mnoho linkami nebo příklad o dvojbudce s neomezenou frontou, tj. příklady 14 a 15.

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Věta 49: Pro systémy **M/M/x** platí:

- M/M/1 : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$.
- M/M/c : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametry $\left(c + 1,\ \lambda/\mu\right)$.
- M/M/∞ : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Věta 50: Pro systém **M/M/c** platí, že odchody ze stabilizovaného systému s neomezenou frontou (beze ztrát, odpadání apod.) s parametry λ (vstup) a μ (výstup) jsou opět popsány homogenním Poissonovým procesem s parametrem λ!

Pozn. 42: Systémy **M/M/c** se tedy dají dobře kombinovat a za předpokladu stabilizovatelnosti se chod výsledného systému dá popsat vhodným Markovovským procesem.

M/M/1

Pozn. 43: Uvažujme model **M/M/1**. Z věty 49 víme, že limitní pravděpodobnosti p_n ustáleného chování popisující počet zákazníků v ustáleném provozu systému se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$. Odtud ze základních vlastností geometrického rozdělení vyplývá, že:

- Střední počet zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}\Big/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
- Rozptyl počtu zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}\Big/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$
- Střední délka fronty je $\sum_j jp_{j+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\Big/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

Pozn. 44: Všimněme si, že rozdíl mezi středním počtem zákazníků v systému a střední délkou fronty je λ/μ a nikoliv 1. Rozmyslete!

M/M/1 (POKR.)

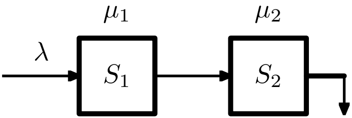
Pozn. 45: Uvažujme model **M/M/1**.
Potom doba T_n strávená v systému zákazníkem, který se zařadil jako n-tý se řídí gamma rozdělením $\Gamma(n+1,\mu)$, neboť hledaný čas se skládá ze zbytkového času obsluhovaného zákazníka a časů obsluhy všech čekajících ve frontě, včetně našeho zákazníka.
Rozdělení doby čekání T jednoho náhodně vybraného zákazníka je podle věty o úplné pravděpodobnosti směsí rozdělení T_n s vahami danými pravděpodobnostmi ustáleného provozu p_n. Ukažte, že:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \geq 0,$$

takže střední doba setrvání v systému je rovna $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

M/M/1 + M/M/1 ≡ TANDEM

Def. 39: Sériové propojení dvou nezávislých systémů hromadné obsluhy M/M/1 se nazývá **tandemové uspořádání**.



Věta 51: V tandemovém uspořádání nezávislých systémů hromadné obsluhy typu $M/M/1$ existuje stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi}$, a je dáno součinem individuálních stacionárních rozdělení pro jednotlivé uzly, tj. platí:

$$\boldsymbol{\pi}(k_1, k_2) = \prod_{i=1}^{2} \pi_i(k_i) = \prod_{j=1}^{2} \rho_i^{k_i}(1 - \rho_i), \quad \rho_i = \lambda/\mu_i,\ k_i \in \mathbb{N}_0$$

Pozn. 46: Podobný výsledek platí pro sériové propojení J nezávislých systémů hromadné obsluhy $M/M/c_i,\ i = 1, \ldots, J$, pokud $\lambda/(c\mu_i) < 1$.

Jacksonovy sítě

Síť složená z J vzájemně spojených systémů hromadné obsluhy (uzlů) se nazývá otevřená Jacksonova síť, jestliže:

- Příchod úloh do systému zvenčí se řídí homogenním Poissonovým procesem s intenzitou $\alpha > 0$; přičemž každá úloha je okamžitě náhodně přiřazena uzlu j s pstí $p_{0j} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{J} p_{0j} = 1$
- Externí příchody do uzlu i tvoří homogenní Poissonův proces
- Doby obsluhy se řídí exponenciálním rozdělením
- Obsluha se řídí pravidlem first-come first-served (FIFO)
- Zákazník obsloužený v uzlu i buď postoupí do uzlu j s pstí p_{ij}, nebo systém opustí s pstí $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
  - $p_{i0} > 0$ pro některou podmnožinu uzlů
- Využití serveru je menší než jedna (server utilization means the proportion of time the server is busy)

