

# ČNB: modelovanie ekonomiky

## Matematické problémy nematematikov



František Brázdík

25. 10. 2017

Názory vyjadrené v tejto prezentácii sú názormi autora a nemusia nevyhnutne odrážať názor Českej národnej banky.

- 1 Riešenie dynamických problémov
- 2 Cyklus a Trend
- 3 Hodrick-Prescottov filter
- 4 Kalmanov filter
- 5 Prognóza ČNB

## Ekonomický model

je teoretický konštrukt, ktorý stelesňuje ekonomické postupy s použitím množiny premenných v logických a / alebo kvantitatívnych koreláciách.

## Ekonomický model

je zjednodušenie, ktoré sa použitím matematických a iných techník snaží zobrazit' komplikovaných procesov.

## Ekonomický model

môže mať mnoho obmedzení a predpokladov, ktoré môžu ovplyvniť jeho vlastnosti.

Všestranné uplatnenie modelov:

1. Aerodynamický tunel: modeluje prúdenie vzduchu
2. Architektúra, vývoj automobilov: Modely pre vizualizáciu a testovanie fyzikálnych vlastností
3. Jedným z najrozšírenejších modelov sú mapy

Využitie ekonomických modelov:

1. Predpovedať ekonomickú aktivitu vyvodením záverov na základe predpokladov
2. Nastavenie nových pravidiel, zákonov alebo predpisov vedúce ku zmene budúceho ekonomické správania
3. Argumentačne podporiť nastavenie hospodárskych politík
4. Plánovanie a rozdeľovanie zdrojov, vedenie podnikov
5. Pomoc pri obchodovaní a špekuláciách

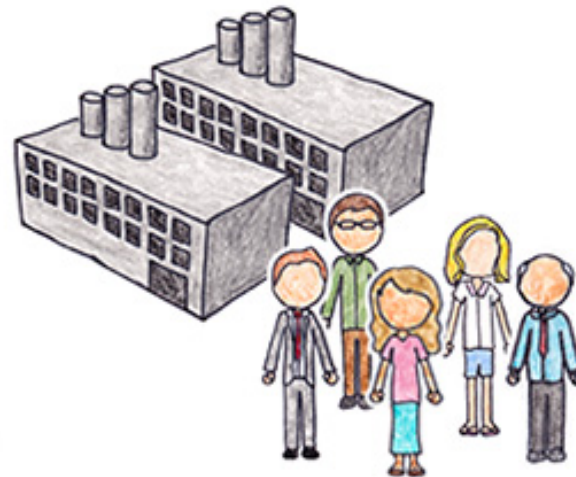
Aký je v tom rozdiel?

- Mikroekonómia: sleduje ekonomiku na úrovni individua, skupiny alebo podniku
  - Vplyv nízkych sadziab na správanie na dlžníkov
- Makroekonómia: sleduje ekonomiku na úrovni štátu, únie
  - Vplyv nízkych sadziab ceny nehnuteľností alebo mieru nezamestnanosti

MACRO



MICRO



- Pri budovaní modelu čelíme kompromisom medzi realnosťou a pochopením modelu
- Neexistuje univerzálny model
- Chceme použiť zjednodušujúce predpoklady a zároveň vedieť ako tieto predpoklady ovplyvňujú vlastnosti modelu
- Potrebujeme vedieť, ktoré vlastnosti modelu sú kritické

	B Prizná sa	B mlčí
A Prizná sa	A dostane 3 B dostane 3	A dostane 0 B dostane 5
A mlčí	A dostane 5 B dostane 0	A dostane 1 B dostane 1

## Väzňova dilema

Páchatelia prepadnutia A a B sú umiestnení v samostatných oddelených celách. Žalobca však nemá dostatočné dôkazy na ich odsúdenie za prepadnutie, ale iba za nedovolené držanie strelných zbraní, za ktorý by dostali jeden rok väzenia. Žalobca ponúka dohodu: “Ak sa priznáte, a váš komplic bude mlčať, stiahnem obvinenie proti vám a použijem vaše svedectvo proti komplicovi. Vy budete voľný a jeho odsúdia na 5 rokov. V prípade, že sa priznáte obaja dostanete stredne vysoký trest - tri roky. Pokiaľ zostanete mlčet, budete odsúdení za nedovolené držanie strelných zbraní.”



	B Prizná sa	B mlčí
A Prizná sa	A dostane 3 B dostane 3	A dostane 0 B dostane 5
A mlčí	A dostane 5 B dostane 0	A dostane 1 B dostane 1

- **Dominantná stratégia:** Maximalizácia zisku (minimalizácia trestu) bez ohľadu na správanie komplica
- Stratégia existuje: A sa vždy prizná
- Rozšírenie: Opakovanie problému, ...

## Section 1

# Riešenie dynamických problémov

- Maximalizácia úžitku domácností: Spotreba reprezentatívnej domácností  $c_t$  and voľný čas  $l_t$

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$$

- Dlhoveká domácnosť: Dynastia
- $E_0$  je operátor očakávaní v čase 0 a  $\beta$  je diskontný faktor
- Funkcia užitočnosti

$$u(c_t, l_t) = \frac{(c_t^b l_t^{1-b})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

- Voľný čas:

$$l_t = \bar{h} - h_t$$

kde  $\bar{h}$  celkový čas a  $h$  je čas strávený prácou

- Kapitál domácnosti:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$i_t$  investície a depreciačia  $\delta$

- Rozpočet domácností:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t$$

- Spotrebné statky sa nedajú skladovať:  $c_t = y_t$

- Produkčná funkcia (CRS):

$$y_t = f(k_t, e^{s_t} h_t)$$

$s_t$  stochastický šok - náhodný proces

- Pozorovanie:  $s_t = \rho * s_{t-1} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t$  zvyčajne z  $N(0, \sigma)$  - ekonomické cykly
- Zisk reprezentatívnej firmy:

