36. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Poděbrady, 21. až 25. 8. 2015

Praha 2015

Recenzovali: J. Bečvář, M. Bečvářová, E. Gruszczyk-Kolczyńska, Z. Halas, M. Hykšová, M. Melcer, J. Rataj, A. Slavík, I. Sýkorová, M. Šimša, D. Trkovská, J. Veselý, R. Wolak

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě, elektronické nebo mechanické, včetně fotokopií, bez písemného souhlasu vydavatele.

© J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.), 2015
© MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2015

ISBN 978-80-7378-297-9

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty tří vyzvaných přednášek, texty delších a kratších sdělení, které programový výbor obdržel do 1. května 2015. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny.[1] Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili do 1. června 2015.

V první části sborníku jsou otištěny rozšířené texty hlavních přednášek, o něž byli požádáni přednášející, kteří se dlouhodobě zabývají matematikou, její historií, vyučováním a aplikacemi.

Ve druhé části sborníku jsou publikovány příspěvky jednotlivých účastníků, které nejsou monotematicky zaměřeny, neboť konference se snaží poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*, studentům i všem dalším zájemcům o matematiku a její historii.

Program letošní konference je poměrně pestrý. Věříme, že každý najde témata, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a svému studiu.

Informace o letošní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Martina Bečvářová a *Jindřich Bečvář*

V Praze, v červnu 2015

[1] Jednotlivé příspěvky byly řádně recenzovány, neprošly však jazykovou korekturou.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- **Bálint Vojtech**
- **Bálintová Anna**
- **Bálintová Dagmar**
- **Baštinec Jaromír**
- **Bečvář Jindřich**
- **Bečvářová Martina**
- **Boháč Pavel**
- **Ciesielska Danuta**
- **Čižmár Ján**
- **Domoradzki Stanisław**
- **Durnová Helena**
- **Halas Zdeněk**
- **Hykšová Magdalena**
- **Kalousová Anna**
- **Koudela Libor**
- **Landsman Bohumil**
- **Lengyelfalusy Tomáš**
- **Melcer Martin**
- **Mészárosová Katarína**
- **Netuka Ivan**
- **Otavová Miroslava**
- **Pajerová Nikola**
- **Pelantová Edita**
- **Pogoda Zdzisław**
- **Riečan Beloslav**
- **Riečanová Eva**
- **Slavík Antonín**
- **Sýkorová Irena**
- **Štěpánová Martina**
- **Trkovská Dana**
- **Ulrychová Eva**
- **Vacková Petra**
- **Vacková Věra**
- **Vízek Lukáš**
- **Vošický Zdeněk**
- **Zamboj Michal**
- **Zeman Jan**
- **Zuzáková Jana**

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

Čižmár J.: ***Výchova učitel'ov matematiky na Slovensku v období 1945–2010***
Domoradzki S.: ***Kamienie milowe w nauczaniu matematyki dzieci w Polsce od ostatnich dekad XIX stulecia do ostatnich dekad XX w.***
Slavík A.: ***O některých klasických nerovnostech***

II. Konferenční vystoupení

Bálint V.: ***Bola raz jedna konferencia ...***
Bálintová A.: ***Príbeh arabských mozaík***
Bečvář J.: ***Gramovy matice a determinanty***
Bečvářová M.: ***„Akreditace“ matematiky před 77 lety***
Boháč P.: ***Kruhová inverze v Newtonově Optice***
Ciesielska D., Pogoda Z.: ***Metoda współrzędnych w geometrii rzutowej***
Durnová H.: ***Teorie pravděpodobnosti a mravní záležitosti dle Jakuba Bernoulliho***
Kalousová A.: ***Fermatova metoda maxim a minim***
Koudela L.: ***Mikuláš Kusánský a kvadratura kruhu***
Mészárosová K.: ***Benoit Mandelbrot a jeho fraktálna geometria***
Netuka I.: ***Zobecněné limity***
Otavová M.: ***Podivná tvář geometrie u Jana Caramuela z Lobkovic***
Riečan B.: ***Tibor Neubrunn a slovenská škola teórie miery***
Štěpánová M.: ***Hans Schneider (1927–2014)***
Zeman J.: ***Bolzanova matematická vylepšení***

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 21. 8. 2015

Dopolední program 10:30–12:00
Zahájení konference
Plenární přednáška:
Čižmár J.: *Výchova učitel'ov matematiky na Slovensku v období 1945–2010*

Odpolední program 14:00–16:00
Konferenční vystoupení:
Bečvářová M.: *„Akreditace" matematiky před 77 lety*
Bečvář J.: *Gramovy matice a determinanty*

Odpolední program 16:30–18:00
Konferenční vystoupení:
Netuka I.: *Zobecněné limity*

Sobota 22. 8. 2015

Dopolední program 9:15–10:30
Konferenční vystoupení:
Mészárosová K.: *Benoit Mandelbrot a jeho fraktálna geometria*
Bálintová A.: *Príbeh arabských mozaík*

Dopolední program 11:00–12:00
Plenární přednáška:
Domoradzki S.: *Kamienie milowe w nauczaniu matematyki dzieci w Polsce od ostatnich dekad XIX stulecia do ostatnich dekad XX w.*

Odpolední program 14:00–16:00
Konferenční vystoupení:
Bálint V.: *Bola raz jedna konferencia ...*
Diskuse o současném stavu a směřování naší historie matematiky

Odpolední program 16:30–18:00
Osm desetiletí Jána Čižmára

Neděle 23. 8. 2015

Dopolední program 9:15–10:30
Konferenční vystoupení:
Durnová H.: *Teorie pravděpodobnosti a mravní záležitosti dle Jakuba Bernoulliho*
Koudela L.: *Mikuláš Kusánský a kvadratura kruhu*

Dopolední program 11:00–12:00
Plenární přednáška:
Slavík J.: *O některých klasických nerovnostech*

Pondělí 24. 8. 2015

Dopolední program 10:00–12:00
Konferenční vystoupení:
Otavová M.: *Podivná tvář geometrie u Jana Caramuela z Lobkovic*
Boháč P. *Kruhová inverze v Newtonově Optice*

Odpolední program 14:00–16:00
Konferenční vystoupení:
Riečan B.: *Tibor Neubrunn a slovenská škola teórie miery*
Štěpánová M.: *Hans Schneider (1927–2014)*

Odpolední program 16:30–17:30
Konferenční vystoupení:
Ciesielska D., Pogoda Z.: *Metoda współrzędnych w geometrii rzutowej*

Úterý 25. 8. 2015

Dopolední program 9:00–11:00
Konferenční vystoupení:
Kalousová A.: *Fermatova metoda maxim a minim*
Zeman J.: *Bolzanova matematická vylepšení*
Zakončení

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

VÝCHOVA UČITEĽOV MATEMATIKY NA SLOVENSKU V OBDOBÍ 1945–2010

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: This paper describes the system of secondary school teachers's training at the territory of Slovakia in the period 1945–2010. It presents the origin and development of the university institutions providing this training in the framework of substantial social and legislative changes from the World War Second to nowadays.

1 Úvod

Do r. 1940 neexistovali na území Slovenska inštitúcie, ktoré by poskytovali možnosť vzdelávania a výchovy v slovenskom jazyku budúcich profesorov matematiky pre potreby gymnázií, reálnych gymnázií, reálok, učiteľských ústavov a stredných odborných škôl. Záujemcovia zo Slovenska o prípravu na túto profesiu mali jedinú možnosť absolvovať štúdium za účelom získania potrebnej kvalifikácie v rámci medzivojnovej Československej republiky (1918–1939) na prírodovedeckých fakultách Univerzity Karlovej v Prahe alebo Masarykovej univerzity v Brne. Prví absolventi tohto štúdia pochádzajúci zo Slovenska vychádzali z týchto univerzít v druhej polovici 20. rokov a v 30. rokoch 20. storočia. Ich počet bol vzhľadom na potreby stredných škôl na Slovensku zanedbateľný, a tak hlavná ťarcha výučby matematiky na týchto školách naďalej spočívala na profesoroch českej národnosti, ktorí prišli na Slovensko v prvých rokoch existencie nového štátu. Značná časť slovenských absolventov učiteľského štúdia matematiky vracajúca sa na Slovensko reprezentovala vyššiu kvalitu, ktorá sa v prvej etape po 2. svetovej vojne veľmi pozitívne prejavila pri zakladaní vysokoškolských a vedeckých inštitúcií na Slovensku.

Zdĺhavý zápas o zriadenie prírodovedeckej fakulty na Univerzite Komenského v Bratislave, deklarované už v zakladajúcom zákone univerzity z r. 1919, nebol z mnohých príčin úspešný. Ani rozpad a zánik republiky nebol v prvej fáze dostatočným popudom k urýchlenému založeniu fakulty. Až tragické novembrové udalosti r. 1939 v Prahe a následná barbarská likvidácia českého vysokého školstva nemeckou okupačnou mocou spolu s vynúteným návratom slovenských vysokoškolských študentov z českých krajín do vlasti postavili kompetentné slovenské orgány pred naliehavú úlohu neodkladne riešiť problém pokračovania navrátilcov v štúdiu. Vládnym nariadením č. 180/1939 Zbierky zákonov a nariadení bol týmto študentom povolený zápis na prírodovedné odbory na Filozofickej fakulte Slovenskej univerzity (pomenovanie Univerzity Komenského v rokoch 1939–1954) už do zimného semestra školského roku 1939/1940. Výučbu matematických predmetov zabezpečovali učitelia Slovenskej vysokej školy technickej (SVŠT) v Bratislave: riadny profesor RNDr. Jur Hronec a mimoriadny profesor PhDr. Josef Kaucký (pozri [7]). Na situácii sa reálne nič nezmenilo ani po otvorení Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity 1. októbra 1940, zriadenej na základe zákona č. 168/1940 Zb. z. a n. Formálnou zmenou bolo vymenovanie oboch profesorov matematiky za bezplatných profesorov Prírodovedeckej fakulty SU popri ich plnom platenom zamestnaní na SVŠT (pozri [2]).

Výučba matematických predmetov v odbore učiteľstvo matematiky pre stredné školy prebiehala v akomsi núdzovom režime, ktorého jadro tvorili predmety *Matematika I–III* v prvých troch semestroch štúdia s dotáciou 6 – 6 – 5 týždenných hodín prednášok doplnených 2 hodinami cvičení a 2 hodinami proseminára. Od štvrtého semestra pribúdali namiesto predmetov *Matematika I–III*, ktoré adepti učiteľstva matematiky absolvovali spolu s poslucháčmi technických odborov, špecializované odborné predmety v rozsahu 2–4 týždenných hodín v jednom semestri: *Teória čísel, Analytická geometria, Diferenciálna geometria, Teória funkcií komplexnej premennej* a *Nekonečné rady.* Výučba bola dopĺňaná seminármi a proseminármi v rozsahu dvoch týždenných hodín za semester (pozri [11]).

Takéto štúdium učiteľstva matematiky pre stredné školy v kombinácii s ďalším predmetom (fyzika, deskriptívna geometria, krátky čas aj chémia) na Prírodovedeckej fakulte SU bolo až do školského roku 1946/1947 vrátane jedinou inštitucionalizovanou formou kvalifikovanej profesijnej prípravy budúcich stredoškolských profesorov matematiky na Slovensku. Štúdium učiteľstva matematiky pre stredné školy absolvovalo v priemere 5 poslucháčov ročne. Učiteľský zbor sa vyznačoval relatívnou stabilitou: kľúčovými osobnosťami matematického vzdelávania boli po celý sledovaný čas prof. J. Hronec a prof. J. Kaucký ako kmeňoví zamestnanci SVŠT a od 1. 10. 1944 aj ako bezplatní profesori novovytvoreného Ústavu matematiky Prírodovedeckej fakulty SU. Na ústav pribudli ako zamestnanci Prírodovedeckej fakulty SU dvaja asistenti z radov absolventov a niektoré výberové predmety prednášal RNDr. Štefan Schwarz, kým nebol na jeseň 1944 internovaný a deportovaný. Zriadenie matematického ústavu na PF SU okrem pridelenia určitých priestorov na umiestnenie osôb a zariadenia neprinieslo žiadne podstatné zmeny v materiálnom i personálnom zabezpečení výučby matematiky na prírodovedeckej fakulte. Osobitne personálna jednota a „dvojdomosť" učiteľského zboru ústavov matematiky na SVŠT a na PF SU pretrvávala prakticky až do r. 1950, keď koniec tohto stavu vynútil nový vysokoškolský zákon.

2 Legislatívny rámec rozvoja vysokých škôl 1945–2010

Charakteristiku jednotlivých etáp vývoja vysokého školstva na Slovensku a v celom Československu v sledovanom vyše šesťdesiatročnom období v hlavných rysoch načrtávajú základné zákony o vysokých školách od r. 1945 do r. 2002 a v detailoch dotvárajú nespočetné novelizácie, vyhlášky, výnosy a nariadenia ministerstiev – do kompetencie ktorých spadalo školstvo, špeciálne vysoké – týkajúce sa organizácie školstva, náplne vzdelávania a materiálneho zabezpečenia. Všetky tieto dokumenty odrážali prirodzeným spôsobom – príznačným pre úlohu a fungovanie štátnej moci prinajmenšom od čias osvietenstva – ideologické, politické a spoločenské zámery panujúcich režimov v oblasti vysokoškolského vzdelávania a výchovy.

Najzávažnejšiu úlohu v tomto smere zohrali nasledovné legislatívne dokumenty (pozri [10]):

- Dekrét prezidenta republiky zo dňa 27. októbra 1945 (čiastka 32/1945 Zb. z. a n.) o vzdelaní učiteľstva,
- Zákon o pedagogických fakultách zo dňa 9. apríla 1946 (čiastka 100/1946 Zb. z. a n.),
- Zákon o vysokých školách zo dňa 18. mája 1950 (čiastka 58/1950 Zb. z.),
- Zákon o školskej sústave a vzdelávaní učiteľov z r. 1953 (čiastka 31/1953 Zb. z.),
- Zákon o vysokých školách z r. 1966 (čiastka 19/1966 Zb. z.),
- Ústavný zákon o československej vzdelávacej sústave (čiastka 62/1978 Zb. z.),
- Zákon o vysokých školách z r. 1980 (čiastka 39/1980 Zb. z.),
- Zákon o vysokých školách z r. 1990 (čiastka 172/1990 Zb. z.),
- Zákon o vysokých školách z 21. februára 2002 (čiastka 131/2002 Zb. z.).