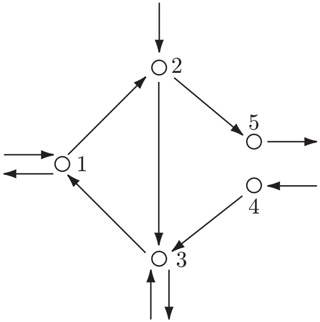
Jacksonovy sítě

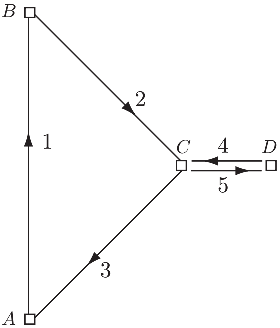
Síť složená z J vzájemně spojených systémů hromadné obsluhy (uzlů) se nazývá otevřená Jacksonova síť, jestliže:

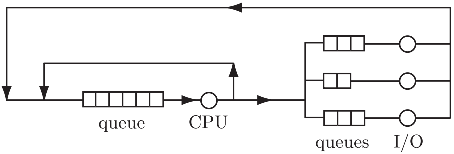
- Příchod úloh do systému zvenčí se řídí homogenním Poissonovým procesem s intenzitou $\alpha > 0$; přičemž každá úloha je okamžitě náhodně přiřazena uzlu j s pstí $p_{0j} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{J} p_{0j} = 1$
- Externí příchody do uzlu i tvoří homogenní Poissonův proces
- Doby obsluhy se řídí exponenciálním rozdělením
- Obsluha se řídí pravidlem first-come first-served (FIFO)
- Zákazník obsloužený v uzlu i buď postoupí do uzlu j s pstí p_{ij}, nebo systém opustí s pstí $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
  - $p_{i0} > 0$ pro některou podmnožinu uzlů
- Využití serveru je menší než jedna (server utilization means the proportion of time the server is busy)

Pozn. 48: $\lambda_i = \alpha p_{0i} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j p_{ji}, \ i = 1, \ldots, J$

Jacksonova síť







Otevřená a uzavřené Jacksonovy sítě

Jacksonova síť pro model M/M/c

Pozn. 49: Připomeňme, že pro model:

- M/M/1 : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty$ a $\mu_j = \mu,\ 1 \le j < \infty$
  limitní pravděpodobnosti p_n se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$.
- M/M/c : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty,\ \mu_j = j\mu,\ 0 \le j \le c$ a
  $\mu_j = c\mu,\ c \le j < \infty$
  limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametry $\big(c+1,\ \lambda/\mu\big)$.

Věta 52: V otevřené Jacksonově síti J uzlů typu $M/M/1$ existuje stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi}$, a je dáno součinem individuálních stacionárních rozdělení pro jednotlivé uzly, tj. platí:

$$\boldsymbol{\pi}\big(k_1,\dots,k_J\big) = \prod_{i=1}^{J} \pi_i\big(k_i\big) = \prod_{j=1}^{J} \rho_i^{k_i}\big(1-\rho_i\big), \quad \rho_i = \lambda_i/\mu_i,\ k_i \in \mathbb{N}_0$$

Pozn. 50: Podobný výsledek platí pro otevřenou Jacksonovu síť J uzlů typu $M/M/c_i,\ i = 1,\dots,J$, pokud $\lambda_i/(c_i\mu_i) < 1$