$$\Pi_t = y_t - w_t h_t - r_t k_t$$

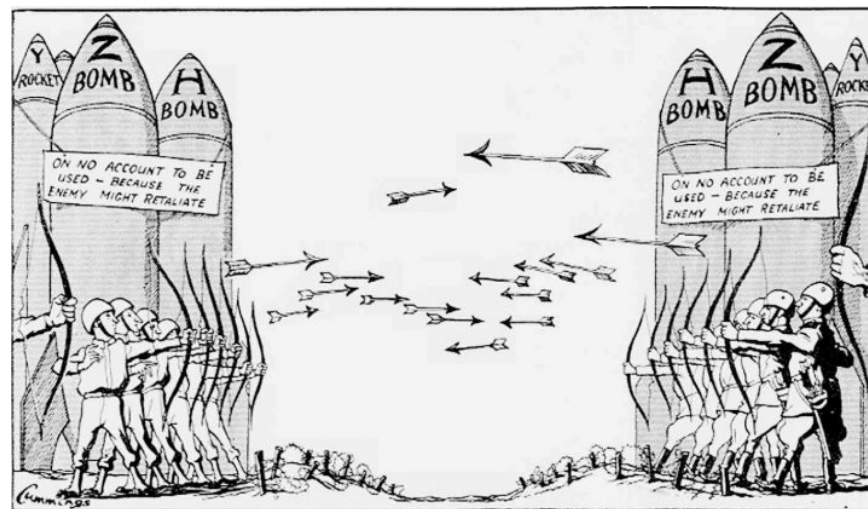
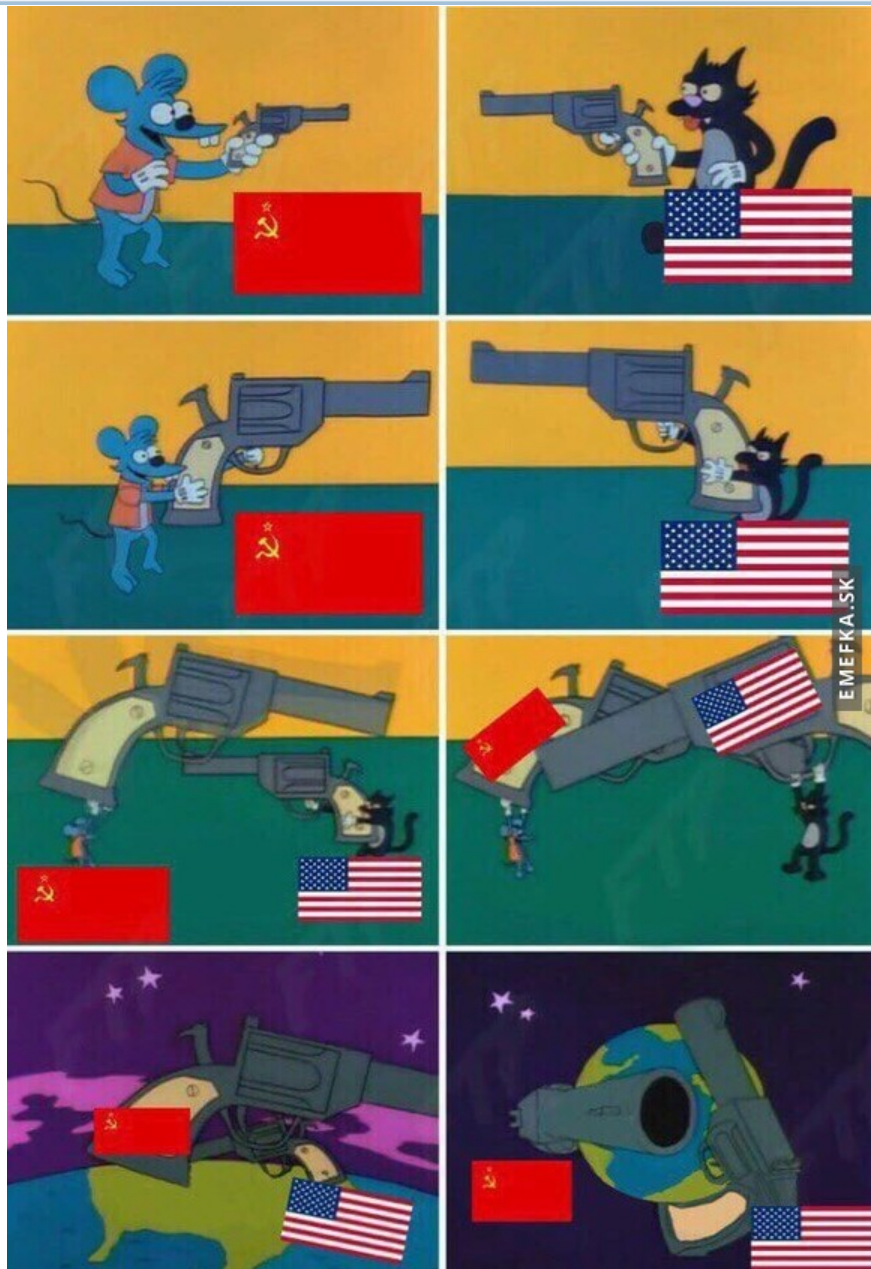
- Usporiadanie trhu?: Voľná konkurencia, monopolistická konkurencia, oligopol alebo monopol



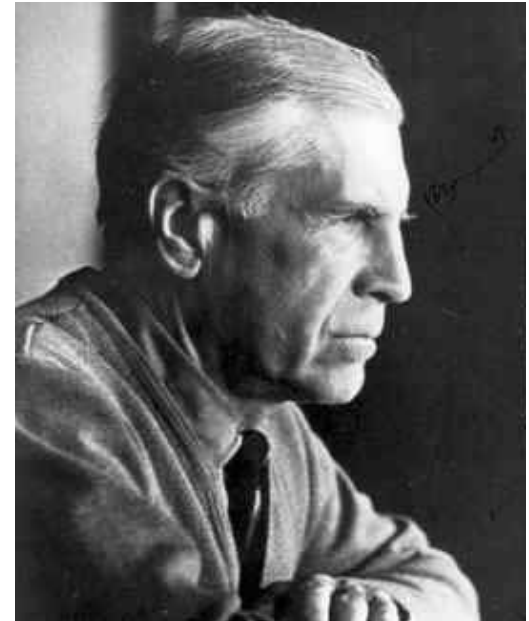
- Potrebujeme určiť stavové premenné (state variable):  $k_t$  a  $s_t$
- Rozhodnutie domácnosti:  $d_t = (h_t, i_t)$
- Mzda na trhu, domácnosť ju berie ako danú
- Bellmanova rovnica pre jednu domácnosť - maximalizačný problém:

$$V(k_t, s_t) = \max_{d_t} \{U(c_t, h_t) + \beta E_t V(k_{t+1}, s_{t+1})\},$$

- Maximalizačný problém je však ohraničený: rozpočtovým ohraničením domácnosti, produkciou firmy, vývojom kapitálu.
- Riešením je nájsť **rovnováhu/ekvilíbrio**: Všetko do seba pekne zapadne - konzistentné
- Riešením je rozhodovacie pravidlo pre domácnosť  $d_t = d_d(k_t, s_t)$ , rozhodovacie pravidlá pre firmu  $r_t = d_r(k_t, s_t)$  a  $w_t = d_w(k_t, s_t)$
- Existuje viac typov rovnováh: individuálne voľná súťaž alebo sociálny plánovač

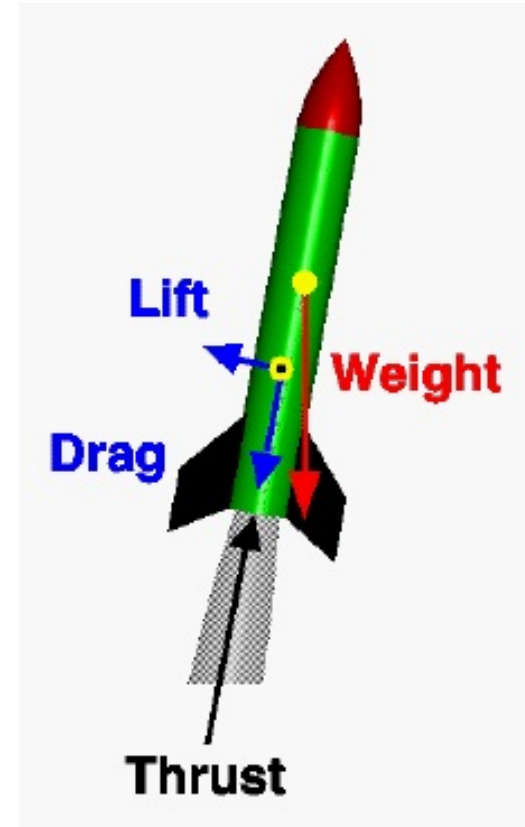


- **Richard Ernest Bellman:** 1920–1984, aplikovaný matematik
- Hlavným prínosom je Bellmanova rovnica: rovnica dynamického programovania
- IEEE Medal of Honor in 1979, “za príspevky k teórii rozhodovania a teórii riadenia systémov, k tvorbe a aplikáciám dynamického programovania”
  