Každý z uvedených zákonov výrazne ovplyvnil základné smerovanie vysokých škôl v duchu aktuálnej štátnej ideológie, podľa dobových zámerov – nie vždy objektívnych a vecne podložených – reglementoval stroho či voľnejšie vnútornú štruktúru základných organizačných jednotiek vysokých škôl, predpisoval rámcovo alebo značne detailne obsah výučby, štruktúru organizácie vzdelávania, samosprávne orgány vysokých škôl a ich zložiek, práva i povinnosti študujúcich i učiteľov atď., predovšetkým však jasne formuloval základné a hlavné ciele vysokoškolského vzdelávania, v čom sa najzreteľnejšie a najpregnantnejšie odrážala ideologická povaha štátu a právne pretenzie štátneho dirigizmu. Uvedené zákonné dokumenty na jednej strane zakotvujú tie stránky dosiahnutého stavu, ktoré sú z pohľadu štátu hodnotené ako pozitívne a žiaduce, na druhej strane formulujú ciele, úlohy a opatrenia, ktorých úspešná realizácia má zabezpečiť všestranný progresíny rozvoj v smere prospešných celospoločenských záujmov. Práve táto stránka školských a špeciálne vysokoškolských zákonov občas prekročila hranice triezveho posudzovania a realizačných možností najmä v ekonomickom zabezpečení a proklamovala ako bezprostredné ciele výsledky, ktorých dosiahnutie mohlo byť len métou časovo vzdialenej perspektívy. Napr. takým opatrením malo byť povinné vysokoškolské vzdelanie učiteľov všetkých typov a stupňov škôl školskej sústavy – od materských škôl až po vyššie stredné školy – proklamované už v prezidentskom školskom dekréte z r. 1945. Trvalo vyše pätnásť rokov, kým sa tento princíp naplnil pre prípravu učiteľov primárnych škôl, a v prípade učiteliek materských škôl trvala cesta k jeho realizácii ešte aspoň o jednu generáciu dlhšie. Vo víťaznej eufórii po skončení 2. svetovej vojny – aj pod tlakom vplyvných spoločensko-politických síl – videla časť verejnosti, osobitne početná vrstva pokrokových učiteľov, tento akt ako úspešné zavŕšenie zápasu, do ktorého najprogresívnejší predstavitelia učiteľskej komunity vstupovali svojimi projektmi a realizačnými experimentmi v Československej republike už okolo r. 1930.

Z hľadiska akceptácie zásady potreby vysokoškolského vzdelania všetkých učiteľov – i keď opäť viac na úrovni deklarácie než na možnosti dôslednej realizácie – možno za prelomový akt považovať prijatie zákona o zriadení pedagogických fakúlt r. 1946. Zákon a naň nadväzujúce ďalšie právne normy boli v svojej podstate konkretizáciou všeobecne deklaratívneho znenia prezidentského dekrétu. Základnou ideou motivujúcou zriadenie pedagogických fakúlt bola snaha sústrediť roztrieštenú prípravu učiteľstva pre všetky typy a stupne škôl na jedno vysokoškolské pracovisko, ktoré by v plnom rozsahu zabezpečovalo jednotnú psychologickú, pedagogickú a didaktickú teoretickú aj praktickú prípravu, v odbornej zložke prípravy zabezpečiť štúdium odborov predtým rozptýlených na mimouniverzitných pracoviskách a podľa kvalifikácie učiteľských kádrov poskytnúť aj možnosť štúdia s nižšou kvalifikáciou v tých odboroch, v ktorých sa učitelská kvalifikácia pre vyšší stupeň stredných všeobecnovzdelávacích škôl, pre učitelské ústavy a stredné odborné školy získavala na filozofických a prírodovedeckých fakultách. Ako ďalšie dôležité poslanie sa pedagogickým fakultám ukladala úloha organizovať výučbu a praktickú prípravu aktívnych učiteľov s nedostatočnou alebo neúplnou kvalifikáciou, resp. učiteľov bez kvalifikácie.

Rozhodujúcim krokom k zmene tradíciou ustáleného charakteru vysokého školstva a k jeho organizačnému i obsahovému priblíženiu k sovietskemu vzoru bolo prijatie zákona o vysokých školách r. 1950. Tento právny akt bol dôsledkom radikálnych mocensko-politických zmien po februárovom zvrate r. 1948 a následných udalostiach, ktoré sa na vysokých školách najvýraznejšie prejavili politickými čistkami v učiteľských zboroch i v radoch študentov. Ústrednou ideou zákona je tuhý štátny dirigizmus, krajná centralizácia riadenia v organizácii aj v obsahu vzdelávania. Novými prvkami systému je nahradenie ústavov katedrami a zavedenie študijných plánov a učebných osnov. Zákon zrušil rigorózne konanie ako podklad udeľovania akademického titulu *doktor*, rámcovo vymedzil zavedenie ašpirantúry ako nadstavbovej formy výchovy vedeckých kádrov a udeľovanie dvoch stupňov vedeckých hodností podľa sovietskeho vzoru. Definitívna realizácia týchto opatrení vstúpila do platnosti r. 1953.

Zákon bol novelizovaný r. 1956 ako prejav mocenskej reakcie na študentské nepokoje, ktoré boli súčasťou oneskoreného mierneho politického uvoľnenia po Stalinovej smrti r. 1953.

V histórii vysokoškolskej legislatívy sa nedoceňuje význam zákona o školskej sústave a vzdelávaní učiteľov z r. 1953, ktorým sa zaviedla osemročná *stredná* škola a jedenásťročná *stredná* škola ako *úplná* stredná všeobecnovzdelávacia škola. Panuje vcelku neúplná a nejasná informovanosť, že štvorročné vysoké školy pedagogické, resp. dvojročné vyššie pedagogické školy vznikli ako špecifické vysokoškolské inštitúcie zamerané na prípravu odborných učiteľov plne kvalifikovaných pre 3., resp. 2. stupeň jedenásťročnej strednej školy, keď jej prvý stupeň predstavovala národná škola s učiteľmi pripravovanými v stredných pedagogických školách.

Zákon o vysokých školách z r. 1966 mal priniesť zmeny, ktoré boli výrazom spoločensko-politického uvoľnenia v prvej polovici 60. rokov 20. storočia temer vo všetkých satelitných krajinách sovietskeho bloku. Zákon obnovil niektoré – viac-menej formálne – vysokoškolské tradície predsocialistickej éry, akou bolo napr. udeľovanie akademického titulu *doktor* na báze vypracovania a obhájenia rigoróznej práce a úspešného zloženia rigoróznych skúšok. Nepriniesol však návrat k skutočným demokratickým tradíciám obnovením inštitúcie akademického senátu s jeho právomocami pri výbere akademických funkcionárov a s vplyvom na všetky stránky činnosti vysokých škôl a fakúlt vrátane dosahu na hospodárenie rektorátnych a fakultných zložiek. Mierne sa uvoľnil nadmerný centralizmus v oblasti vnútornej štruktúry a personálnej politiky fakúlt, kde sa napr. ustúpilo od zriaďovania katedier a obsadzovania miest vedúcich katedier rozhodovaním až na úrovni ministerstva, resp. povereníctva, ako tomu bolo podľa zákona z r. 1950. Náznaky demokracie boli po r. 1970 zlikvidované legislatívnymi opatreniami nižšej úrovne, ako aj početnými legislatívne nepodloženými internými praktikami, ktorými ovzdušie vysokých škôl zaťažoval tzv. proces normalizácie. Mal analogické, v začiatkoch dokonca podobne vyostrené prejavy a dôsledky ako v rokoch 1948–1949 kampaň politických čistiek na vysokých školách. V personálnej politike vysunul do popredia faktor politickej angažovanosti na úkor odbornej kvalifikácie.

V prvej polovici 70. rokov sa viedla dlhodobá kampaň vrcholiaca r. 1976 prijatím programového politického dokumentu *Ďalší rozvoj československej výchovnovzdelávacej sústavy* a naň nadväzujúceho ústavného zákona o československej výchovnovzdelávacej sústave (čiastka 62/1978 Zb. z.), ako aj ďalších zákonov týkajúcich sa jednotlivých zložiek výchovnovzdelávacej sústavy. Do tejto série zapadá aj nový zákon o vysokých školách č. 39 z r. 1980. Výraznou črtou naň nadväzujúcich opatrení je celoštátna unifikácia študijných odborov a vypracovanie jednotných študijných plánov a učebných osnov predmetov v zhodných a blízkych študijných odboroch. V oblasti organizácie vysokého školstva je najmarkantnejšou inováciou zjednotenie aprobácie absolventov pedagogických fakúlt a absolventov učiteľského štúdia rovnomenných odborov na filozofických, prírodovedeckých a matematicko-fyzikálnych fakultách univerzít pre 2. stupeň základných škôl a pre stredné školy, čo pre absolventov pedagogických fakúlt znamená rozšírenie ich aprobácie o oprávnenie pôsobiť aj na stredných školách; toto oprávnenie predchádzajúce vysokoškolské zákony nepriznávali. Podľa ustanovení tohto zákona a súvisiacich dokumentov sa v prvej polovici 80. rokov rozvinula činnosť mnohých odborových komisií a predmetových rád s cieľom pripraviť podrobný text unifikácie učebných plánov a učebných osnov jednotnej nomenklatúry odborov a špecializácií vysokoškolského štúdia.

Unikátnym ustanovením zákona bolo zavedenie rigoróznych skúšok bez povinnosti vypracovať a obhájiť rigoróznu prácu a priznávanie akademického titulu *doktor* absoventom univerzitných odborov bez akéhokoľvek rigorózneho konania pri dosiahnutí priemerného prospechu za celé štúdium do hodnoty 1,5.

Zákony o vysokých školách z r. 1990 a 2002, prijaté po globálnych mocenskopolitických zmenách v rokoch 1989–1990 a po zvrate vnútornej i zahraničnej politickej orientácie štátu, resp. od roku 1993 po vzniku dvoch nových samostatných štátov, odrážajú v oblasti vnútornej organizácie a samosprávy vysokých škôl rešpektovanie osvedčených historických tradícií európskeho, špeciálne stredoeurópskeho vysokého školstva, a vcelkovej organizácii vzdelávania prijímajú celoeurópske, resp. celosvetové štandardy odvodené z dokumentov zakladajúcich istú globálnu unifikáciu svetového vysokého školstva. Pri kritickom pohľade na túto tendenciu, ako aj na dianie v Európskej únii v oblasti školstva, nemožno sa zbaviť istých výhrad voči miere byrokracie v celej mašinérii kontaktov a spolupráce. Nesporným prínosom posledného štvrťstoročia je uvoľnenie podmienok v oblasti medzinárodných stykov a vytváranie priaznivejších predpokladov medzinárodnej koordinácie. Trvalo limitujúcim faktorom je ekonomická situácia značne sťažená dôsledkami rozsiahlej krízy v posledných rokoch.

3 Inštitúcie vysokoškolského vzdelávania 1945–2010

Podľa stručných informácií v úvode jedinou formou vysokoškolskej prípravy stredoškolských profesorov matematiky na Slovensku od r. 1940 do r. 1947 a reálne až do r. 1953 bolo interné, resp. externé štúdium učiteľstva matematiky pre stredné školy v rámci Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave. O obsahu a organizácii tohto vzdelávania bola v úvode zmienka. Systém a organizácia štúdia, spôsob kontroly a hodnotenia, štátne skúšky, absolvovanie, rigorózny poriadok a i. siahali svojimi koreňmi do čias Rakúska-Uhorska a ich podstatu zásadne nezasiahli početné novelizácie a vládne nariadenia medzivojnovej Československej republiky ani vojnovej Slovenskej republiky.

Veľké očakávania sa spájali so zriadením Pedagogickej fakulty Slovenskej univerzity zákonom z r. 1946, ktorá však svoju činnosť v internom štúdiu v Bratislave reálne začala až v školskom roku 1947/1948 (pozri [1], [3]) Sídlo fakulty bolo so značnými ťažkosťami zriadené v Bratislave, za sídla pobočiek boli stanovené Banská Bystrica a Košice. Ďalšie konzultačné strediská boli otvorené v Nitre, Žiline, Spišskej Novej Vsi a Lučenci. Fakulta mala podľa deklarácie základného legislatívneho dokumentu – prezidentského dekrétu – právo otvoriť štúdium pre všetky kategórie učiteľov – od učiteliek materských škôl až po stredoškolských profesorov gymnázií a stredných odborných škôl, pričom dĺžka štúdia pre kandidátky učiteľstva na materských školách bola predpísaná na štyri semestre, pre kandidátov učiteľstva na vtedajších ľudových a meštianskych školách na šesť semestrov a pre kandidátov učiteľstva na stredných (všeobecnovzdelávacích) školách a na stredných odborných školách na osem až desať semestrov. Hlavnú, no explicitne nedeklarovanú úlohu mala fakulta zohrať v likvidácii alebo aspoň v podstatnom zmiernení enormnej nekvalifikovanosti učiteľstva v základnom školstve – na vtedajších ľudových a meštianskych školách – zapríčinenej najmä prudkým kvantitatívnym rastom škôl tohto druhu a v menšej miere odchodom jednotlivcov neúnosnou mierou skompromitovaných spoluprácou s režimom vojnovej Slovenskej republiky (1939–1945). Účinným opatrením zameraným na dosiahnutie toho cieľa malo byť masové zapojenie nekvalifikovaného učiteľstva týchto škôl do štúdia popri zamestnaní formou doplňovacieho a diaľkového štúdia realizovaného rozsiahlou výučbou v konzultačných strediskách. Vrcholne iluzórne predstavy o možnostiach tejto formy štúdia sa prejavili v študijných a skúškových predpisoch, ktoré sa ukázali navrhnutou časovou organizáciou a materiálnymi možnosťami školstva i učitelstva totálne nerealizovateľné. Toto hodnotenie je výrazne potvrdené faktom, že z vyše 12 000 poslucháčov zapísaných na toto štúdium ho úspešne absolvovalo necelých 5 % účastníkov. Úspešných absolventov z radov učiteľov matematiky bolo z toho počtu nanajvýš pár desiatok.