Simulace M/M/1

```
for (i in 1:maximální počet zákazníků){
   if (aktcas >= maximální čas){break}
   # simulace končí, pokud je dosaženo maximálního času

   while (min(časy naplánovaných událostí) < čas příchodu
     dalšího zákazníka){
     # někdo skončí obsluhu dřív, než dorazí další zákazník
     aktcas <- min(časy naplánovaných událostí)
     stav <- stav - 1
     záznam události, odebrání zákazníka z˜obsluhy

     # začátek obsluhy dalšího zákazníka
     # (uvolnila se obslužná stanice)
     if (fronta není prázdná){
       délka obsluhy <- obsluha(aktcas,stav,stanice)
       začátek obsluhy zákazníka, aktualizace fronty
     }
   }
   # nejbližší událostí je příchod i-tého zákazníka
   aktcas <- čas příchodu dalšího zákazníka
   stav <- stav + 1
   záznam události

   # pokud je volná stanice, bude zákazník rovnou obsluhován
   if (některá stanice je volná){začátek obsluhy zákazníka}
     else{zařazení zákazníka na konec fronty}

   # určení času příchodu dalšího zákazníka
   příchod dalšího zákazníka <- aktcas + prichod(aktcas,stav)}
```

M/M/1

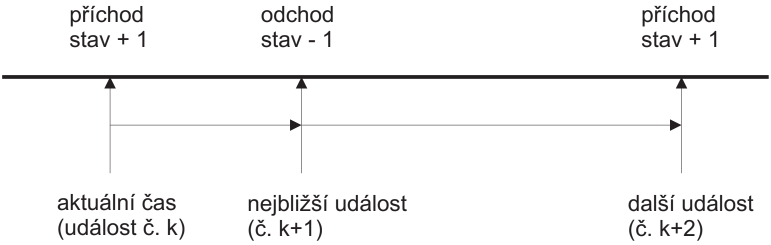
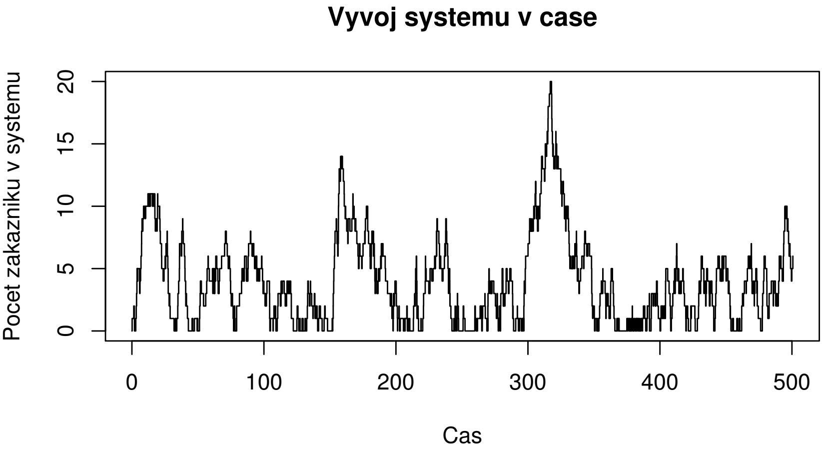


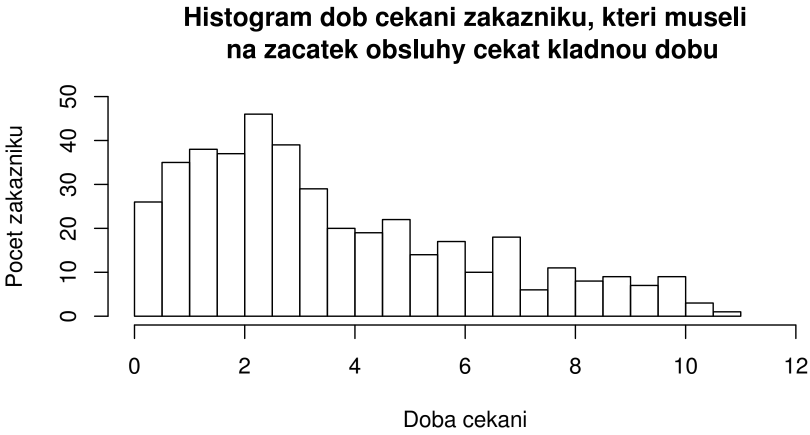
Schéma průběhu uvažovaného simulačního algoritmu