- **Lev Semyonovich Pontryagin:** 1908 – 1988, algebraik
- Pontryaginova dualita, Pontryaginove triedy, Pontryaginove štvorce
- Teória optimalizácie: Princíp maxima





- Dynamické ohraničenia: rovnice pohybu, Newtonove zákony
- Ovládanie (controls): Ťah motorov, klapky, krídla, smerové kormidlo
- Stavy (states): pozícia, rýchlosť, hmotnosť
- Počiatočné podmienky: hmotnosť, náklad, palivo
- Ohraničenia trajektórie: Maximálny ťah motoru
- Bodové ohraničenia: Prelet určitým miestom



- Optimalizačný problém:

$$V(x_0) = \max_{\{a_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, a_t)$$

- Ohraničenia:  $a_t \in \Gamma(x_t)$ ,  $x_{t+1} = T(x_t, a_t)$ ,  $\forall t = 0, 1, 2, \dots$
- Rekurzívne rozpišeme:

$$\max_{a_0} \left\{ F(x_0, a_0) + \beta \left[ \max_{\{a_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, a_t) : a_t \in \Gamma(x_t), x_{t+1} = T(x_t, a_t) \right] \right\}$$

- Z definície problému:  $V(x_0) = \max_{a_0} \{F(x_0, a_0) + \beta V(x_1)\}$
- Zovšeobecniíme zápis:  $V(x) = \max_{a \in \Gamma(x)} \{F(x, a) + \beta V(T(x, a))\}$
- Bellmanova rovnica: Riešením je funkcia
- Viac aplikácií v [Ljungqvist and Sargent, 2012] a v [Sargent, 1987]

- Dynamický systém -  $x$  je stav a  $u$  je control:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad t \in [0, T]$$

- Funkcionál a ohraničenia:  $J = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt$
- Úlohou je nájsť  $u(t) \in \mathcal{U}$  aby sme minimalizovali funkcionál, kde  $L(x(t), u(t))$  je Lagrangian (Joseph-Louis Lagrange)
- Riešením je hľadať extrém Hamiltoniánu:  
$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \lambda^T(t) f(x(t), u(t)) + L(x(t), u(t))$$
- Pontryaginov princíp, pre optimálne hodnoty stavov optimal  $x^*$ , control  $u^*$ , Lagrangeho multiplikátor  $\lambda^*$  platí:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), u, \lambda^*(t), t), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad t \in [t_0, t_f]$$

- Pontryaginov princíp: Nutná podmienka pre optimálne riešenie

## Section 2

# Cyklus a Trend

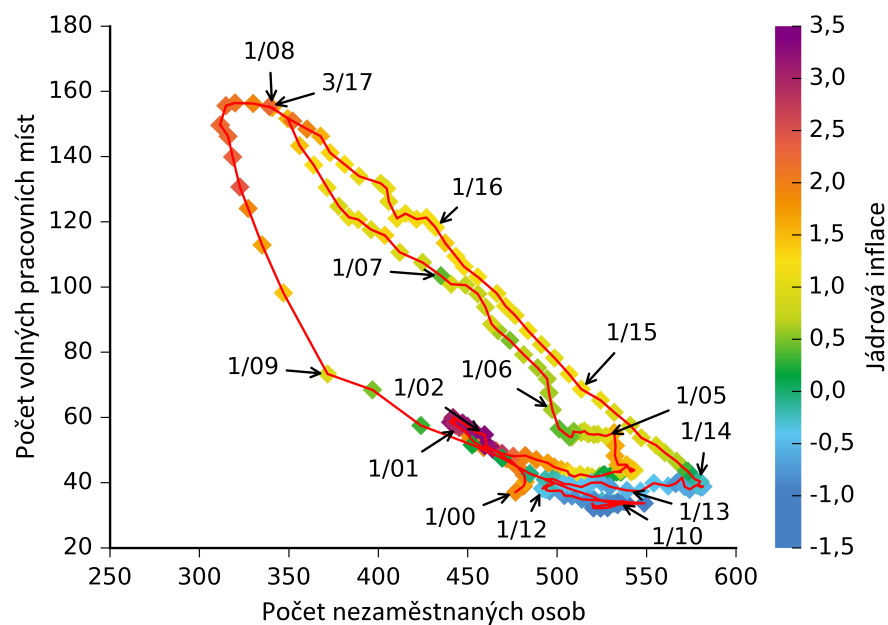
## Hospodársky cyklus

Je kolísanie ekonomickej aktivity na úrovni celej ekonomiky.

- Štylizované fakty:
  - Väčšina časových radov obsahuje trend: nestacionarita
  - Šok má zvyčajne vysokú perzistenciu

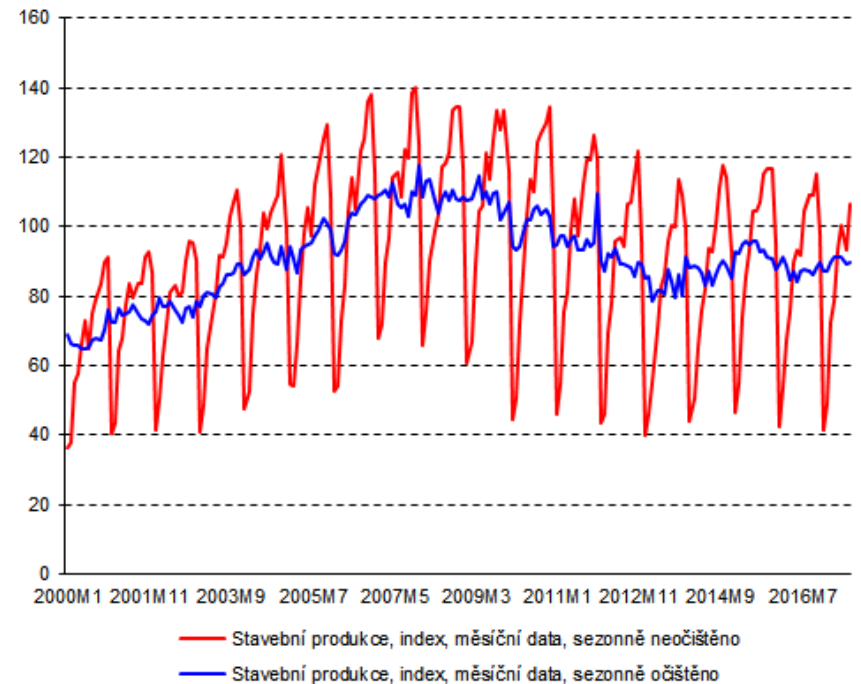
Štylizované fakty popisujú cyklickú komponentu:

- Amplitúda
- Korelácie
- Predbiehanie a oneskorenie



## Dekompozícia: Trend, cyklus, sezónna zložka, náhodná zložka

- Trend Zachycuje dlhodobé zmeny v správaní sa časového radu: dlhodobý rast alebo pokles.
- Základné trendy: rast populácie, rast cenovej hladiny, technologické zmeny, produktivita, životný cyklus produktu
- Interpretácia:
  - Dlhodobá rovnováha: Trend
  - Cyklické fluktuácie: Medzera



- Neexistuje všeobecná automatická technika rozkladu: vizuálna kontrola a znalosť dát
- Vyhľadovanie: Kľzavý priemer
- Aproximácia funkciou: Lineárna alebo Polynomiál vyššieho rádu
- Filtrovanie

- Modely nepozorovaných komponentov: rozklad na deterministickú a stochastickú zložku

$$Y_t = TD_t + Z_t$$

$TD_t$  = Deterministická zložka trendu

$Z_t$  = Cyklus/šok

- Vlastnosti šokov: trvalé a dočasné efekty

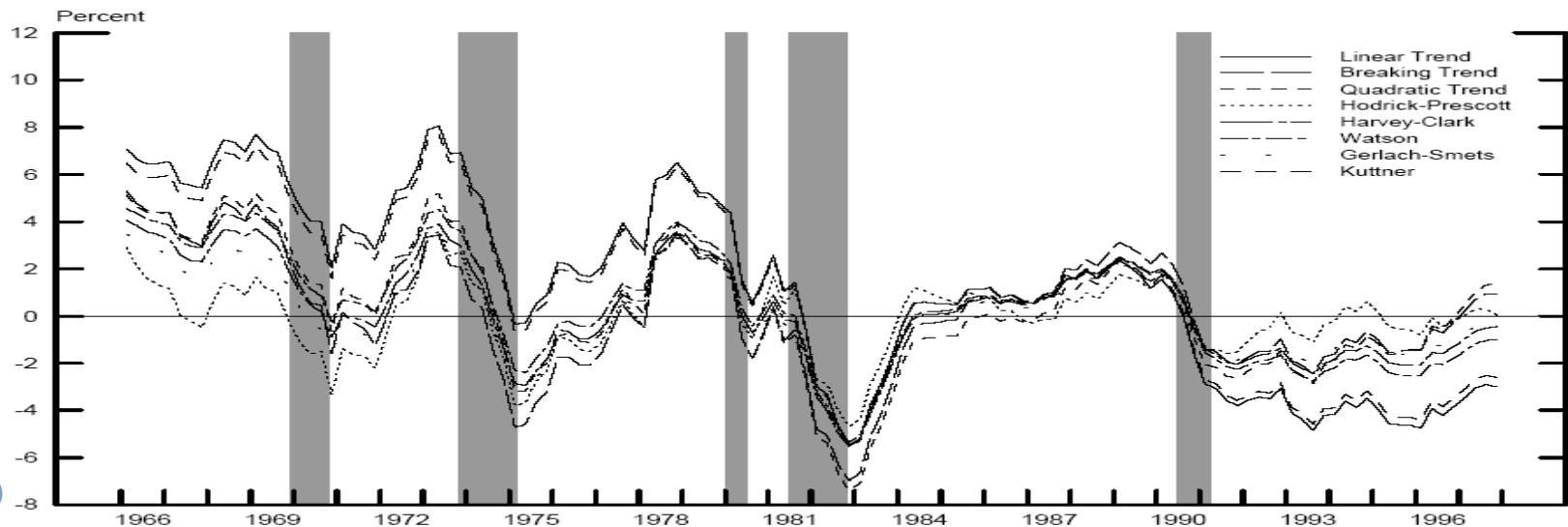
$$Z_t = TS_t + C_t$$

$TS_t$  = Stochastická zložka trendu

$C_t$  = Cyklus



- Watsonovo detrendovanie: trendový komponent je random walk with drift ( $Trend_t = a + Trend_{t-1} + \varepsilon_t$ ) a cyklický komponent je stacionárny AR proces konečného rádu
- Harvey-Clarkovo detrendovanie: Trend je lokálne lineárny ( $Trend_t = a + bt + Trend_{t-1} + \varepsilon_t$ )
- Hodrick-Prescott filter: univariate metóda
- Kalman filter: multivariate metóda, štrukturálny prístup
- Bandpass filter: metóda frekvenčnej domény
- Porovnanie: US GDP gap