V internom trojročnom štúdiu s dvoj-, resp. trojpredmetovými kombináciami pre 2. stupeň povinnej školskej dochádzky, čo boli v čase reálneho rozbehu Pedagogickej fakulty SU meštianske školy a 1.–4. trieda gymnázia, od prijatia zákona o jednotnej škole r. 1948 štvorročné stredné školy (vek žiakov 11–15 rokov), tvorilo učiteľstvo matematiky kombinácie s učiteľstvom fyziky, zemepisu alebo deskriptívnej geometrie. V rokoch 1951–1953 úspešne absolvovalo štúdium v týchto kombináciách okolo troch desiatok učiteľov, ktorí našli uplatnenie väčšinou na gymnáziách – v tom čase už len švorročných, zodpovedajúcich niekdajším triedam 5.–8. osemročných gymnázií. Mnohí z týchto absolventov si doplnili štúdiom popri zamestnaní kvalifikáciu na úplnú aprobáciu stredoškolského profesora; rovnako postupovala aj značná časť absolventov z ročníkov dobiehajúceho štúdia pedagogickej fakulty v rokoch 1953–1955.

Štúdium učiteľstva matematiky na Pedagogickej fakulte SU bolo zabezpečené v rokoch 1947–1950 kvalitnými učiteľmi matematicko-geometrického ústavu a po reorganizácii v r. 1950 tými istými učiteľmi katedry matematiky a fyziky (prof. RNDr. Viktor Svitek, prof. RNDr. František Jurga, odborný asistent Karol Hlučil; niekoľko ďalších asistentov), ktorí boli pred nástupom na fakultu honorovanými docentmi Prírodovedeckej fakulty SU, resp. SVŠT, alebo cvičnými profesormi na gymnáziách, prípadne inšpektormi. Obsah vzdelávania zahŕňal tradičné okruhy predmetov – matematickú analýzu, algebru, analytickú geometriu, elementárnu geometriu, teoretickú aritmetiku, teóriu čísel, metodiku vyučovania matematiky, špeciálne semináre z matematiky. Praktická príprava sa konala na cvičných školách v Bratislave. Z koncepčných, časových aj personálnych príčin v učebných plánoch neboli zastúpené vyššie partie matematickej analýzy, vyššej geometrie a modernej algebry, ktoré sa v tom čase nenachádzali ani v učebnom programe matematického vzdelávania na Prírodovedeckej fakulte SU.

Pedagogická fakulta SU v Bratislave a jej pobočky boli zrušené r. 1953. Ich úlohu v príprave učiteľov pre školy 2. stupňa prevzali vyššie pedagogické školy v Bratislave (neskôr už v statuse pedagogického inštitútu premiestnená do Trnavy) a v Prešove, kam sa presťahovala bývalá pobočka bratislavskej pedagogickej fakulty sídliaca v Košiciach.

Rok 1953 bol rokom podstatných zmien v organizácii vysokoškolskej prípravy učiteľov škôl druhého a tretieho stupňa. Zákonom č. 31/1953 Zb. z. o školskej sústave a vzdelávaní učiteľov základná a stredná všeobecnovzdelávacia škola prechádzali totálne na sovietsky model, podľa ktorého 1. a 2. stupeň povinnej školskej dochádzky reprezentovala *osemročná stredná škola* (oficiálny názov) a úplnou strednou všeobecnovzdelávacou školou sa stala *jedenásťročná stredná škola* (oficiálny názov). Vzdelávanie učiteľov pre 1.–5. ročník základnej školy (oficiálny názov – *národná škola*) preberali štvorročné pedagogické školy pre prípravu učiteľov národných škôl (predtým pedagogické gymnáziá), výchova učiteľov pre 6.–8. ročník osemročnej strednej školy prebiehala na dvojročných vyšších pedagogických školách v Bratislave, Banskej Bystrici a Prešove a pre vzdelávanie učiteľov 9.–11. ročníka jedenásťročnej strednej školy a všeobecnovzdelávacích predmetov stredných odborných škôl (predtým stredoškolských profesorov) bol zriadený nový typ učilišťa – vysoká škola pedagogická v Bratislave s fakultou spoločenských vied, fakultou prírodných vied a filologickou fakultou alokovanou do Prešova (pozri ([5], [6]). Tieto školy boli deklarované ako jediné vzdelávacie inštitúcie zabezpečujúce výchovu kvalifikovaných učiteľov všeobecnovzdelávacích predmetov na 2. a 3. stupni vzdelávacej sústavy. Paralelné fakulty – filozofická fakulta a prírodovedecká fakulta v tom čase ešte stále jedinej univerzity na Slovensku – Slovenskej univerzity (od r. 1954 opäť Univerzity Komenského) – sa mali v päťročnom štúdiu venovať výchove odborníkov zameraných na vedeckú činnosť, aplikácie a odbornú prácu najvyššej kvalifikácie v rôznych oblastiach národného hospodárstva, základného a aplikačného výskumu, verejného života, kultúry ap. Bola to iluzórna predstava, ktorá aj po 10–15 rokoch mala ďaleko do realizovateľnosti. V r. 1953 reálne vyhliadky budúcich úspešných absolventov, nastupujúcich v tom čase na univerzitné štúdium, boli limitované aj faktom, že v tom roku vychádzali z gymnázií dva ročníky maturantov, z ktorých značná časť mala zámer pokračovať v budovaní kariéry vysokoškolským štúdiom.

Revízia unáhlených a nerealistických rozhodnutí nenechala na seba dlho čakať. V školskom roku 1955/1956 sa na univerzitných fakultách obnovilo prijímanie na štúdium učiteľstva pre 3. stupeň všeobecnovzdelávacích škôl a stredné odborné školy s maturitou a taktiež väčšina študentov prijatých v rokoch 1953 a 1954 na „vedecké“ štúdium si doplnením psychologicko-pedagogicko-metodickej zložky učiteľskej prípravy a absolvovaním tradičných odborných predmetov učiteľského štúdia rozšírila svoju odbornú kvalifikáciu o učiteľskú aprobáciu pre predmet matematika.

Na vyšších pedagogických školách boli v dvoj- a trojpredmetových kombináciách študijný program a učebné osnovy profilových predmetov oproti náplni na zrušených pedagogických fakultách v rozumnej miere zredukované tak, že absolvovanie školy ešte stále poskytovalo dostatočný odborný nadhľad nad učivom a pedagogicko-metodická zložka prípravy mala postačujúci rozsah a kvalitu. Najčastejším predmetom, s ktorým matematika vstupovala do dvojkombinácie, bola fyzika, čo sa z pohľadu obsahovej relácie predmetov i zo skúseností dlhodobej tradície osvedčovalo ako optimálne riešenie.

Vysoká škola pedagogická svojou koncepčnou požiadavkou vyváženosti predmetovo-odbornej a pedagogicko-metodickej zložky prípravy učiteľa vstupovala na pôdu v podmienkach nášho školstva neprebádanú v náležitom rozsahu, čo sa prejavilo v určitých korekciách ešte pred dokončením prvého cyklu štúdia. Študijný program, učebné plány, učebné osnovy jednotlivých predmetov, ako aj študijný a skúšobný poriadok vrátane štátnych záverečných skúšok boli starostlivo a detailne pripravené, učiteľský zbor, z veľkej časti prevedený zo zrušených pedagogických fakúlt a doplnený úspešnými a osvedčenými stredoškolskými profesormi z elitných gymnázií, bol zárukou odbornej i metodickej spoľahlivosti. Chýbali však zhodnotenie a výber pozitívnych skúseností z dlhodobej úspešnej praxe, ktorú vykazovali špičkové pedagogické inštitúty vtedajšieho Sovietskeho zväzu, a to nielen tie najvynikajúcejšie z najväčších miest.

Matematika sa na bratislavskej vysokej škole pedagogickej – jedinej na Slovensku – začala študovať ako jednopredmetový odbor alebo v kombinácii s fyzikou, v nasledujúcom školskom roku 1954/1955 pribudla kombinácia matematika – zemepis a poslednou zavedenou kombináciou bola matematika – chémia. V školskom roku 1955/1956 sa pôvodné jednopredmetové štúdium matematiky (na fakulte prírodných vied), slovenčiny a ruštiny (oboch predmetov na fakulte spoločenských vied) transformovalo na klasické dvojkombinácie, ktorými boli matematika – deskriptívna geometria a slovenčina – dejepis; kombinácia s ruštinou nebola striktne stanovená.

Vysoká škola pedagogická v Bratislave zanikla fúziou s Univerzitou Komenského k 1. septembru 1959. Štvorročným vzdelávacím cyklom v internom štúdiu prešlo na nej šesť ročníkov s prijímacím konaním v rokoch 1953–1958 a absolvovaním v rokoch 1957–1962. Na škole bolo organizované aj rozsiahle štúdium popri zamestnaní, ktorého poslední absolventi opúšťali školu (v tom čase už fyzicky neexistujúcu) r. 1965. Za uvedené roky fakulta prírodných vied len v dennom štúdiu vychovala vyše 400 úspešných absolventov učiteľského štúdia matematiky; v diaľkovom štúdiu bol počet absolventov tohto štúdia minimálne 6–7 desiatok. Na porovnanie: Prírodovedecká fakulta UK za 25 rokov svojej existencie v období 1940–1965 vyškolila súhrnne 330 učiteľov matematiky pre stredné školy. Prínos Vysokej školy pedagogickej v Bratislave k radikálnemu zvýšeniu kvalifikácie učiteľstva stredných škôl na Slovensku v období 1955–1965 nebol historiografiou školstva docenený. Aká je odpoveď na otázku: Čo bolo väčším omylom – zriadenie Vysokej školy pedagogickej alebo jej zrušenie?

Štafetu zrušených vyšších pedagogických škôl prevzali r. 1958 pedagogické inštitúty, zriadené vládnym nariadením č. 576/1959 Zb. z. v Trnave, Nitre, Martine, Banskej Bystrici, Košiciach a Prešove ako samostatné štvorročné vysoké školy s poslaním vychovávať v oddelených formách štúdia učiteľov 1. a 2. stupňa základnej osemročnej (od r. 1960 deväťročnej) školy a poskytovať v rôznych formách štúdia a v kurzoch pedagogické vzdelanie pre nadobudnutie kvalifikácie vychovávateľa, učiteľa odborných predmetov v odborných učilištiach a učňovských školách a taktiež majstra odborného výcviku v odborných učilištiach a učňovských strediskách (pozri [6]). Počas existencie pedagogických inštitútov bol inštitút z Martina začlenený do inštitútu v Banskej Bystrici a inštitút z Košíc do inštitútu v Prešove, ktorý však fungoval ako organizačná zložka Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, založenej r. 1959. Organizačná, administratívna a ekonomická agenda pedagogických inštitútov bola v kompetencii príslušných krajských národných výborov, obsahová a personálna stránka ich činnosti podliehala povereníctvu. Zákonným opatrením Predsedníctva Národného zhromaždenia č. 166/1964 Zb. z. boli pedagogické inštitúty zrušené a ich nástupníckymi inštitúciami sa stali pedagogické fakulty. Pedagogická fakulta v Trnave bola elokovanou fakultou Univerzity Komenského v Bratislave. Po vzniku Trnavskej univerzity v Trnave, na ktorej bola r. 1992 zriadená vlastná pedagogická fakulta, sa pôvodná Pedagogická fakulta UK presídlila do Bratislavy.

Príprava učiteľov matematiky pre 2. stupeň základnej školy bola na pedagogických inštitútoch, resp. na pedagogických fakultách organizovaná v kombinácii s fyzikou alebo ďalšími prírodovednými predmetmi (zemepis, chémia, biológia), príp. s predmetmi praktického zamerania (práce v dielňach, práce na pozemku) – predmetmi tzv. polytechnickej prípravy – sprvu v štvorročnom štúdiu, ktoré sa neskôr zmenilo na päťročné. Na pedagogických fakultách sa postupne vytvorili početné odborne zdatné, vedecky i pedagogicky vysoko kvalifikované učiteľské kolektívy, ktoré podstatnou mierou prispeli k rapídnemu zlepšeniu kvalifikovanosti učiteľských kádrov na 2. stupni základných škôl.

Významným strediskom výchovy stredoškolských učiteľov matematiky sa stala Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach (pozri [4]). Univerzita vznikla r. 1959 ako druhá univerzita klasického typu v novodobých dejinách na Slovensku; jej prírodovedecká fakulta bola zriadená r. 1963. Po začiatočných ťažkostiach s kvalifikovaným personálnym obsadením, typickým pre všetky (nielen) školské inštitúcie, sa príchodom niekoľkých zrelých vedecko-pedagogických osobností, ale hlavne výchovou vlastných talentovaných absolventov fakulta rozvinula na silné centrum niekoľkých vedných disciplín, ako aj na stabilizovanú inštitúciu zásobujúcu rozsiahly región východného Slovenska kvalitnými učiteľskými kádrami. V prvom desaťročí 21. storočia opúšťalo brány fakulty každoročne 80–100 absolventov učiteľského štúdia prírodovedných predmetov, z toho počtu 50–80 učiteľov matematiky pre sekundárn všeobecnovzdelávacie školy a stredné odborné školy.

Závažnú zmenu vo vysokoškolskej príprave učiteľov matematiky pre školy 2. a 3. stupňa (2. stupeň základných škôl a všetky stredné školy – v dnešnej školskej sústave označované názvom sekundárna škola – nižší a vyšší stupeň) priniesol zákon o vysokých školách č. 39/1980 Zb. z., ktorým sa oprávnenie výchovy učiteľov všeobecnovzdelávacích predmetov, teda aj matematiky, pre stredné všeobecnovzdelávacie a stredné odborné školy rozširuje z filozofických a prírodovedeckých, resp. matematicko-fyzikálnych fakúlt univerzít aj na existujúce pedagogické fakulty. Prvými realizačnými krokmi k naplneniu tohto zákonného opatrenia bola tvorba jednotných učebných plánov a učebných osnov predmetov v celoštátnych odborových komisiách a predmetových radách. Druhou fázou zjednocovania obsahu výučby bola tvorba záväzných učebníc najprv pre hlavné predmety prvých ročníkov štúdia, neskôr mali nasledovať učebnice špeciálnejšieho zamerania. Z dôvodov nie celkom známych a verejne deklarovaných sa presadila tvorba samostatných učebníc v jednotlivých národných republikách federácie. Prvá etapa tvorby učebníc bola uzavretá publikáciou učebníc v polovici 80. rokov 20. storočia. Učebnice sa miestami podľa okolností používajú dodnes.