M/M/1



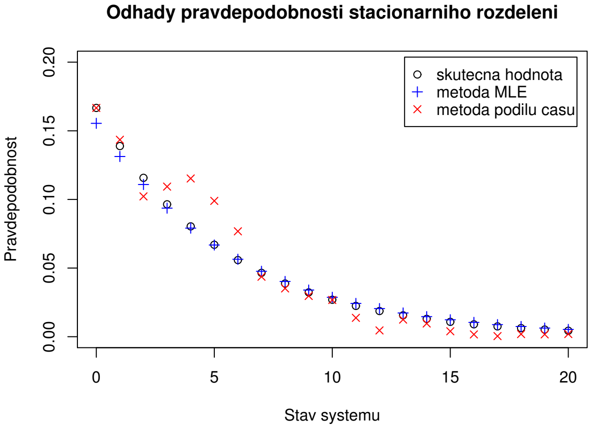
Časový vývoj počtu zákazníků v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$

M/M/1



Histogram doby čekání na začátek obsluhy těch zákazníků, kteří museli čekat kladnou dobu (v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$)

M/M/1



Srovnání metod odhadu pravděpodobností stacionárního rozdělení v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$

Ekvilibrium nákladů (rovnice nákladů)

Uvažujme stacionární systém

- $N(t)$ ... počet zákazníků, kteří vstoupili do systému do času t
- λ_a ... střední jednotková intenzita vstupujících zákazníků (average arrival rate of entering customers)
- ARE ... střední jednotkový výnos (average rate at which system earns)
- AAP ... střední platba zákazníka vstupujícího do systému (average amount an entering customer pays)

Ekvilibrium nákladů (rovnice nákladů)

- $\lambda_a = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$
- $ARE = \lambda_a \cdot AAP$

(Vzpomeňte na $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde jak X_i tak N jsou náhodné)

Littlův zákon (formule)

- ARE ... střední jednotkový výnos
  ($ARE = \lambda_a \cdot AAP,\ \lambda_a = \lim_{t\to\infty} N(t)/t$)
  (average rate at which system earns)
- AAP ... střední platba zákazníka vstupujícího do systému
  (average amount an entering customer pays)
- L ... střední počet zákazníků v systému
- L_Q ... střední počet zákazníků čekajících ve frontě
- W ... střední čas, který zákazník stráví v systému
- W_Q ... střední čas, který zákazník stráví ve frontě

• Předpokládejme, že každý zákazník zaplatí 1 Kč za jednotku času, který stráví v systému. Potom ze vztahu $ARE = \lambda_a \cdot AAP$ dostaneme

$$L = \lambda_a W$$

• Platí-li zákazník 1 Kč za jednotku času, kterou stráví ve frontě, pak

$$L_Q = \lambda_a W_Q$$

• Platí-li zákazník 1 Kč za jednotku času, po kterou je obsluhován, pak

$$\textbf{střední počet zákazníků v obsluze} = \lambda_a E(S)$$

kde $E(S)$ je střední čas který zákazník stráví v obsluze

Pozn. 51: Tyto vztahy nejsou závislé na rozdělení procesu příchodů zákazníků, procesu dob obsluhy, počtu serverů, pořadí obsluhy, apod.

VĚTVÍCÍ SE PROCES (POKR.)

Model. Nechť $X_0 = 1$, $X_1 (\equiv U)$ se řídí rozdělením (10) s vytvořující funkcí $P_1(x) \equiv P(x)$. Nechť X_n popisuje počet jedinců n-té generace.

Potom počet potomků každého z X_1 jedinců první generace je n.v. s rozdělením (10), jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na X_1, tj.

$$X_2 = U_1 + \ldots + U_{X_1}$$

Podobně X_3 jsou potomci druhého řádu jedinců první generace, tj. X_1 n.v. s rozdělením jako X_2, resp. potomky X_2 náhodných veličin s rozdělením jako X_1, tj. (10) atd.