# Section 3

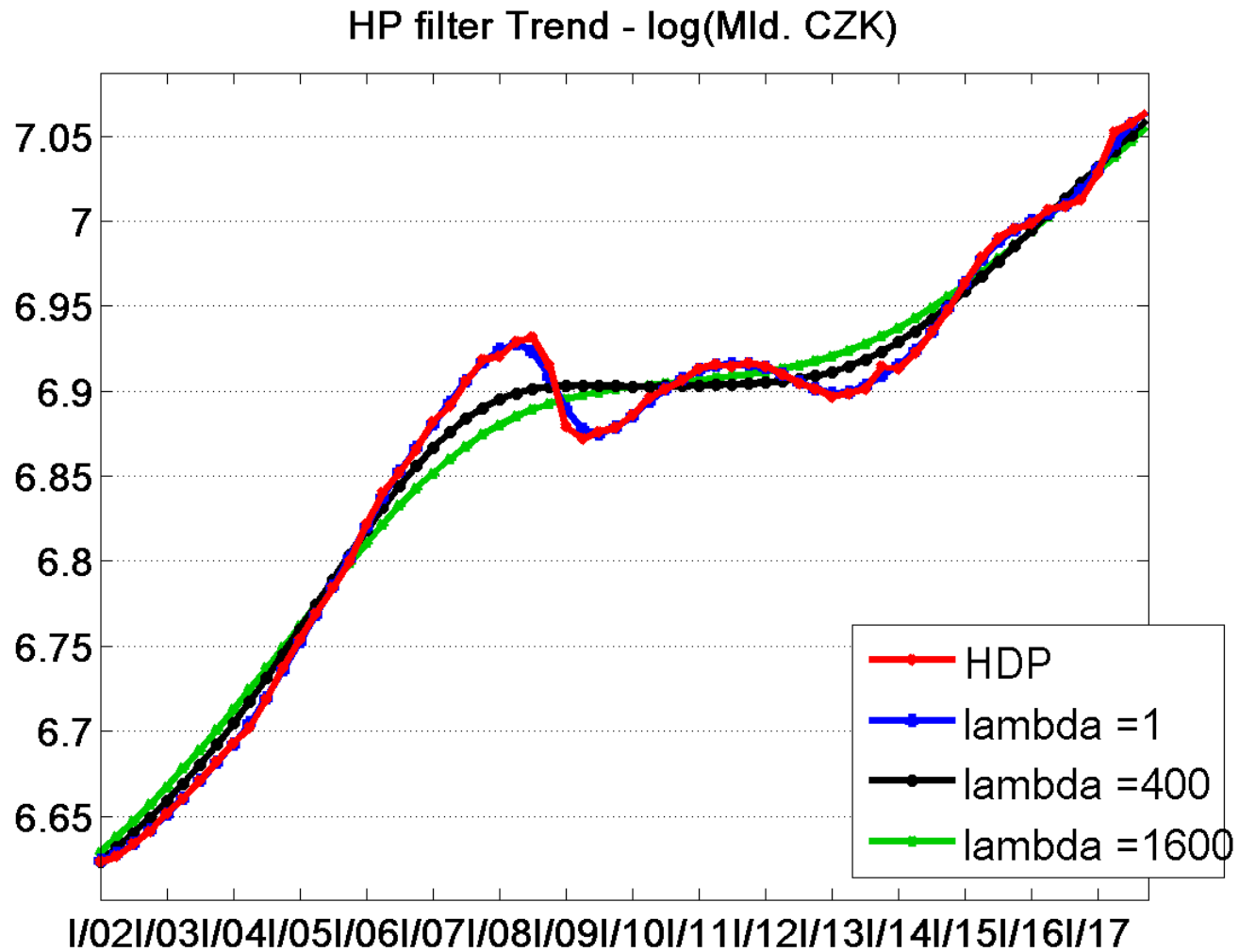
## Hodrick-Prescottov filter



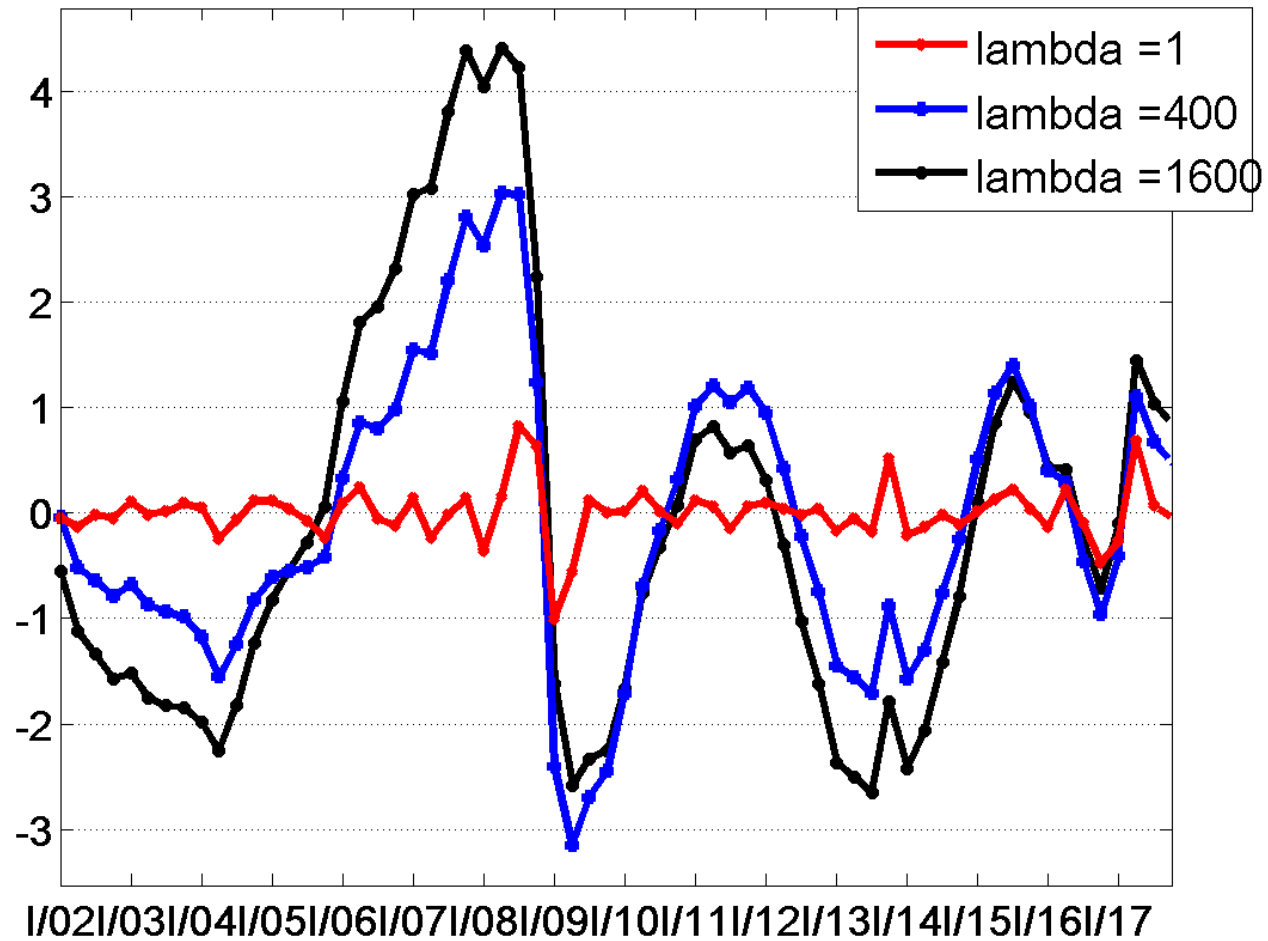
- [Hodrick and Prescott, 1997] predstavili nástroj na rozklad: trend je hladký ale nemusí byť lineárny
- Optimalizačný problém HP filtra:
  - Roklad:  $y_t = \tau_t + c_t$
  - Treba vyriešiť:

$$\min_{\tau_t} \sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2 + \lambda * \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2$$

- Intepretácia:
  - $\sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2$  :
  - $\lambda * \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2$  : Penalizácia za zmeny-nerovnosti
- Citlivosť trendu na krátkodobé fluktuácie sa nastavuje parametrom  $\lambda$ , väčšie hodnota vedie k hladšiemu trendu
- [Hodrick and Prescott, 1997] navrhli:  $\lambda = 100 * (\text{pocet period v roku})^2$



HP filter: Medzera výstupu (% trendu).