Táto zmena neviedla k rozširovaniu siete „učiteľských“ fakúlt. Jej hlavným dôsledkom bola nutnosť prispôsobiť dovtedajší systém prirodzeným spôsobom odlišných koncepcií pre školy 2. stupňa a školy 3. stupňa jednotnej koncepcii zahrňujúcej oba stupne. Pre niektoré pracoviská fakúlt pripravujúcich pôvodne učiteľov len pre 3. stupeň to prinášalo potrebu pragmatickejšieho prístupu k teoretickej úrovni vyučovaných predmetov, pre pedagogické fakulty predchádzajúceho razenia to znamenalo zvýšený dôraz na exaktnosť hlavných teoretických predmetov. Nevyskytli sa vážnejšie problémy s transformáciou prvého či druhého druhu. Potreba pripraviť vysokoškolských učiteľov na vyučovanie niektorých nových predmetov študijného programu učiteľstva matematiky viedla k myšlienke organizovať celoštátne tematické semináre, ktoré by za nejaký čas pokryli hlavné tematické okruhy výučby. V predmete *Dejiny matematiky* sa ujala prax pravidelných ročných letných škôl s tematikou filozofie matematiky, dejín matematiky a jej vyučovania, ktorá sa od prvého stretnutia r. 1980 rozvinula na hodnotnú tradíciu dnešných medzinárodných konferencií *Historie matematiky*, pokračujúcu úspešne t. r. 36. ročníkom.

Podstatné zmeny v organizácii, obsahu, ako aj v sústave inštitúcií vychovávajúcich učiteľov matematiky sa za posledných dvadsaťpäť rokov odohrali na báze prevratných udalostí a vývoja, ktorým prešli temer všetky európske štáty aj väčšina celosvetového spoločenstva v oblasti politiky, medzinárodných vzťahov aj ekonomických premien. Prvým štartovacím impulzom na území Slovenska (a väčšiny krajín bývalého sovietskeho bloku) bol pád režimu, ktorý z ideologických (ale aj mnohých iných) pozícií staval mnohé zábrany do cesty nevyhnutnému pokroku vnútornej situácie na vysokých školách aj rozvoju medzinárodných kontaktov a spolupráce.

Postupne v priebehu 90. rokov 20. storočia a v prvom desaťročí 21. storočia vznikali nové školy a nové fakulty, medzi nimi aj pedagogické, s programom výchovy učiteľov aj v matematike, niektoré existujúce inštitúcie sa presťahovali aj menili svoju štruktúru tak, že z nej vypadla výchova učiteľov matematiky. Na báze pedagogických fakúlt a niektorých ďalších fakúlt, resp. škôl vznikla Trnavská univerzita a na nej pedagogická fakulta, Pedagogická fakulta UK sa z Trnavy presťahovala do Bratislavy a učiteľské štúdium matematiky (aj ďalších exaktných a prírodovedných odborov) na nej v druhej polovici prvého desaťročia 21. storočia zaniklo. Pedagogické fakulty v Nitre a v Banskej Bystrici sa stali jadrom nových univerzít – Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre a Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici; učiteľstvo matematiky pre sekundárne školy sa na nich študuje na novozriadených fakultách prírodných vied, zatiaľ čo ich dnešné pedagogické fakulty pripravujú učiteľov primárnych škôl. V Prešove vznikla Prešovská univerzita; učiteľov matematiky pre sekundárne školy vychováva jej pedagogická fakulta. Budúci učitelia matematiky študujú aj na pedagogickej fakulte Katolíckej univerzity v Ružomberku. Krátky čas sa učitelia matematiky pripravovali aj na dnes už neexistujúcej Fakulte prírodných vied Žilinskej univerzity v Žiline.

Pohyb a zmeny v sústave fakúlt poskytujúcich vzdelávanie učiteľov matematiky sekundárnych škôl sú väčšinou odôvodnené novými pravidlami zriaďovania a fungovania odborov štúdia na vysokých školách: základnou (nevyhnutnou) podmienkou otvorenia štúdia v odbore je súhlas a odporúčanie akreditačnej komisie, na základe ktorého súhlasné alebo zamietavé rozhodnutie vydáva Ministerstvo školstva, vedy, mládeže a športu Slovenskej republiky. Podľa deklarovaných zásad hlavným faktorom ovplyvňujúcim rozhodnutie je miera garantovania kvality prípravy dostatočne vedecky a pedagogicky renomovanými osobnosťami učiteľského zboru fakulty.

Príprava učiteľov matematiky pre sekundárne školy na území Slovenska je organizovaná na nasledovných fakultách vysokých škôl (pozri [8]):

- Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v spolupráci s Prírodovedeckou fakultou Univerzity Komenského v Bratislave,
- Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
- Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave,
- Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre,
- Fakulta prírodných vied Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici,
- Pedagogická fakulta Prešovskej univerzity v Prešove,
- Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku.

Tento stav sa môže mierne zmeniť v najbližších rokoch na základe výsledkov práve prebiehajúceho procesu novej akreditácie vysokých škôl v Slovenskej republike.

4 Etápy vývoja vzdelávania učiteľov matematiky

Prvú etapu organizovanej vysokoškolskej prípravy učiteľov matematiky pre stredné školy na Slovensku možno približne ohraničiť rokmi 1940–1960 a v tejto etape odlíšiť obdobia 1940–1953 a 1953–1960.

Obdobie do r. 1953 je dobou faktickej dominancie Prírodovedeckej fakulty SU vo výchove stredoškolských učiteľov matematiky napriek zdanlivej konkurencii zo strany Pedagogickej fakulty SU od r. 1947. Výhoda PrírF SU v porovnaní s PedF SU spočívala v tradícii – síce krátkodobej, ale v kruhoch potenciálnych záujemcov o štúdium predsa len existujúcej, a v určitej väčšej miere informovanosti o obsahu a organizácii štúdia. Určitú úlohu vo väčšej popularite prírodovedeckej fakulty zaiste zohrávali aj na prvý pohľad nepodstatné faktory: 1. Absolvovanie prírodovedeckej fakulty znamenalo v blízkej budúcnosti status stredoškolského profesora na vyššom stupni spoločenského rebríčka než kvalifikácia učiteľa pre nižšiu strednú školy z pedagogickej fakulty; 2. Kratšie štúdium na pedagogickej fakulte bolo pre študentov zo slabšie situovaného sociálneho prostredia zjavne prijateľnejšie po materiálnej stránke.

Rozdiely v obsahu a štýle vzdelávania na oboch fakultách boli determinované hlavne odborným profilom vedúcich učiteľských osobností. Prof. Hronec a prof. Kaucký mali v prvom rade blízko k matematickej analýze, hoci roky pôsobenia v technickom vysokom školstve mierne obrúsili vyhranenosť tohto záujmu. Aj ďalšie osobnosti – prof. Karel Dusl a prof. Otakar Borůvka – ktoré sa zásluhou kontaktov prof. Hronca podarilo interne či externe angažovať na prírodovedeckú fakultu, spadali do tejto kategórie, hoci vedecký rozhľad a tvorivá potencia prof. Borůvku zreteľne prevyšovali prostredie pracoviska.

A tak vzdelávanie poslucháčov sa vcelku dialo v duchu osvedčených tradícií bez väčších náznakov modernizácie, ktorá sa až v 50. rokoch začala pomaly prejavovať v záujmoch a v prvej vedeckej tvorbe prvej generácie absolventov, ktorí zostali ako asistenti na škole, a prvých posíl, ktoré prišli z iného prostredia. Ku koncu 50. rokov výučba základných predmetov – matematickej analýzy, algebry a geometrie – vcelku prebiehala ešte stále v tradičnom duchu, ale mladí absolventi, z radov ktorých sa dopĺňal kádrový stav katedry matematiky, naznačovali v seminároch a príležitostne aj v prednáškach nástup modernizácie obsahu.

Výučba základných predmetov v učiteľskom štúdiu matematiky na fakulte prírodných vied Vysokej školy pedagogickej v Bratislave v rokoch 1953–1962 sa opierala o najnovšie vysokoškolské učebnice a príručky odporúčané učebnými plánmi a osnovami. Tak napr. základnou literatúrou pre matematickú analýzu boli prvé diely Jarníkových učebníc, algebra sa prednášala podľa Kořínkových *Základov algebry* a analytická geometria sa vykladala vektorovou metódou podľa príručiek Masného a Kraemera, štúdium teoretickej aritmetiky pokrývala Hrušova publikácia *Elementární aritmetika.* Kontakty a spolupráca medzi katedrami matematiky na PrírF UK a FPV VŠP v čase trvania katedry na VŠP (1953–1959) boli minimálne.

Modernizácia obsahu vzdelávania sa stala aktuálnou v prvej polovici 60. rokov, keď prednášky základných predmetov v najnižších ročníkoch štúdia začali preberať mladí pracovníci po krátkej niekoľkoročnej prípravnej praxi. V analytickej geometrii sa ústrednou témou stala výstavba reálneho afinného priestoru na báze n-rozmerného vektorového priestoru nad poľom reálnych čísel a lineárne geometrické transformácie, jadro výučby algebry po absolvovaní základov lineárnej algebry tvorila teória algebrických štruktúr.

V polovici obdobia 1960–1980, ktoré možno označiť za prvú etapu modernizácie obsahu výučby matematiky v učiteľskom i odbornom štúdiu matematiky na prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave a s určitým časovým posuvom aj na prírodovedeckej fakulte košickej Univerzity P. J. Šafárika, sa k dispozícii študentom a ašpirantom dostali preklady oboch verzií algebrických učebníc autorov Birkhoffa a Mac Lana. Koncepcia týchto publikácií sa odrazila aj v niekoľkých učebných textoch (skriptách) vydaných na Slovensku, ako aj v neskoršej vysokoškolskej učebnici *Katriňák a kol: Algebra a teoretická aritmetika.* Zmodernizované učebné texty z geometrie od V. Zaťka, neskôr prepracované a doplnené na učebnicu, vyšli už v 60. rokoch. Modernizačné tendencie a koncepcie boli zjavné aj v rozličných vydaniach učebných textov z matematickej analýzy a učebníc tohto predmetu vydaných autormi slovenských vysokých škôl. Všetky tieto modernizačné kroky súviseli tesne či voľnejšie s modernizačným procesom zasahujúcim oveľa intenzívnejšie, nie však celkom podložene a racionálne celé základné a stredné všeobecnovzdelávacie školstvo v uvedenom čase. Revízia koncepcie na tomto stupni vzdelávania však nemala mať – a, našťastie, nemala – priamy negatívny dosah na potrebné a realizované zmeny vo vysokoškolskej výučbe. Vykonaná prestavba základov hlavných matematických predmetov učiteľského vzdelávania mala nevratný charakter a výučba týchto predmetov sa už nikdy nevrátila do stavu pred rokom 1960. Podobný obraz sa naskytoval aj v doplňujúcich a rozširujúcich predmetoch matematického vzdelávania budúcich učiteľov, akými boli napr. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, *Numerické metódy* ap., kde sa zakomponovanie pokroku do pedagogického procesu nestretávalo s takými vyhrotenými kontroverznými stretmi ako v hlavných formujúcich predmetoch.

Tempo hľadania nových modernizačných ciest sa z pochopiteľných príčin pribrzdilo v 80. rokoch, keď sa naliehavou aktuálnou úlohou stala tvorba učebníc, do ktorých nebolo možné zaradiť neoverené výsledky didaktického výskumu, domnienok a voluntaristických predstáv a požiadaviek.

O to vypuklejšie sa tieto momenty vynorili v búrlivom kvase 90. rokov po kardinálnom spoločensko-politickom zvrate rokov 1989–1990 a osobitne v ďalšom desaťročí, keď sa naliehavou úlohou dňa stala fundamentálna štrukturálna prestavba vysokého školstva v duchu prijatých medzinárodných záväzkov, týkajúca sa, prirodzene, aj základných obsahových princípov. Rozsah koncepčných a formálno-administratívnych úkonov načas zatlačil do úzadia seriózne nedoriešené otázky aktuálneho i perspektívneho obsahu matematického vzdelávania, ktorý inak – z pohľadu formálnej skladby hlavných predmetov študijného programu učiteľstva matematiky pre sekundárnu školu – vykazuje nadmernú stabilitu, ktorá za sedemdesiat rokov sledovaných v tomto príspevku nebola podstatne narušená. Treba si však uvedomiť, že z historického pohľadu je každá štruktúra vzdelávania a jej obsahová náplň jav len relatívne stabilný a zdanlivo definitívny, lebo nepretržite fungujúca denná prax vyžaduje stále korekcie a zmeny a adekvátne reakcie na výskyt nových situácií a problémov. Búrlivý rozvoj technických prostriedkov, ktorý niektorým subjektom vzdelávacieho procesu zastiera podstatu, povahu a funkciu tohto procesu, nie je javom, ktorý by zásadne zmenil ciele a úlohy školského vzdelávania a výchovy a degradoval podstatu komunikačnej relácie učiteľa a žiaka/študenta. Toto všetko treba mať na pamäti pri pravidelne opakujúcej sa revízii programových dokumentov štúdia i vo vlastnej realizačnej činnosti vo výučbe.

5 Zhodnotenie a závery

5.1 Zhrnutie výsledkov

Inštitucionálna výchova učiteľov matematiky pre školy zodpovedajúce dnešným sekundárnym školám nižšieho i vyššieho stupňa sa na území Slovenska v období 1940–2010 rozvinula z nulového bodu na jeseň r. 1939 na pestrú, bohato rozvinutú sieť vysokoškolských ustanovizní pokrývajúcich celé územie Slovenska v miere možno až prevyšujúcej rozumné potreby. Azda je tento stav pozostatkom nedávneho obdobia, keď blízkosť sídla vysokej školy bola základným sociálno-ekonomickým predpokladom rozhodnutia absolventa strednej školy zo sociálne slabšej rodiny o pokuse vôbec študovať na vysokej škole. Historický pohľad na vznik prvej inštitúcie, organizáciu štúdia, obsah vzdelávania, početnosť a kvalitu učiteľského zboru, počtu prvých študentov, ich sociálnej skladby atď., pribúdanie ďalších škôl, kvantitatívny aj kvalitatívny rast počtu študentov, legislatívne zázemie v jednotlivých etapách vývoja až po dnešný stav atď. by sa mohol zdať ohromujúci, ak by sa nebrala do úvahy skutočnosť, že medzi začiatkom a dneškom je rozpätie troch štvrtín storočia, v ktorých sa vývoj všetkých stránok spoločnosti viditeľne urýchlil. Z toho pohľadu je taktiež zrejmé, že základné limitujúce podmienky realizácie akýchkoľvek zámerov a plánov tkvejú v ekonomických možnostiach štátu, ktorý legislatívnymi opatreniami si vyhradzuje právo rozhodujúcim spôsobom ovplyvňovať temer všetky zložky existencie a činnosti vysokých škôl, čo však zároveň definuje aj povinnosti štátu podieľať sa na zabezpečovaní materiálnej bázy života škôl vrátane určitej miery starostlivosti o učiteľov a študentov. Je vždy otázne, či splnenie takých alebo onakých kvantitatívnych ukazovateľov, podľa ktorých sa stanovujú hlavné ekonomické kritériá podpory škôl, je tým najpresnejším adekvátnym vystihnutím cesty k všestrannej prosperite škôl a k prospechu spoločnosti. Úspech školy, fakulty, učiteľov a študentov, ako aj spokojnosť dvoch posledných skupín závisí do istej miery od ich morálnych postojov, ktoré ovplyvňujú ich konanie neraz napriek vonkajším okolnostiam, značne vzdialeným od činiteľov pozitívnej motivácie. Pokles vážnosti a spoločenského uznania učiteľského povolania a jeho predstaviteľov je nespochybniteľným fenoménom našej spoločnosti. Žiadna politická garnitúra zatiaľ neprejavila seriióznu snahu nielen riešiť tento problém, ale ani vážne zamyslieť sa nad ním. Napriek tomu väčšina príslušníkov učiteľskej komunity pociťuje akúsi morálnu zaviazanosť pracovať čestne a statočne s odkazom na vlastné svedomie a zodpovednosť za generáciu budúcich plnohodnotných občanov vyrastajúcich z dnešných žiakov a študentov.