Věta 53: Vytvořující funkce $P_n(x)$ n.v. X_n splňují rekurentní vztah

$$P_{n+1}(x) = P\big(P_n(x)\big) = P_n\big(P(x)\big)$$

a platí

$$E\,X_n = \big(E\,X_1\big)^n, \quad varX_n = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Markovské řetězce se spojitým časem

Def. 40: Markovským řetězcem se spojitým časem budeme rozumět náhodný proces takový, že se pohybuje ze stavu do stavu podle některého Markovova řetězce, přičemž doby, které stráví v jednotlivých stavech (než přejde do stavu jiného), se řídí exponenciálním rozdělením. Navíc, doby setrvání v jednotlivých stavech tvoří posloupnost nezávislých náhodných veličin.

Pozn. 52: Jinými slovy, jde o náhodný proces takový, že:

- Čas strávený ve stavu i se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/v_i$.
- Jestliže proces opouští stav i a vstupuje do stavu j, činí tak s pravděpodobností P_{ij}, přičemž

$$P_{ii} = 0 \ \forall \ i \quad \& \quad \sum_j P_{ij} = 1 \ \forall \ i.$$

Charakterizace náhodných veličin

Pozn. 53: Připomeňme, že náhodná veličina X může být jednoznačně charakterizována některou z následujících charakteristik:

- Hustotou $f(x),\ x \in \mathbb{R}_1$.
- Distribuční funkcí $F(x) = P(X \le x),\ x \in \mathbb{R}_1$.
- Charakteristickou funcí $\varphi(t) = E\, e^{itX},\ t \in \mathbb{R}_1$.

Některé „specielní“ typy náhodných veličin mohou být vedle toho jednoznačně charakterizovány i některou jinou charakteristikou, např.

- Celočíselné náhodné veličiny jednoznačně charakterizuje jejich vytvořující funkce $P(x)$.
- Nezáporné náhodné veličiny jednoznačně charakterizuje funkce spolehlivosti $R(x) = P(X > x) = 1 - F(x),\ x \in \mathbb{R}_1$, nebo intenzita poruch $\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)},\ x > 0$.

Pro další charakterizace a výpočet momentů je pak velice užitečná momentová vytvořující funkce $m(t) = E\, e^{tX},\ t \in \mathbb{R}_1$.

Podmíněná pravděpodobnost

Def. 41: Mějme pravděpodobnostní prostor $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\big)$. Nechť jevy $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(B) > 0$. Potom podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky B rozumíme

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

PODMÍNĚNÉ CHARAKTERISTIKY

Def. 42: Nechť X a Y jsou dvě diskrétní náhodné veličiny. Potom:

- Podmíněnou hustotou X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathcal{P}\big(X = x|Y = y\big) = \frac{\mathcal{P}\big(X = x, Y = y\big)}{\mathcal{P}\big(Y = y\big)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

- Podmíněnou distribuční funkcí X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathcal{P}\big(X \leq x|Y = y\big) = \sum_{z \leq x} p_{X|Y}(z|y)$$

- Podmíněnou střední hodnotou X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$E\big[X|Y = y\big] = \sum_x x \cdot \mathcal{P}\big(X = x|Y = y\big) = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$

Vytvořující funkce

Def. 43: Nechť $a_0, a_1, \ldots$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada $\mathcal{A}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konverguje v některém okolí nuly, nazveme ji *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_j\}$.

Pozn. 54: Je-li $\{a_j\}$ omezená, pak zřejmě $\mathcal{A}(x)$ konverguje alespoň v intervalu $(-1, 1)$.

Def. 44: Je-li X celočíselná náhodná veličina, pro níž $P(X = j) = p_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \sum_j p_j = 1$, pak její *(pravděpodobnostní) vytvořující funkcí* budeme rozumět funkci $\mathcal{P}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.

Pozn. 55:

- Vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ jednoznačně charakterizuje odpovídající náhodnou veličinu X.
- Všimněte si, že $\mathcal{P}(t) = E\,t^X$ $\Big[$připomeňme: $E\,X = \sum_j p_j x_j$ a $E\,g(X) = \sum_j p_j g(x_j)\Big]$.
- Pro celočíselnou náhodnou veličinu X její vytvořující funkce vždy konverguje také v bodě $x = 1$, neboť $\mathcal{P}(1) = 1$.