# Section 4

## Kalmanov filter

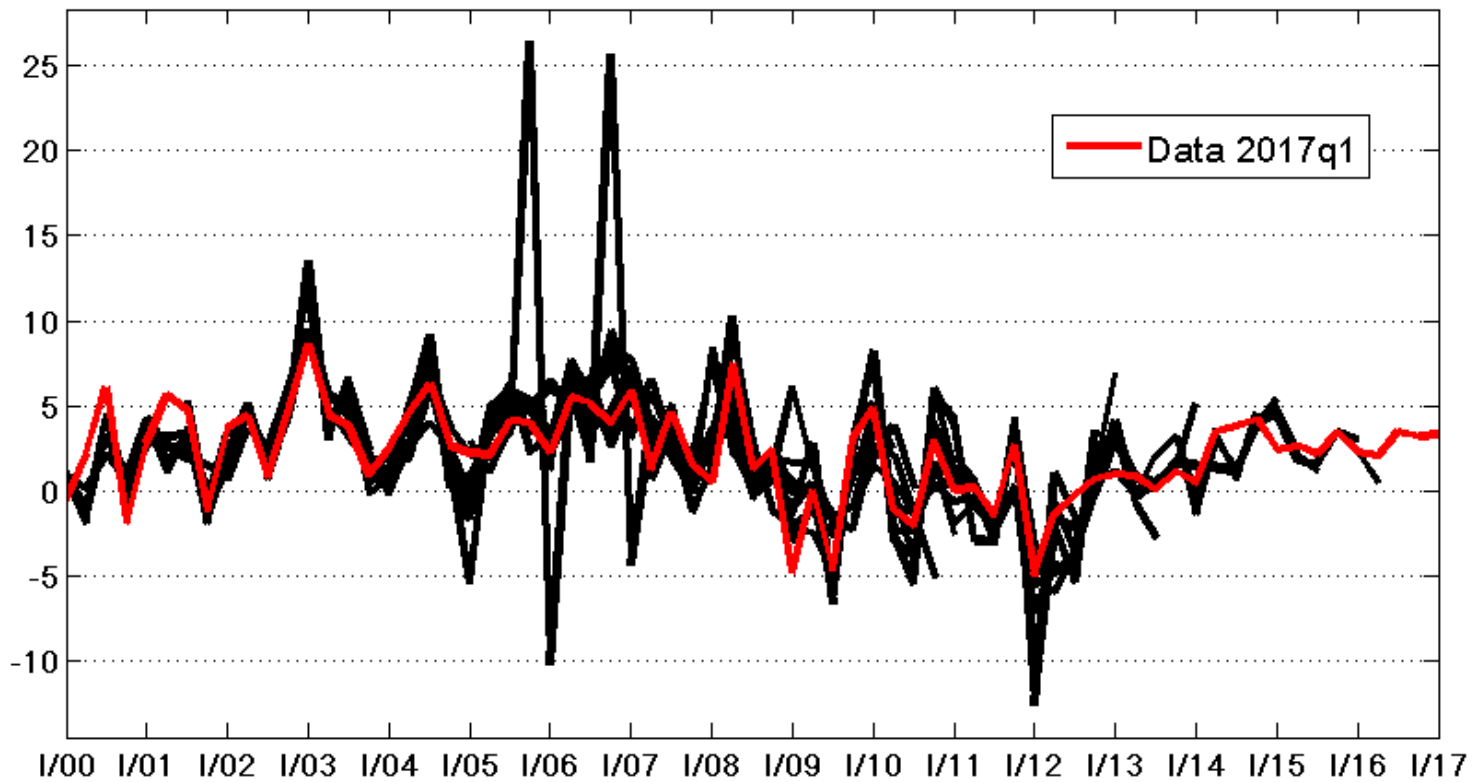
## Vztah k ekonomii?

	Fyzika	Ekonomia
Predmet záujmu:	Pohybujúce sa častice	Hospodárske cykly
Model:	Pohybové zákony	DSGEs, DFM, VARs
Dáta:	Detektory	Štatistický úrad
Nepozorované premenné:	Pozície častí	Medzera výstupu

- Ekonomiku popisujúce dáta sú často revidované: **Chyby meraní**
- Predikcia v stavovom systéme je ekvivaletná k aplikácii Kalmanovho filtra na chýbajúce pozorovania.



## Real Consumption Growth (QoQ)



- **Rudolf Emil Kálmán:** 1930 – 2016
- Vzdelanie: Bc. (1953) and M.A. (1954) MIT v elektroinžinierstve  
Phd. (1957) Columbia University
- Výskumník: Research Institute for Advanced Study, Baltimore, (1958-1964)  
Profesor: Stanford University, (1964–1971)  
Riaditeľ: Center for Mathematical System Theory, University of Florida, Gainesville (1971–1992)
- Ocenenia: IEEE Medal of Honor (1974), IEEE Centennial Medal (1984), The Inamori foundation's Kyoto Prize in High Technology (1985), Steele Prize of the American Mathematical Society (1987), Bellman Prize (1997)  
2009 - National Medal of Science



Lineárne dynamické systémy sa dajú zapísať vo forme stavového modelu:

- Blok pozorovaní:

$$z_t = Hx_t + v_t,$$

$$E(v_t v_t') = R$$

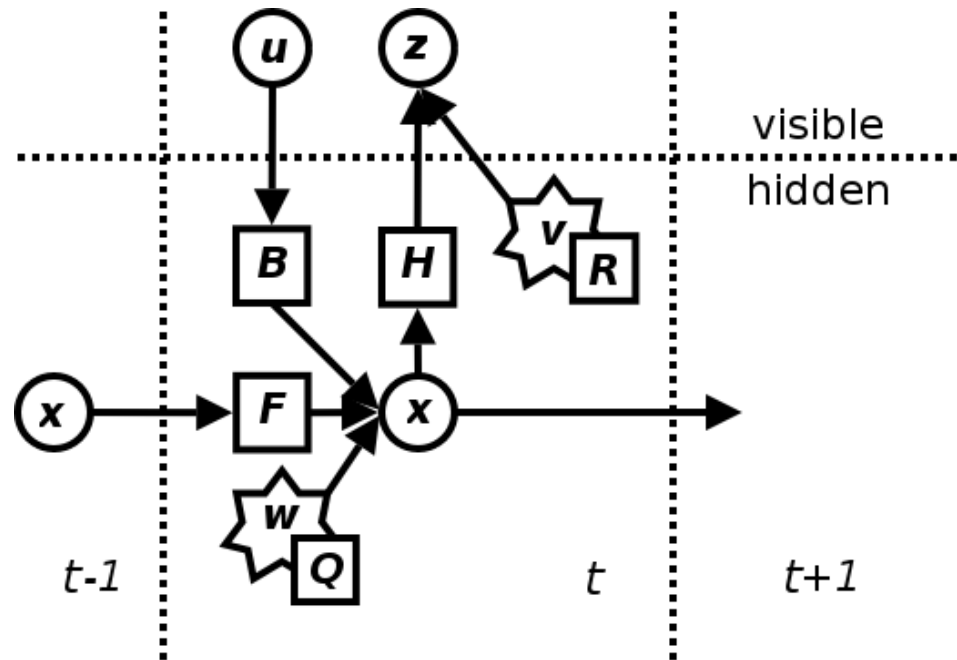
- Blok stavov:

$$x_t = Fx_{t-1} + Bu_t + w_t,$$

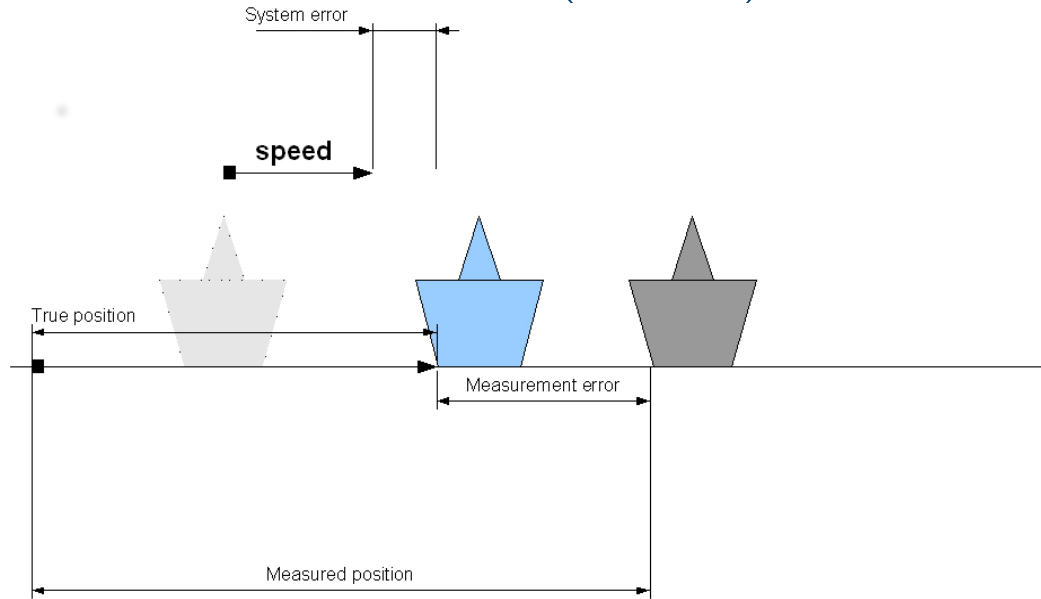
$$E(w_t w_t') = Q$$

- $x_t$  ...vektor stavov (transition variables)  
 $z_t$  ...vektor pozorovani (measurement variables)  
 $u_t$  ...vektor exogénnych premenných  
 $v_t$  ... štrukturálne šoky a  $w_t$  chyby meraní
- [Kalman, 1960] a [Harvey, 1991]

- $F$  je model zmeny stavov
- $B$  je model exogénneho vplyvu
- $H$  je model meraní
- $w$  je šok v systéme
- $z$  je pozorovanie/meranie
- $v$  je chyba meraní



## 1. Lod' na rozbúrenom mori (priamka)



2. Navigácia poskytne meranie:  $z_t = x_t + v_t$ , kde  $v_t$  je chyba merania
3. Model pre pozíciu lode v čase  $t$ :  $x_{t-1}$  je pozícia na priamke a  $c$  je rýchlosť lode  
chybou systému  $w_t$

$$x_t = x_{t-1} + c + w_t$$

4. From position estimate  $\hat{x}_{t-1}$  at  $t - 1$ , with uncertainty  $\sigma_{t-1}^2$

1. **a priori odhad:** odhad pozície je  $\hat{x}_t^- = \hat{x}_{t-1} + c$ , s neistotou  $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + \sigma_w^2$
2. Odhad skúsime vylepšiť údajmi z navigácie
3. **a posteriori estimate:** zmeráme  $z_t$ , a nový odhad pozície zostrojíme ako vážený priemer *a priori odhadu* a merania:  $\hat{x}_t^+ = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_{t-1}^2} \hat{x}_t^- + \frac{\sigma_t^2}{\sigma_v^2 + \sigma_{t-1}^2} z_t$ ,

- Neistota spojená s *a posteriori odhadom*:  $\sigma_t^{+2} = \frac{\sigma_t^2 \sigma_v^2}{\sigma_t^2 + \sigma_v^2}$
- Aj nepresné meranie znižuje neistotu:

$$\frac{\sigma_t^2 \sigma_v^2}{\sigma_t^2 + \sigma_v^2} < \sigma_t^2$$

- *a posteriori odhad* sa dá rozpísať:

$$\hat{x}_t^+ = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - \hat{x}_t^-)$$

and  $\sigma_t^{+2} = (1 - K_t)\sigma_t^2$ , where  $K_t = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2 + \sigma_v^2}$

- Kalman gain: optimálny odhad váhy merania

# Section 5

## Prognóza ČNB

- Predikcie ČNB sú postavené na jadrovom modeli
  - DSGE model - [Andrle et al., 2009]
  - Model otvorenej ekonomiky
  - Zložky HDP
  - Endogénna menová politika
- Doplnujúce informácie z krátkodobej prognózy: Analýza dát, jednorovnicové regresie, VAR modely, faktorové modely
- Predikčné kolo:
  1. Počkáme si na nové dáta: Chýbajúce dát doplníme pomocou krátkodobej prognózy
  2. Identifikácia počiatočných podmienok
  3. Predpoklady podmienenej prognózy: Výhľady zahraničia, regulovaných cien, vládnej spotreby
  4. Odhadneme podmienené trajektórie prognózy
  5. Dáme si pauzu a o 6 týždňov začmeme znovu



[Varian, 2016]: How To Build An Economic Model In Your Spare Time

1. Začni nápadom: Problém je dobrá myšlienka
2. Je táto myšlienka zaujímavá?
3. Varian varuje pred študentov pred rýchlym prehľadávaním literatúry:
4. Zamysli sa nad modelom: Skontroluj ho a zovšeobecni
5. Urob seminár



František Brázdík

Analytik

Česká národní banka

Na Příkopě 28

115 03 Praha 1






Czech Republic



Telefon:

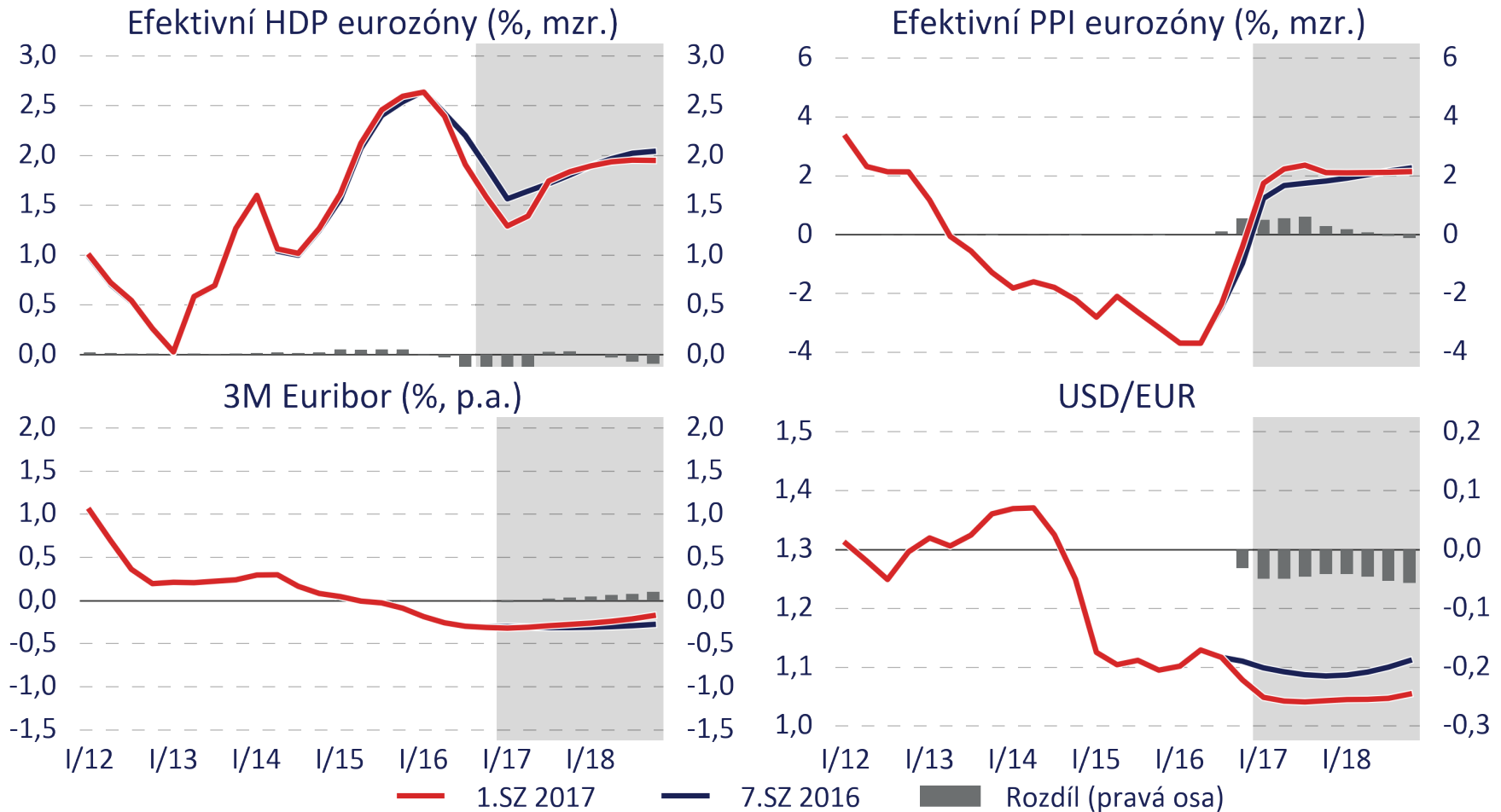
+420 22441 4308

Email:

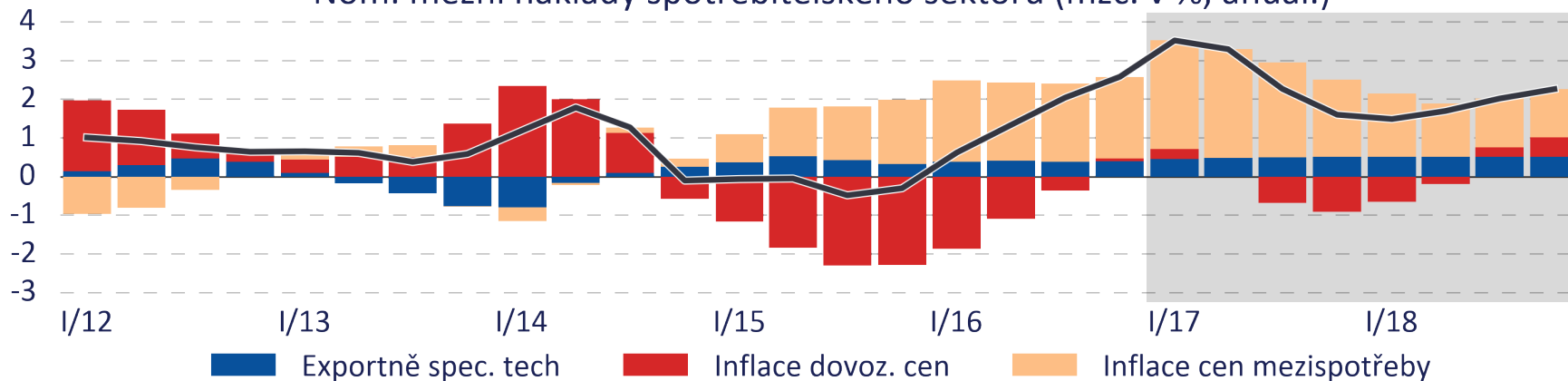
[frantisek.brazdik@cnb.cz](mailto:frantisek.brazdik@cnb.cz)

-  Andrlé, M., Hledík, T., Kameník, O., and Vlček, J. (2009).  
Implementing the new structural model of the Czech National Bank.  
*Working Papers 2009/2*, Czech National Bank, Research Department.
-  Harvey, A. C. (1991).  
*Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*.  
Cambridge University Press.
-  Hodrick, R. J. and Prescott, E. C. (1997).  
Postwar u.s. business cycles: An empirical investigation.  
*Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1):1–16.
-  Kalman, R. E. (1960).  
A new approach to linear filtering and prediction problems.  
*Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45.
-  Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2012).  
*Recursive Macroeconomic Theory* (MIT Press).  
The MIT Press.

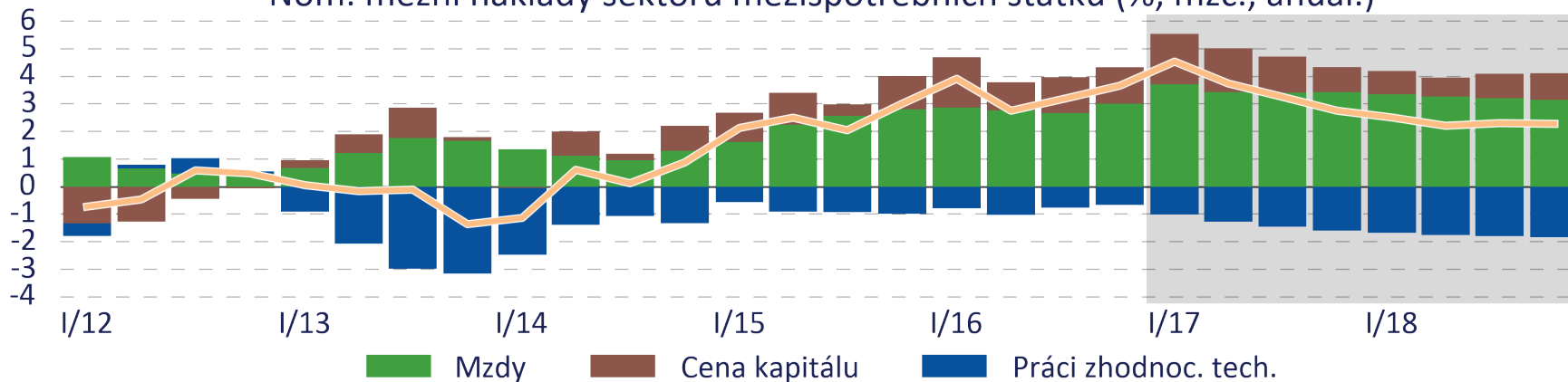
-  Sargent, T. J. (1987).  
*Dynamic Macroeconomic Theory*.  
Harvard University Press.
-  Varian, H. R. (2016).  
How to build an economic model in your spare time.  
*The American Economist*, 61(1):81–90.



## Nom. mezní náklady spotřebitelského sektoru (mzč. v %, anual.)



## Nom. mezní náklady sektoru mezispotřebních statků (% , mzč., anual.)



## Nom. Wage Growth (QoQ)