5.2 Ďaľšie perspektívy

Prechod na trojstupňové vysokoškolské štúdium berú dnešné generácie vysokoškolských učiteľov ako nezmeniteľnú skutočnosť, s ktorou treba uvádzať do súladu všetky aktivity v rámci pôsobenia na vysokej škole. Hoci vysokoškolský zákon z r. 2002 umožňuje organizáciu štúdia v jednom päťročnom cykle hodnotenom ako magisterské štúdium, čo by v prípade učiteľského štúdia (nielen) matematiky zodpovedalo nášmu (a stredoeurópskemu) predchádzajúcemu a osvedčenému modelu, neobjavili sa doteraz seriózne snahy využiť tieto ustanovenia zákona aspoň na komparatívny pokus s dnešným dvojstupňovým prístupom k učiteľskej kvalifikácii. Sledovanie problému, s akou „dôslednosťou“ pristupujú v niektorých krajinách k dodržiavaniu uplatňovania tohto – pôvodom stredovekého, v dnešnej dobe vnímaného prevažne ako anglosaského – modelu vysokoškolského štúdia, ukazuje, že sú miesta, kde prísnu záväznosť tohto modelu nerešpektujú. Časť vysokých škôl v USA má organizáciu štúdia odlišnú od dvojstupňovej postupnosti bakalárske – magisterské štúdium (pozri [9]). V našich podmienkach je najväčším problémom uplatnenie kvalifikácie *bakalár* v systéme organizácie školstva. Pozoruhodné je riešenie na niektorých pedagogických univerzitách v Ruskej federácii: štvorročným bakalárskym štúdium učiteľskej kombinácie získava absolvent učiteľskú kvalifikáciu pre nižší stupeň školskej sústavy, ďalším dvojročným magisterským štúdiom získava kvalifikáciu učiteľa pre vyšší stupeň školskej sústavy.

Pre obvyklý systém práce v našej spoločnosti bude úspechom, ak sa podarí bez prerušenia absolvovať aspoň jeden vzdelávací cyklus v dnešnom systéme organizácie. Potom by sme mohli zhodnotiť tento systém a s rozumom a obozretnosťou pristúpiť k jeho prípadným korekciám.

Literatúra

[1] Varsik B. a kol.: *Päťdesiat rokov Univerzity Komenského,* UK, Bratislava, 1969.

[2] Lukáč R. a kol.: *25 rokov Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave 1940–1965,* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1966.

[3] *Univerzita Komenského: Prehľad profesorov 1919–1966. Prehľad pracovísk 1919–1948,* UK, Bratislava, 1968.

[4] Sovák P. a kol.: *45. výročie Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika,* Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, 2008.

[5] Pavlík O. a kol.: *Pedagogická encyklopédia Slovenska 1 (A–O)*, Veda, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1984.

[6] Pavlík O. a kol.: *Pedagogická encyklopédia Slovenska 2 (P–Ž)*, Veda, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1985.

[7] *10 rokov Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave 1938–1948. Pamätnica*, SVŠT, Bratislava, 1948

[8] Galdunová I.: *Výchova učiteľov matematiky v niektorých krajinách Európskej únie*, Diplomová práca, Trnavská univerzita, Trnava, 2015.

[9] Homolová D.: *Výchova učiteľov matematiky v USA a v Ruskej federácii*, Diplomová práca, Trnavská univerzita, Trnava, 2015.

[10] *Zbierky zákonov ČSR, SR, ČSR, ČSSR, SR*, 1919–2012.

[11] *Soznam prednášok (V. Medek)*, Index poslucháča odboru matematika – deskriptívna geometria 1942–1946.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná ul. č. 4
P.O.BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: *jan.cizmar@truni.sk*

KAMIENIE MILOWE W NAUCZANIU MATEMATYKI DZIECI W POLSCE OD OSTATNICH DEKAD XIX STULECIA DO OSTATNICH DEKAD XX W.

STANISŁAW DOMORADZKI

Krótkie streszczenie: W referacie przestawione zostaną usilne starania o nowoczesne kształcenie matematyczne dzieci w wieku 7–10 lat w okresie zaborów i dwudziestolecia międzywojennego. Szczególna uwaga zostanie zwrócona na prace zapomnianych dzisiaj A. Jeskego (1836–1875), L. Jeleńskiej (1885–1961). M. Rusieckiego (1892–1956). Pokreślone zostanie też zaangażowanie profesorów uniwersyteckich matematyki w kształcenie matematyczne dzieci młodszych, w tym S. Banacha (1892–1945). Nie zabraknie odwołań do współczesnych koncepcji nauczania matematyki dzieci młodszych, m.in. koncepcji dziecięcej matematyki opracowanej przez E. Gruszczyk-Kolczyńską. Dostrzeżona zostanie metamorfoza roli dziesiątkowego systemu liczenia w edukacji matematycznej dzieci w Polsce w omawianym okresie.

Milestones in the teaching of mathematics to children in Polish territories from the last decades of the nineteenth century until the end of the twentieth century.

Short summary: In the talk, we will present persistent efforts to provide modern mathematical education to children aged 7–10 years in the period of the partitions and the two-decade interwar period. Particular attention will be paid to the works of now-forgotten A. Jeske (1836–1875), L. Jeleńska (1885–1961), M. Rusiecki (1892–1956). We will also underline the commitment of university professors of mathematics to mathematical education of younger children, including S. Banach (1892–1945). We will refer to the modern conception of teaching mathematics to younger children, among others, to the concept of children's mathematics developed by E. Gruszczyk-Kolczyńska. We will observe the metamorphosis of the role of the decimal system of counting in the mathematical education of children in Poland in the period under discussion.

Wstęp

W II połowie XIX w. Polski nie było na politycznej mapie Europy. Ziemie polskie podzieli pomiędzy sobą zaborcy: Austro-Węgry, Prusy i Rosja. W Galicji – wchodzącej w skład Monarchii Austro-Węgierskiej były najwieksze możliwości rozwoju szkolnictwa i nauki, funkcjonowały gimnazja z polskim językiem wykładowym, działały dwa uniwersytety we Lwowie i Krakowie. Takich możliwości nie było w pozostałych zaborach. Mimo to zakres i metody matematycznej stosowane w szkołach powszechnych zadziwiająco skutecznie przygotowywały dzieci radzenia sobie w codzienych sytuacjach. Dlatego warto przypomnieć dokonania A. Jeskego w zakresie nauczania dzieci w domu i w ówczesnych szkołach.

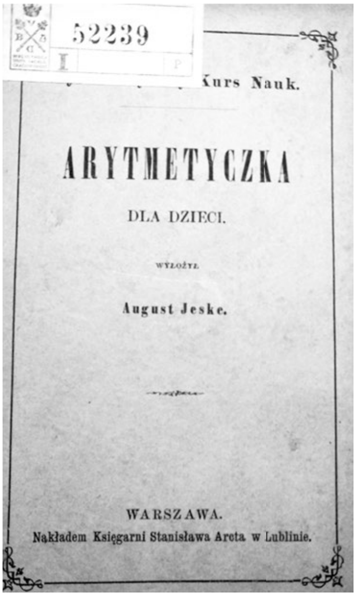
Agust Jeske (1836–1875)[1] – informacje biograficzne:

Urodził się 6 września 1836 r. w Trzemesznie koło Poznania. Po ukończeniu szkoły średniej i uzyskaniu stypendium ufundowanego przez K. Marcinkowskiego wyjechał do

[1] A. Wachułka, *A. Jeske*, [w]: Słownik Biograficzny Matematyków Polskich, red. S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, PWSZ Tarnobrzeg, 2003.

Berlina i rozpoczął tam studia na Wydziale Historyczno-Filologicznym Uniwersytetu Berlińskiego. W 1865 przyjechał do Warszawy, gdzie rozpoczął pracę literacko-pedagogiczną. W 1873 w wydawnictwie S. Arcta w Lublinie opublikował *Augusta Jeskego Systematyczny kurs nauk przeznaczony do pomocy w wychowaniu domowym dzieci od lat 3 do 15*; zawierał on m.in. *Arytmetykę cz. I* , *Arytmetykę cz. II*. W Katalogu Biblioteki Rosyjskiej Akademii Nauk (najwięcej z dostępnych w sieci bibliotek) znajdujemy aż 82 pozycje Jeskego. Dotyczyły one nauczania matematyki, geografii, gramatyki języka polskiego, obejmowały wypisy z literatury polskiej, opowiadania dla dzieci. Zmarł 27 października 1875 w Warszawie.

Był autorem niezwykle popularnym i chętnie czytanym, gdyż wiele jego dzieł było wydanych i wznawianych wiele lat po jego śmierci.



52239

Kurs Nauk.

ARYTMETYCZKA

DLA DZIECI.

WYŁOŻYŁ

August Jeske.

WARSZAWA.

Nakładem Księgarni Stanisława Arcta w Lublinie.

Augusta Jeskiego

SYSTEMATYCZNY KURS NAUK

Kurs I.

A B C czyli **Nauka czytania i pisania**, wyłożona na podstawie nauki poglądowéj.
Świat i Dzieci, Stopień I., metodyczna książka do czytania, ułożona na podstawie nauki poglądowéj.
Świat i Dzieci, Stopień II., metodyczna książka do czytania, i t. d.
Arytmetyczka dla dzieci, wyłożona metodycznie.
Mała Gramatyka języka polskiego, dla dzieci.
Mała Stylistyka dla dzieci, zawierająca materyały i wskazówki metodyczne do piérwszych ćwiczeń językowych.

Kurs II.

Arytmetyka, Część I., obejmująca cztery działania z liczbami całkowitemi, wielorakiemi, ułamkami zwycz., dziesiętnemi. Na podstawie rachunku pamięciowego.
Arytmetyka, Część II., obejmująca wszystkie rachunki wchodzące do Réguły Trzech. podnoszenie do potęg, wyciąganie piérwiastków, treściwą naukę o logarytmach, progresyach i zrównaniach I-go stopnia.
Gieometrya praktyczna, wyłożona metodycznie, z zagadnieniami.
Gieografia, wyłożona metodycznie, z pytaniami i ćwiczeniami do ustnego i piśmiennego przerabiania.
Historya naturalna, (zoologia, botanika, mineralogia).
Fizyka, (łącznie z chemią), wyłożona metodycznie.
Historya powszechna, wyłoż. metod.
Gramatyka języka polskiego, większa.
Gramatyka języka niemieckiego, z ćwiczeniami praktycznemi.
Gramatyka języka francuzkiego, z ćwiczeniami praktycznemi.
Gramatyka języka ruskiego.
Piérwsze początki języka łacińskiego, (Gramatyka i Ćwiczenia).

Od Wydawcy: Powyższe książki stanowią **Kurs Nauk**, obejmujący mniéj więcéj całą dziedzinę przedmiotów szkolnych, wyłożonych krótko, treściwie, w myśl jednego planu i jednego systemu, tak, że sobie wszystkie odpowiadają i pomagają wzajemnie. Autor korzystał troskliwie ze źródeł i ulepszeń, jakie nauka i postęp wprowadziły w ostatnich czasach do zakresu szkoły i wychowania; główną atoli podstawą Kursu tego jest **systematyczność szkolna i jak najściślejsza równowaga pomiędzy osobnemi przedmiotami**, ażeby uczeń znalazł się przy końcu Kursu *na jednéj linii postępu* we wszystkich swoich przedmiotach, bo to rzecz niezmiernie ważna ze względu na dalsze prace i na przyszły w ogóle charakter młodzieży. Nauczyciel znajdzie w tych podręcznikach wykład dążący do celu drogą ściśle naukową, umiejętną; uczeń zaś znajdzie tu materyał *systematycznie* ugrupowany i co najważniejsza: *zastósowany jaknajściśléj do wieku i potrzeb jego.*

Stanisław Arct, Księgarz w Lublinie.

Strony: tytułowa pierwszego wydania niezwykle popularnej *Arytmetyczki* Jeskego (1873) i zamieszczona w tym podręczniku reklama jego *Systematycznego Kursu Nauk*.

Oddajmy głos Autorowi „Arytmetyczki”: *Nauka rachunku początkowego sprawia niemałe kłopoty. Ma ona tę niedobrą stronę, że ją rozpoczynać można z punktów najrozmaitszych. Wszystkie one są niby dobre, ale wszędzie potem zjawiają się trudności nie do zwalczenia. Zwykle zacząć łatwo, ale przeprowadzić naukę systematycznie do końca, to już sprawa nieco trudniejsza*. Żeby pokazać mistrzowstwo pedagogiczne Jeskego przytaczam jego sposób opracowania liczby 20.

Jeske zaleca używanie „okazów” (konkretów – liczmanów, narysowanych kresek, kropek (te ostatnie nie oznaczją innego przedmiotu) w następujący sposób.

Przedstawić na okazach liczbę 20!
20 krések jestto 2-razy 10 krések. 20 składa się zatém z ilu dziesiątków?