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE – PŘÍKLADY

Příklad 21: Ověřte tvar vytvořujících funkcí pro následující rozdělení:

- Alternativní ... $\mathcal{P}(x) = q + px$
- Binomické ... $\mathcal{P}(x) = (q + px)^n$
- Poissonovo ... $\mathcal{P}(x) = \exp\{-\lambda + \lambda x\}$
- Geometrické ... $\mathcal{P}(x) = p/(1 - qx)$
  resp. $= px/(1 - qx)$
- Negativně binomické ... $\mathcal{P}(x) = \big(p/(1 - qx)\big)^r$
  resp. $= \big(px/(1 - qx)\big)^r$
- Rovnoměrné ... $\mathcal{P}(x) = (1 - x^{n+1})/\big((n + 1)(1 - x)\big)$
  resp. $= \big(x(1 - x^n)\big)/\big(n(1 - x)\big)$

Spočtěte pomocí těchto vytvořujících funkcí odpovídající střední hodnotu a rozptyl.

Pozn. 56: Uvědomte si, že geometrické, respektive negativně binomické rozdělení jsou nejjednodušší modely popisující rozdělení doby čekání.

Vlastnosti vytvořující funkce

Věta 54: Označme $q_k = P(X > k) = \sum_{j>k} p_j$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a odpovídající vytvořující funkci $\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$. Pak pro $-1 < x < 1$ platí $\mathcal{Q}(x) = \big(1 - \mathcal{P}(x)\big)/(1 - x)$.

Věta 55: Pro celočíselnou náhodnou veličinu X platí

$$E\,X = \sum_{i=0}^{\infty} j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \mathcal{P}'(1) = \mathcal{Q}(1)$$

Věta 56: Nechť pro celočíselnou náhodnou veličinu X je poloměr konvergence odpovídající vytvořující funkce větší než jedna. Potom platí

$$var\,X = \mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) - \big(\mathcal{P}'(1)\big)^2 = 2\mathcal{Q}'(1) + \mathcal{Q}(1) - \big(\mathcal{Q}(1)\big)^2$$

Pozn. 57: Věta 56 zůstává v platnosti i v případě, že poloměr konvergence $\mathcal{P}(x)$ je roven jedné, pokud existuje konečná $\lim_{x\to 1_-} \mathcal{Q}''(x)$ a pokud derivace v bodě $x = 1$ vystupující ve vzorci pro $var\,X$ nahradíme jejich limitami pro $x \to 1_-$.

Rozklad na částečné zlomky

Pozn. 58: Teoreticky je znalost $\mathcal{P}(x)$ ekvivalentní znalosti $\{p_j\}$, neboť $p_j = \mathcal{P}^{(j)}(0)/j!$. V praxi však může být získání jednotlivých pravděpodobností značně náročné. V některých případech nám pomůže následující tvrzení.

Věta 57: Nechť vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ posloupnosti $\{p_j\}$ se dá vyjádřit ve tvaru $\mathcal{P}(x) = U(x)/V(x)$, kde $U(x)$ a $V(x)$ jsou polynomy bez společných kořenů, $U(x)$ je stupně nižšího než $V(x)$ a nechť kořeny polynomu $V(x)$ jsou vesměs jednoduché. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}} + \cdots + \frac{\rho_m}{x_m^{n+1}}, \quad 0 \le n < \infty,$$

kde m je stupeň polynomu $V(x)$, $x_1, \ldots, x_m$ jsou jeho kořeny a $\rho_k = -U(x_k)/V'(x_k)$, $1 \le k \le m$.

Pozn. 59: Pro výpočt ρ_k se zpravidla užívá technika rozkladu na částečné zlomky, kterou má zabudovanou jak program *Maple* tak program *Mathematica*.

Rozklad na částečné zlomky (pokr.)