Licz od 1 do 20! od 20 do 1!
20×1=? 20 składa się z 1 ile razy?
1 : 20=?
Licz *dwójkami* od 2 do 20! podobnież od 20 do 2!
10×2=? 20 jestto ile razy 2?
2 : 10=?
4+4+4+4+4=? 20—4—4—4—4—4=?
5×4=? 20 składa się z 4 ile razy?
4 : 20=?
5+5+5+5=? 20—5—5—5—5=?
4×5=? 20 jestto ile razy 5?
5 : 20=?
10+10=? 20—10—10=?
2×10=? 20 składa się z 10 ile razy?
10 : 20=?
Rozłożyć 20 na 2, 4, 5, 10, 20 równ. części! Pytania!
20 jest 20-krotną, 10-krotną, 5-, 4-, 2-krotną jakiéj liczby?
19+1=? 18+2=? 17+3=? itd. Także wyrywkami!
12+4+4=? 14+2+4=? 11+6+3=? 8+7+5=?
20—1=? 20—3=? 20—6=? 20—9= 20—12==? 20—15=?
20—4—4=? 20—2—4=? 20—6—3=? 20—7——5=?
6×3+2=? 2×7+6=? 2×8+4=? 2×9+2=?
20 *o ile* większém jest od 19, 18, 17, 16... itd.

Przypomnijmy, że 10:20 oznacza tu pytanie *ile razy 10 mieści się w 20*? Zauważmy, że „10" nie zajmuje jeszcze centralnego miejsca w rachunkach. W czasach Jeskego posługiwano się w obliczeniach kopami, tuzinami, arszynami i innymi miarami, dlatego naturalnym jest zalecanie zadań, które dotyczą również innych systemów liczbowych. Na przykład:

20 jedności ile dziesiątków?
20 sztuk ile tuzinów i sztuk? 20 gr. ile pięciogroszówek? – Kiedy za 10 sztuk owiec płaci gospodarz 20 rub., po ile płacił 1 sztukę? Ile zapłacił za 3 sztuki, za 8 sztuk? – Ile ołówków dostać można za 20 gr., jeżeli jedne ołówek kosztuje 4 gr.?
Dukat w złocie ma 20 zł.; ile wynosi ½ dukata ? – ¼ dukata? $^2/_4$ *dukata?*

Przy monograficznym opracowaniu następnych liczb naturalnych podobnych zadań jest więcej. Nie trudno zauważyć, że dziesiątka w tych czasach nie pełni centralnego miejsca w metodyce kształtowania pojęć liczbowych. Zapewne jest to konsekwencją tego, że zadaniem edukacji szkolnej było wówczas przygotowanie do radzenia sobie w sytuacjach życiowych. A tam przy obliczeniach posługiwano się m.in. *stopami*, *łokciami*, *librą* i wieloma innymi miarami. Potwierdzeniem tego są zalecenia Jeskego odnośnie monograficznego opracowania następnych liczb, np. liczby 52.

B.

24 miesiące = ile lat?
24 grosze ile dwugroszówek, kopiejek?
24 sztuki ile tuzinów?
24 cale ile stóp? Łokieć ma 2 stopy; zatém 1 łokieć = ile cali?
24 arkusze zwyczajne nazywamy *librą*.
$^1/_2$ libry=ile ark.? $^1/_3$ lib.? $^2/_3$ lib.? $^1/_8$ lib.? $^3/_8$ lib.? $^5/_6$ libry?
Jeżeli 1 libra papieru kosztuje 24 grosze, co kosztuje 10 ark.

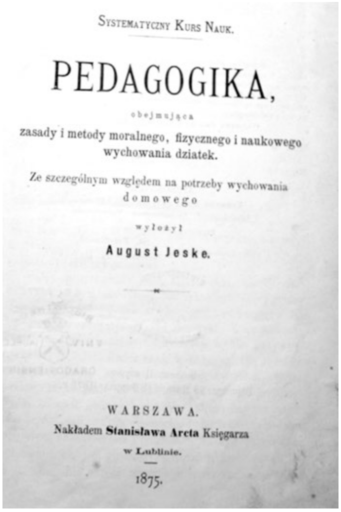
Arytmetyczka dla dzieci. 3

Liczba 52.

50+2=52. 52 ile dziesiątków i jedności? — Licz od 1 do 52! od 52 do 1! — Licz *dwójkami* od 2 do 52! od 52 do 2! Policz te dwójki! A zatém
26×2=? (Rozw. 26×2=20×2 i 6×2!) 2 : 52=? $^1/_{26}$ z 52=? 52 jest 26-krotną jakiéj liczby?
Licz *czwórkami* od 4 do 52! od 52 do 4! Policz te czwórki!
13×4=? 4 : 52=? $^1/_{13}$ z 52=? 52 jest 13-krotną czego?
13 + 13 + 13 + 13=? 52—13—13—13—13=? 4×13=? (Rozw. 4×13=4×10 i 4×3). 13 : 52=? $^1/_4$ ($^3/_4$) z 52=? 52 jest 4-krotną czego?
26+26=? 52—26—26=? 2×26=? 26 : 52=? $^1/_2$ z 52=? (Rozw. 52=40+12; $^1/_2$ z 40=20, a $^1/_2$ z 12=6!). 52 jest 2-krotną czego?

Dodać tu trzeba, że Jeske w swojej koncepcji matematycznego kształcenia dzieci nawiązuje do umiejętności kształtowanych w edukacji domowej. Twierdzi w „*Arytmetyce”*: *Dzieci przystępujące do nauki Arytmetyki, powinny być obeznane z liczeniem i rozwiązywaniem łatwych zadań w granicach do jednej setki; to im ułatwi zrozumienie i przyswojenie sobie objaśnień teoretycznych i określeń …*

O tym, jak nowatorsko Jeske omawia kształcenie dzieci i młodzieży można się przekonać studiując jego *Pedagogikę,obejmującą zasady i metody moralnego, fizycznego i naukowego wychowania dziatek* (nakładem Księgarni Stanisława Arcta w Lublinie, Warszawa, 1875). W tym podręczniku dla nauczycieli przestawił. m.in. koncepcję naucznia arytmetyki.



Systematyczny Kurs Nauk.

PEDAGOGIKA,

obejmująca

zasady i metody moralnego, fizycznego i naukowego wychowania dziatek.

Ze szczególnym względem na potrzeby wychowania domowego

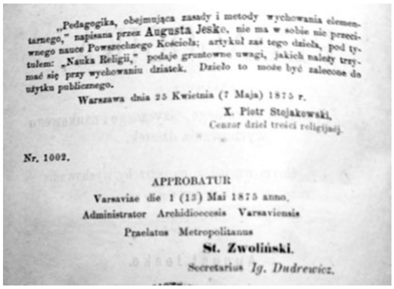
wyłożył

August Jeske.

WARSZAWA.

Nakładem Stanisława Arcta Księgarza w Lublinie.

1875.



„Pedagogika, obejmująca zasady i metody wychowania elementarnego,” napisana przez Augusta Jeske, nie ma w sobie nic przeciwnego nauce Powszechnego Kościoła; artykuł zaś tego dzieła, pod tytułem: „Nauka Religii,” podaje gruntowne uwagi, jakich należy trzymać się przy wychowaniu dziatek. Dzieło to może być zalecone do użytku publicznego.

Warszawa dnia 25 Kwietnia (7 Maja) 1875 r.

X. Piotr Stojakowski,
Cenzor dzieł treści religijnej.

Nr. 1002.

APPROBATUR

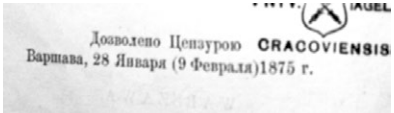
Varsaviae die 1 (13) Mai 1875 anno.

Administrator Archidioecesis Varsaviensis

Praelatus Metropolitanus

St. Zwoliński.

Secretarius *Ig. Dudrewicz.*



Дозволено Цензурою
Варшава, 28 Января (9 Февраля) 1875 г.

CRACOVIENSIS

Strona tytułowa *Pedagogiki* Jeskego, aprobaty: Archidiecezji Warszawskiej i cenzury carskiej.

We *Wstępie* Jeske twierdzi, że metody nauczania – także te stosowane w edukacji matematycznej – mogą być *środkami, przysposabiającemi do nauki i pracy pożytecznéj.* Odwołuje się do zaleceń księdza Piramowicza[2]: *abyśmy mieli zawsze przed oczyma jako cel jedyny pożyteczność w życiu i społeczeństwie ludzkiém.* Cel wykształcenia elementarnego wyłożył w słowach: *Nauka elementarna ma kształcić i sposobić na religijno-moralnych ludzi i użytecznych obywateli dla kraju i społeczeństwa swego.*

Każdy, komu bliski jest świat dziecka – zauważa Jeske – ***powinien zauważyć, że dziecko ma skłonność do czynności, przeważa u niego chęć zajmowania się światem najbliższym i branie z niego wyobrażeń, a także chęć przekształcania wszystkiego*** (podkreślenie S. D.[3]).

[2] G. Piramowicz należał do zakonu jezuitów, pedagog, w latach 1770–1773 wykładał filozofię w kolegium jezuickim we Lwowie. Działał aktywnie w Komisji Edukacji Narodowej, był sekretarzem, powołanego przez KEN Towarzystwa dla Ksiąg Elementarnych.

[3] Dodać tu trzeba, że tezę tę Jeske sformułował pół wieku wcześniej nim J. Piaget ogłosił światu swoją koncepcję operacyjnego rozumowania, w której istotne miejsce zajmuje charakterystyka dziecięcego rozumowania właśnie w zakresie wnioskowania o skutkach przekształceń (por. Piaget J.: *Równoważenie struktur poznawczych. Centralny problem rozwoju*, PWN, Warszawa, 1981, na podstawie *L'équilibration des structures cognitives: problème central du développement*, Presses universitaires de France, 1975).

Zauważmy i podkreślmy to, że Jeske w tej i innych swoich publikacjach odwołuje się do słynnej książki wspomnianego już G. Piramowicza (1735–1801) *Powinności nauczyciela* (z 1787 r.), w której jej autor zauważył odnośnie matematycznego kształcenia dzieci: *Dając przykłady i ćwiczenia w arytmetyce, zawsze ma przestawać na tych rzeczach, na tych okolicznościach, które się w życiu wiejskim i po miasteczkach trafiają. Niech piszą rejestra urodzajów, zbioru, płacy czeladzi, podziału na pewną ich liczbę pewnej miary, żywności i tym podobne*. […] *Niech bierze od dobrych rachmistrzów dworskich wzory rachunków zbożowych i pieniężnych, podług których by uczniowie układali owe rejestra*.[4]

Trzeba tu dodać, że w czasach działalności pedagogicznej Jeskego dydaktyka niemiecka wyznaczała kształt edukacji w Europie, a w matematycznych kształceniu wzorowano się na koncepcji K. Grube'go. Tymczasem Jeske podkreśla, że chociaż w dydaktyce niemieckiej problemy dydaktyczne dotyczące nauczania elementarnego zostały doskonale opracowane, to *… cała dydaktyka i metodyka niemiecka, jest gimnastyką rozumu, jest ciężka i jedno-stronna; nie mieści w sobie piérwiastku sercowego i religijnego, nie jest zastosowana do życia ani wpłynąć nie jest zdolna na całkowity rozwój człowieka.*

Jeśli chodzi o kształtowanie sprawności rachunkowych, to Jeske zastanawia się, czy jest przedmiot, który jest gorzej nauczany niż rachunki: *Biedne dziecko, prowadzone przez niedoświadczoną matkę lub guwernantkę, odrabia działania rachunkowe bez najmniejszego zasilania umysłu, bez wszelkiéj korzyści ulgi dla siebie.* Następnie Jeske:

- podkreśla rolę samodzielności w nauczaniu i przestrzega przed mechanicznym kształtowaniem umiejętności rachunkowych;

- zaleca, aby po opanowaniu przez dziecko liczenia, np. do 1000 przystępować, przede wszystkim do kształcenia umiejętności dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Słuszność tych zaleceń ilustruje przykładem: przy dodawaniu zazwyczaj mówi się dziecku: *Dodaje się od prawej ręki do lewej, najpierw dodają się liczby w pierwszym rzędzie, potem w drugim, trzécim* ; *jeżeli w piérwszym rzędzie wypadnie suma 25, to 5 podpisuje się pod tym samy rzędem a 2 dodają się do drugiego rzędu, etc. etc.* […] *nota bene: coto jest liczba 1, to 100, ten tysiąc, to „dodawanie", ta „suma", ta „lewa", ta „prawa"strona i tym podobne „drobnostki", o tém dziecko najmniejszego nie ma pojęcia, zresztą przy takiém założeniu mieć go nawet nie może. Cała tedy sztuka tego rachowania zasadza się na bezmyślnym mechanizmie*.

Dalej Jeske wylicza niedostatki mechanicznej (pamięciowej) koncepcji nauczania rachowania. *Nauczyciel, który nie umié inaczéj uczyć rachunków i dla którego mechanizm jest jedyną metodą wykładu, nie jest godzien być nauczycielem: bo albo nie pojmuje wcale celu téj nauki, albo téż jest za leniwy …*

Jeske przedstawia też szczegółowe zasady kształtowania umiejętności rachunkowych, często powołując się na zalecenia G. Piramowicza. Spróbujmy, cytując Jeskego, dokładnie je zaprezentować:

---

[4] Cytat za wydaniem: WSiP, Warszawa 1988.

… Zaczynać trzeba od *rzeczy unaoczniających dziecku pojęcie ilości*, tj. od ***okazów*** i ***przedmiotów***, które znajdują się w najbliższym otoczeniu. Autor podkreśla rolę postrzegania, oglądania, porównywania, wymyślania, przez co jego umysł staje się twórczym i samodzielnym. Zaleca przygotowanie drewnianych klocków (10 albo 100), 100 patyczków krótkich, monet (kopiejki, dziesiątki, liczbony).

Ważnym też jest używanie kresek, kropek, krzyżyków, kółek, jak również odwoływanie się do elementów ciała ludzkiego (palce u rąk, nóg,) świata zwierząt (skrzydła, rogi), świata roślin (liście, kwiaty, korony, kielich, owoce), miejsca zamieszkania (kościół, wieża, dworek, dom, pałac, zamek, ogród, staw, rzeka, góra, las), narzędzi i sprzętów domowych (zegar, noże, talerze, skrzypce, fortepian), monet, miar.

Patyczki uważa Jeske za prosty, dogodny i praktyczny *środek okazowy*. Mają być większe od zapałek, dziecko … *wybornie nimi operuje i sprawia mu to przyjemność*. Każde zadanie ma rozwiązywać samodzielnie według swoich przemyśleń, ma poprawić pomyłki i sprawdzać za ich pomocą poprawność rozwiązania. Dla nauczyciela operowanie patyczkami przez dziecko jest wyrazem jego zaangażowania i rozumienia omawianych treści. Pomoce dydaktyczne nie polecane przez Jeskego to także owoce i ciastka (*nie są w stanie oprzeć się mężnie widokowi tych rzeczy smacznych*).

Druga zasada w nauczaniu rachunków brzmi: *korzystać z tego co się już zdobyło*. Od przykładów konkretnych autor zaleca przechodzenie do pojęć, od pojęć do wysnuwania wniosków i podkreśla potrzebę powtarzania. Dla większej czytelności tej zasady przedstawimy przykład prezentacji liczby 3, używając współczesnego języka: zajęcia zaczynamy od konkretów, 3 patyczki, 3 klocki, 3 kreski, następnie konkrety odsuwamy i dzieci rachują w pamięci: ile to 2 patyczki i 1 patyczek, 2 klocki i jeden klocek, 2 kreski i jedna kreska. Potem pytamy ile to jest 1 grosz i 2 grosze, 1 dzień i 2 dni, by potem zostawić liczby mianowane i zapytać ile to jest 1 i 2, 2 i 1. Po tych pytaniach uczeń pod kierunkiem nauczyciela zapisuje dodawanie pisemnym 2 i 1, 1 i 1 i 1, sposobem używanym dzisiaj w pisemnym dodawaniu.

Postępowanie takie autor nazywa genetycznym … *prawideł, wniosków, formułek nie należy dawać z góry, ale dziecko powinno je raczéj wykrywać samo, drogą własnego doświadczenia*. Podkreślona została rola samodzielnego dochodzenia do umiejętności rachowania. Zacytujmy i pamiętajmy, że myśli te zostały wydrukowane w 1873 r.: *Dlatego niewolno tu nigdy kwapić się nierozważnie i nieopatrznie z podsuwaniem gotowych rzeczy: niewolno myśleć, mówić, wnioskować za dziecko; nie wolno utrzymywać go ciągle w stanie biernym i zamieniać w papugę, powtarzającą bezmyślnie to co widzi lub słyszy*. Już wtedy Jeske zauważył negatywne dla uczenia matematyki jej formalne nauczanie.

Nauka rachunków służyć powinno praktycznym celom życia; wszelkie zatém ćwiczenia i zagadnienia muszą dotyczyć sfery istotnych potrzeb naszych. Dalej autor szczegółowiej wyjaśnia to hasło, m.in. wskazuje szkodliwość długich przykładów, podczas rozwiązywania których dziecko uczy się pobieżnie i mechanicznie. Zaleca przykłady (ćwiczenia) z małymi liczbami. Wprawdzie, jak zauważa autor podczas używania liczb dużych *wprawdzie dziecko uczy się mnożyć i dzielić, dodawać i odejmować, ale przenigdy – rachować.* […] *Niech się nauczyciel rozpatrzy się troskliwie w okolicy swojej: niech bada przemysł miejscowy, handel ceny produktów, ludzi stosunki, wydarzenia pouczające, niech to wszystko zbiera skrzętnie i dzieciom natychmiast przedkłada, aby wiedziały jak sobie radzić później, i aby, co ważniejsza, uczyły się zwolna rozglądać praktycznie w okolicy i ziemi swojéj.*

Ponieważ ilość wszelka jestto coś umysłowego, jest produktem ducha, rachowanie jest więc także prostą czynnością, prostym aktem ducha; odbywać się przeto tylko może w umyśle – siłą myślenia, czyli jak to mówimy, sposobem pamięciowym. Jeske podkreśla rolę własnych spostrzeżeń i doświadczeń dziecka do przyswojenia rachunku pamięciowego.

Zacytujemy fragment, z którym mamy do czynienia nagminnie i dzisiaj: *Nie należy tu atoli zapomninać o jednej niezmiernie ważnéj maksymie nauki: aby dzieci licząc pamięciowo, liczyły istotnie p a m i ę c i o w o, t.j. ilościami czyli liczbami, a nie – cyframi! jakto się niestety zbyt często przytrafia. Przez złe i opatrzne rachowanie cyframi przywykają dzieci (i starzy nawet!) do tego, że i w pamięciowym rachunku widzą tylko cyfry przed sobą: licza wię zupełnie tak samo jak na papierze … Jeśli dasz im do obliczenia ile wynosi „4 razy 333" to miasto liczyć praktycznie pamięciowo tak: 2 x 222 = 666, do tego +666 = 1332, to one będą liczyć tak: 4 x 3=12, piszę 2, pozostaje się 1; 4 x 3 = 12 a 1 z przeniesienia = 13, piszę 3, pozostaje się 1; 4 x 312 a 1 z przeniesienia = 13, razem 1332. Liczą więc kubek w kubek jak na papierze!.. Tamte rozważają zadanie, rozkładają i ułatwiaja je sobie w myśli, te zaś mnożą mechanicznie, bez myśli bez pewności, słowem podług danéj formułki. Tamte dzieci są istotnie rachmistrzami, te zaledwie automatami i niewolnikami kilku stereotypowych prawideł.*

Jeske uważał także, że do rachunku pisemnego (piśmiennego) przechodzimy nie szybciej niż dziecko będzie w stanie pokonać. Wyjaśniając kwestię – *kiedy dziecko podoła?* Odpowiada: *Wtedy gdy będziemy je wspierać w rachunku na konkretach, przezwyciężać niepewność … Pewność i dokładność są niemniéj ważnym warunkiem dobrego rachunku.*

Jeske proponuje także wydzielenie czasu na rachowanie. […] *przyuczamy dziecko do spokoju i uwagi, aby wiedziało świadomie, co liczy i jak liczy.* […] *jeśli dziecko nie jest w stanie zrozumieć i rozwiązać pytania naszego, trzeba mu je podać w formie odmiennéj, praktyczniejszéj, bliższéj wyobraźni jego, i jeśli się okaże potrzeba rozwiązać samemu po kilka razy, póki dziecko nie wpadnie na myśl naszą.*

Ponadto radzi: jeśli pragniemy sukcesów dziecka w rachowaniu to … *pozostawmy mu w nauce rachunków wszelką swobodę ducha, myśli i kombinacyi: niech się rusza samo (ah! Ono tak tego pragnie z duszy!)* […] *Niech nie będzie naszym niewolnikiem: niech do jednego zagadnienia dobiera kilku sposobów rozwiązania.* Wielokrotnie podkreśla zasadę ***Powolnie a gruntownie.*** […] *Kto téj zasady szanować nie umié, niech naukę rachunków zostawi komu innemu.* A także to, że […] *pytania i zagadnienia powinny być zawsze proste, jasne i, co najważniejsze – właściwe wiekowi dziecinnemu.*[5]

Jeske zaleca też w edukacji matematycznej systematyczność, regularność i powtarzalności, a także wiązanie nauki szkolnej z sytuacjami życiowymi ówczesnych uczniów. Przykładem jest sposób monograficznego opracowania liczby 1.

a) Nauczyciel pokazuje dziecku jeden patyczek i pyta się ile to jest patyczków, potem rysuje jedną kreskę na tablicy i pyta o to samo. Dalej pokazujemy kilka patyczków, kulek

[5] Pół wieku później tezę tę rozwinął wielki polski psycholog S. Szuman w swojej *Pedagogice pytań*. Podstawą jej opracowania była dogłębna analiza dziecięcych pytań i odpowiedzi dorosłych akceptowanych przez dzieci. Szczegółowe informacje w rozprawie S. Szuman *Rozwój pytań u dziecka. Badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań*, w: *Dzieła wybrane*, tom 1, WSiP, Warszawa, 1985 (wydana po raz pierwszy w 1939 r.).

liczmanów i pytamy *czy to także jest jeden patyczek, jedna kulka, jeden liczman*. Autor zaleca, aby zwracać uwagę na słowa: kilka, wiele, dużo.

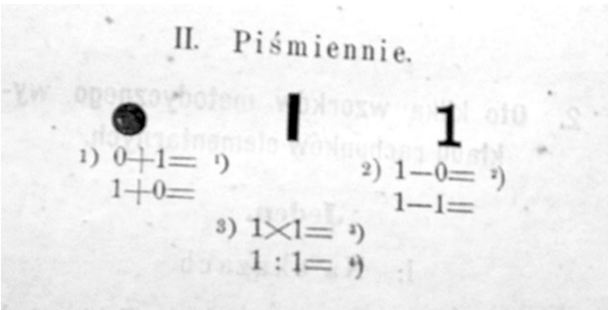
b) Nauczyciel bierze książkę i kładzie ją na stole. Ile razy położył tam książkę. *Jeden raz.* Rysuje kreskę na tablicy. *Ile razy narysowałem kreskę na tablicy.*

c) *Masz na tablicy jedna kreskę. Ile kresek zostanie, jeśli zmażesz jedną kreskę. 1 kreska odjąć jedna kreska, ile to będzie kresek. 1 mniéj 1 ile jestto?*

d) *Pewna kupcowa ma 1 łokieć płótna; ileż razy może sprzedać z tego płótna 1 łokieć; ileż razy może sprzedać z tego płótna 1 łokieć? – Ileż więc razy mieści się*[6] *1 łokieć w łokciu? – Ileż razy mieści 1 kreska w jednej kresce? – a 1 liczbon w jednym liczbonie? – Ileż razy mieści się **1** w **1**?*

e) Autor wprowadza zero. *Ileto czyni 1 kreska mniéj nic? – A ile czyni: nic a 1 kreska? – Ile czyni **1**kreska mniéj nic? – Zamiast nic mówi się także: zero. A zatém: ile czyni **1** a zero? – zero a **1**? – **1** mniej zero?*

Dodatkowo zachęca do napisania na tablicy *jeden*. Potem następuję czytanie tego wyrazy i objaśnianie, że zapisujemy go przy pomocy cyfry 1. Na koniec nastepuje propozycja zapisania działań arytmetycznych związanych z liczbą 1.



Ten schemat metodyczny jest konsekwetnie powtarzany w kolejnych monograficznych opracowaniach liczb wraz z tworzniem w umysłach dzieci umiejętności rachunkowych.

Podnieś jedną rękę do góry! – Ile rąk podniósł? – Podniósł jeszcze jedną rękę- 1 ręka i 1 ręka, ileto rąk? – Ile masz nóg! – Ile masz nóg! […]

Konsekwentność zaleceń metodycznych Jeskego zaczyna się od badania relacji (nazywa je stosunkami) **1** do **2**, następnie **2** do **2**, zaś w kolejnych monografiach do relacji **1**do **3, 2** d**o 3, 3** do **3** i dalej: **1** do **4, 2 do 4, 3 do 4, 4 do 4 itd.**

➢ *… stosunek **1** do **2**. – (Pisząc 1 kreskę na tablicy): ileto krese? – (Dopisując drugą kreskę): ileto kresek? – Ileżto jestjest więc 1 keska, więcéj 1 kreska? – Czyli krócéj: **1** a **1**?*

[6] *Tkwi, siedzi, znajduje się. Kłaść nacisk na te wyrazy objaśniając je okazami.*

➢ *… stosunek **2** do **2** […] (Mażąc 2 kreski z tabl.): ile razy zmazałem 2 kreski? – A więc dwie kreski znadują się czyli m i e s z c z ą s i ę w 2 kr. Ile razy – 2 mieście się w dwóch ile razy?*

Rzoałóż te dwa orzechy na 2 kupki! – Ileż czyni połowa 2 orzechów – Ile czyni połowa 2 złotych? – połowa 2 rubli? – połowa 2 lat? Matka rozdzieliła 2 jabłka między dwoje dzieci: po ile dostanie każde? […] *Ile razy można odmierzyć 2 łokcie z 2 łokciepłótna? – Ile wynosi połowa dwóch łokci? Ile bucików trzeba do jednej p a r y? Czy jeden wół jest jest już jedną parą wołów?* […] *Ile trzeba zapłacić za 1 jabłko, kiedy para jabłek kosztuje 2 grosze?*

II. Piśmiennie.

●● 2 czyli właściwie └ [1]

1) Pokazać dziecku, że znak 2 powstał poprostu z d w ó c h kresek, ustawionych w ten sposób, jak oto powyżéj!

1) $1+1=$	2) $2+0=$
$2\times1=$	$1\times2=$
$2-1=$	$2-2=$
$1:2=$	$2:2=$

➢ *Stosunek **1** do **4**. – 1 książka i 1 książka ileto ks.? – 2 książki i 1 ks. ileto ks.? – 2 książki i 1 ks. ileto ks.? – 3 Książki i 1 ks. ile to ks.? – A zatém 1 a 1, a 1, a 1 książka, ileto ks.? – Czyli 1+1+1+1= ?*

➢ *(biorąc 4 książki zwolna jeną po drugiéj): ile razy wziąłem tu jedną książkę? (4 razy). – A zatém 4 razy 1 książka ile to książek?*

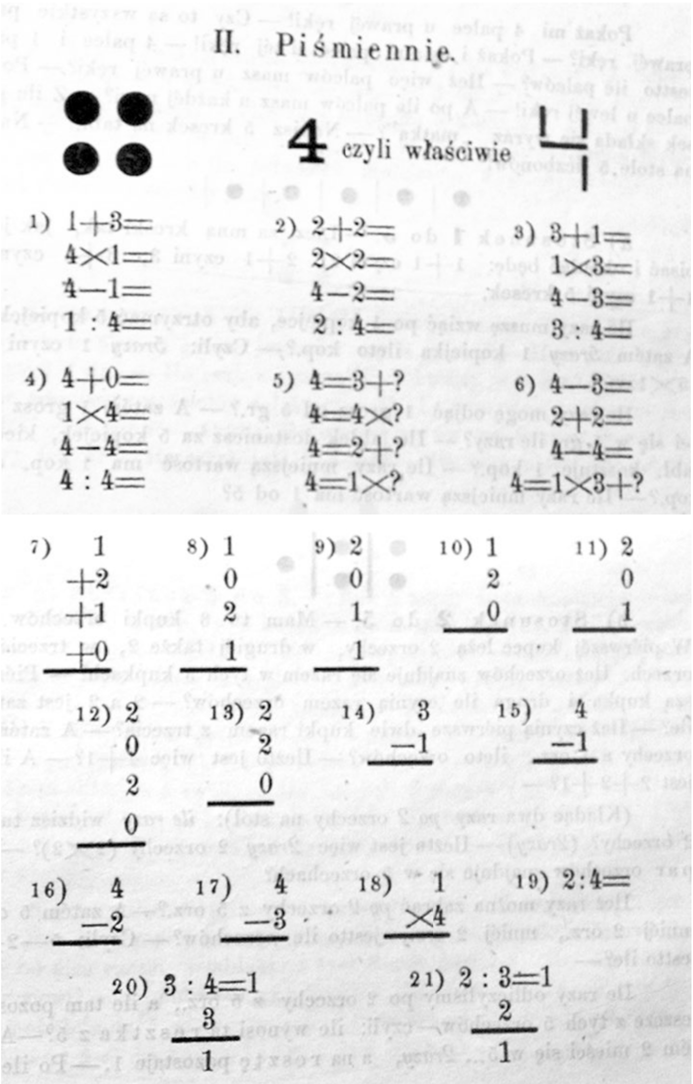
➢ *4 książki, mniej 1 ks., ileto książek? 3 ks., mniéj 1 ks., ileto ks.? 2 ks., mniéj 1 ks., ileto ks.? 1 ks., ileto książek. A zatém: 4 ks. mniéj 1 ks., mniej 1 k., mniej 1 k., mniej 1 k., ileto książek? – Czyli 4 – 1 – 1 – 1 – 1 =?*

➢ *Ile razy można wziąć 1 książkę z 4 ks.? – A zatém: 1książka mieści się w 4 ks. ile razy? – Czyli 1:4=? („1 w 4 mieści się ile razy).*

Potem nastepują pytania dotyczące miar powierzchni, pojemności, operacji na pięniadzach.