Pozn. 60: Nechť x_1 je ten kořen $V(x)$ pro nějž $|x_1| < x_k,\ 2 \le k \le m$. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n+1} + \ldots + \frac{\rho_m}{\rho_1}\left(\frac{x_1}{x_m}\right)^{n+1}\right),$$

takže pro $n \to \infty$ platí $p_n \approx \rho_1 / x_1^{n+1}$, kde $\rho_1 = -U(x_1)/V'(x_1)$.

Pozn. 61: Pro platnost asymptotického vztahu $p_n \approx \rho_1 / x_1^{n+1}$ lze vynechat předpoklad, že $U(x)$ je stupně menšího než $V(x)$ a jednoduchost stačí požadovat jenom u kořene x_1. Ze zkušenosti je přitom známo, že aproximace je dobrá i pro malé hodnoty n.

Příklad 22: Nechť q_n je pravděpodobnost toho, že v posloupnosti n hodů mincí nepadne ani jednou trojice líců za sebou. Odvoďte vytvořující funkci $Q(x)$ a spočtěte pro menší hodnoty n pravděpodobnosti q_n jak přesně, tak přibližně.

Řešení: $Q(x) = \left(8 + 4x + 2x^2\right) / \left(8 - 4x - 2x^2 - x^3\right)$.

Konvoluce

Def. 45: Nechť $a_0, a_1, \dots$ a $b_0, b_1, \dots$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Potom posloupnost $c_0, c_1, \dots$ definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

se nazývá konvoluce posloupností $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$, a značí se $\{c_j\} = \{a_j\} \star \{b_j\}$.

Věta 58: Nechť $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$ jsou posloupností s vytvořujícími funkcemi $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{B}(x)$. Potom pro vytvořující funkci jejich konvoluce $\{c_j\}$ platí

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x).$$

Pozn. 62: Konvoluci $\{a_j\} \star \{a_j\}$ nazýváme konvoluční mocninou a značíme ji $\{a_j\}^{2\star}$. Podobně n-tou konvoluční mocninu $\{a_j\} \star \dots \star \{a_j\}$ značíme $\{a_j\}^{n\star}$.

Věta 59: Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j\}$ a vytvořující funkcí $\mathcal{P}(x)$. Pak rozdělení součtu $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ je dáno n-tou konvoluční mocninou $\{p_j\}^{n\star}$ a odpovídající vytvořující funkce je $\mathcal{P}(x) \dots \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^n(x)$.

Složená rozdělení

Věta 60: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ a N jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny, X_i mají totéž rozdělení $\{f_j\}$ a N nechť má rozdělení $\{g_j\}$. Potom $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ je též celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{h_j\}$ a platí

$$h_j = P(S_N = j) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \{f_j\}^{n\star}.$$

Jsou-li $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ a $\mathcal{C}(x)$ vytvořující funkce pozdělení $\{f_j\}, \{g_j\}$ a $\{h_j\}$, potom $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(x)\big)$ a $E\,S_N = E\,X_1 \cdot E\,N$. Rozptyl spočteme aplikací Věty 56 a pravidel pro derivaci složené funkce.

Pozn. 63: Všimněme si, že náhodná veličina $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ není nic jiného než náhodný součet náhodných veličin.

Příklad 23: Nechť počet snesených vajíček N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda)$ a pravděpodobnost narození jedince z vajíčka nechť je p, tj. X_i se řídí alternativním rozdělením. Ukažte, že potom S_N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda p)$.

Větvící se proces – aneb jak se mohou šířit viry

Model. Uvažujme jedince, kteří mohou dát vznik novým jedincům téhož druhu s pravděpodobnostmi

$$P(U = j) = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

a vytvořující funkci $P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.
Na začátku (nultá generace) existuje jeden jedinec. Nechť bezprostřední potomci n-té generace tvoří $(n+1)$-ní generaci a jedinci jednají nezávisle na sobě.

Problémy.

- Najděte rozdělení prvků v n-té generaci.
- Spočtěte limitní (tj. pro $n \to \infty$) pravděpodobnost jevu, že populace vymře.