1 kwarta, i 1 kw., i 1 kw., i 1 kw., ileto kwart? — 4 kwarty czynią 1 g a r n i e c.—Funt ma 4 ć w i e r c i.—Łokieć ma 4 ćwierci.— Rok ma 4 pory. — Józio kupił za 1 grosz wiśni; ile mu zdano na resztę, jeśli dał na to czterogroszówkę? — Ile razy muszę wlać do cebra po 1 kwarcie wody, aby mieć 1 garniec wody. — I l e r a z y w i ę k s z ą wartość mają 4 ruble od 1 r.? — Ile razy m n i e j s z ą wartość ma 1 rubel od 4 r.?

Już przy monograficznym opracowywaniu liczby 4 otrzymujemy pokaźną porcję działań arytmetycznych,[7] dzięki koncepcji jednoczesnego ich kształtowania.



II. Piśmiennie.

4 czyli właściwie

1) 1+3=
4×1=
4−1=
1 : 4=

2) 2+2=
2×2=
4−2=
2 : 4=

3) 3+1=
1×3=
4−3=
3 : 4=

4) 4+0=
1×4=
4−4=
4 : 4=

5) 4=3+?
4=4×?
4=2+?
4=1×?

6) 4−3=
2+2=
4−4=
4=1×3+?

7) 1 +2 +1 +0

8) 1 0 2 1

9) 2 0 1 1

10) 1 2 0

11) 2 0 1

12) 2 0 2 0

13) 2 2 0

14) 3 −1

15) 4 −1

16) 4 −2

17) 4 −3

18) 1 ×4

19) 2:4=

20) 3 : 4=1 3 1

21) 2 : 3=1 2 1

Z podanych przykładów wynika jasno, że Jeske proponuje jednocześnie pisemne dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, dzielenie z resztą.

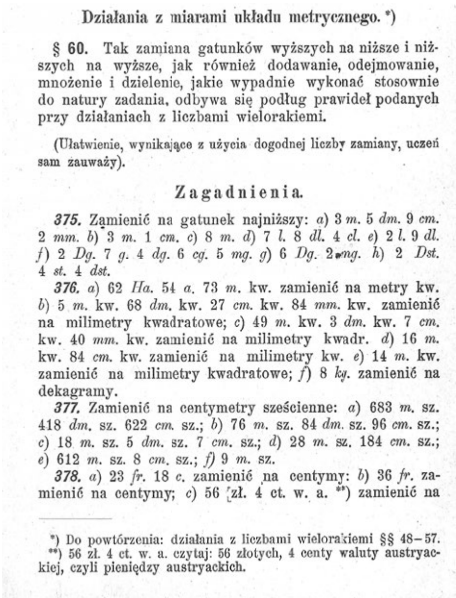
Uzasadnia to tak: niesłusznym jest patrzenie na nauczanie rachunków tylko na jako nauczenie czterech działań, reguły trzech (proporcji), ułamków. Takie spojrzenie uważa za

[7] O trafności tego założenia świadczy to, że zaleca się ją już we współcześnie opracowanej koncepcji wspomagania rozwoju umysłowego wraz z edukacją matematyczną uzdolnionych matematycznie dzieci. Zob. *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa, 2012, rozdziały części czwartej.

fałszywe. Dosłownie na każdej stronie *Arytmetyczek* opracowanych przez Jeskego dostrzega się starania o to, aby rozszerzać wiedzę o otoczeniu i przygotować uczniów do radzenia sobie w świecie liczb i zmian, jakie miały miejsce wraz ze zmianami w sposobach pomiaru wielkości.

Dotyczy to szczególnie podręcznika do nauki arytmetyki (trzecie wydanie, jak udało mi się ustalić, *Arytmetyki* miało miejsce w Warszawie 1873 r, dla potrzeb artykułu korzystamy z wydania VI (1904), opracowanego i uzupełnionego przez Zbigniewa Kamińskiego (1847–1915). W podręczniku tym podkreśla, że we Francji na początku wieku wprowadzono miary odznaczajace się wielką prostotą i łatwością w użyciu. System ten przyjęło wiele krajów, m.in. Austria i Niemcy.

Doceniając to Jeske dokonał uzupełnień do wcześniej opracowanej koncepcji nauczania matematyki klarownie wyjaśnia: *Uczeni zmierzyli część odległości od równika ziemskiego do bieguna*[8]; *stąd wywnioskowali o całej tej odległości; podzielili ja potem na 10 milinów części równych i jedna taka część przyjęli za miarę długości; miarę tę nazwali* <u>*metrem*</u>. Wymieniono słowa greckie dla miar 10, 100, 1000, 10 000 razy większych: *deko, hekto, kilo, myrya*, które zostały dodane do wyrazu metr i slowa łacińskie: *deci*, *centi, mili*, dla oznaczenia miar 10, 100, 1000 razy mniejszym. Całość dopełnia informacja o tym, które miary gdzie są używane i jak się one nazywają (część nazw dzisiaj jest nieużywana).[9]



Działania z miarami układu metrycznego. *)

§ 60. Tak zamiana gatunków wyższych na niższe i niższych na wyższe, jak również dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, jakie wypadnie wykonać stosownie do natury zadania, odbywa się podług prawideł podanych przy działaniach z liczbami wielorakiemi.

(Ułatwienie, wynikające z użycia dogodnej liczby zamiany, uczeń sam zauważy).

Zagadnienia.

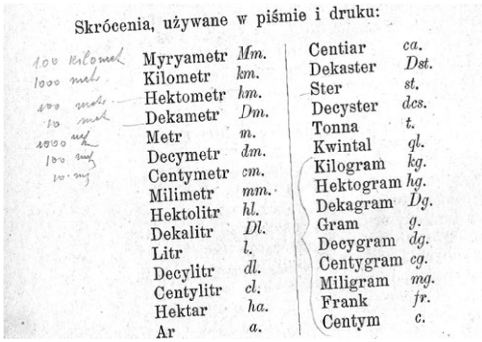
375. Zamienić na gatunek najniższy: *a*) 3 *m.* 5 *dm.* 9 *cm.* 2 *mm.* *b*) 3 *m.* 1 *cm.* *c*) 8 *m.* *d*) 7 *l.* 8 *dl.* 4 *cl.* *e*) 2 *l.* 9 *dl.* *f*) 2 *Dg.* 7 *g.* 4 *dg.* 6 *cg.* 5 *mg.* *g*) 6 *Dg.* 2 *mg.* *h*) 2 *Dst.* 4 *st.* 4 *dst.*

376. *a*) 62 *Ha.* 54 *a.* 73 *m.* kw. zamienić na metry kw. *b*) 5 *m.* kw. 68 *dm.* kw. 27 *cm.* kw. 84 *mm.* kw. zamienić na milimetry kwadratowe; *c*) 49 *m.* kw. 3 *dm.* kw. 7 *cm.* kw. 40 *mm.* kw. zamienić na milimetry kwadr. *d*) 16 *m.* kw. 84 *cm.* kw. zamienić na milimetry kw. *e*) 14 *m.* kw. zamienić na milimetry kwadratowe; *f*) 8 *kg.* zamienić na dekagramy.

377. Zamienić na centymetry sześcienne: *a*) 683 *m.* sz. 418 *dm.* sz. 622 *cm.* sz.; *b*) 76 *m.* sz. 84 *dm.* sz. 96 *cm.* sz.; *c*) 18 *m.* sz. 5 *dm.* sz. 7 *cm.* sz.; *d*) 28 *m.* sz. 184 *cm.* sz.; *e*) 612 *m.* sz. 8 *cm.* sz.; *f*) 9 *m.* sz.

378. *a*) 23 *fr.* 18 *c.* zamienić na centymy: *b*) 36 *fr.* zamienić na centymy; *c*) 56 zł. 4 ct. w. a. **) zamienić na

*) Do powtórzenia: działania z liczbami wielorakiemi §§ 48–57.
**) 56 zł. 4 ct. w. a. czytaj: 56 złotych, 4 centy waluty austryackiej, czyli pieniędzy austryackich.



Skrócenia, używane w piśmie i druku:

Myryametr	*Mm.*	Centiar	*ca.*
Kilometr	*km.*	Dekaster	*Dst.*
Hektometr	*hm.*	Ster	*st.*
Dekametr	*Dm.*	Decyster	*dcs.*
Metr	*m.*	Tonna	*t.*
Decymetr	*dm.*	Kwintal	*ql.*
Centymetr	*cm.*	Kilogram	*kg.*
Milimetr	*mm.*	Hektogram	*hg.*
Hektolitr	*hl.*	Dekagram	*Dg.*
Dekalitr	*Dl.*	Gram	*g.*
Litr	*l.*	Decygram	*dg.*
Decylitr	*dl.*	Centygram	*cg.*
Centylitr	*cl.*	Miligram	*mg.*
Hektar	*ha.*	Frank	*fr.*
Ar	*a.*	Centym	*c.*

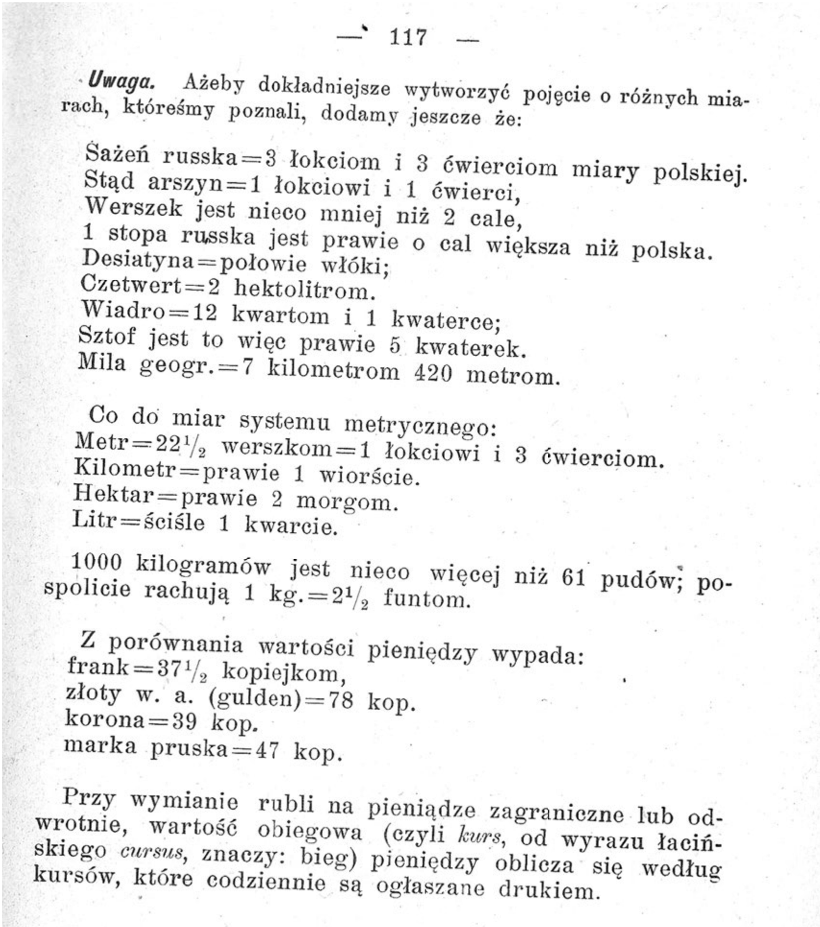
Fragment dotyczący nazw miar w systemie metrycznym podanym w *Arytmetyce* Jeskego.

Powyżej podajemy jeszcze fragment z *Arytmetyki* Jeskego związany z działaniami na miarach układu metrycznego.

[8] Autor proponuje wykorzystać globus i wyjaśnić wymienione pojęcia, pokazać równik i bieguny ziemi.

[9] Przeszło sto lat później ustalenia A. Jeskego doceniła E. Gruszczyk-Kolczyńska (*Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz opisy zajęć z dziećmi*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawnictwo CEBP, Kraków, 2014, s. 164 i 189), gdy poszukiwała metodyki zapoznawania dzieci z liczbami mianowanymi.

Nie ulega wątpliwości, że dzięki ustaleniom A. Jeskego wprowadzono do nauczania arytmetyki układ metryczny (tym samym nastąpiło dołączenie miar dziesiętnych). Nie oznacza to, że zapomniano o innych miarach, ale informacje o nich pełnią już rolę drugorzędną.



— 117 —

Uwaga. Ażeby dokładniejsze wytworzyć pojęcie o różnych miarach, któreśmy poznali, dodamy jeszcze że:

Sażeń russka = 3 łokciom i 3 ćwierciom miary polskiej.
Stąd arszyn = 1 łokciowi i 1 ćwierci,
Werszek jest nieco mniej niż 2 cale,
1 stopa russka jest prawie o cal większa niż polska.
Desiatyna = połowie włóki;
Czetwert = 2 hektolitrom.
Wiadro = 12 kwartom i 1 kwaterce;
Sztof jest to więc prawie 5 kwaterek.
Mila geogr. = 7 kilometrom 420 metrom.

Co do miar systemu metrycznego:
Metr = 22½ werszkom = 1 łokciowi i 3 ćwierciom.
Kilometr = prawie 1 wiorście.
Hektar = prawie 2 morgom.
Litr = ściśle 1 kwarcie.

1000 kilogramów jest nieco więcej niż 61 pudów; pospolicie rachują 1 kg. = 2½ funtom.

Z porównania wartości pieniędzy wypada:
frank = 37½ kopiejkom,
złoty w. a. (gulden) = 78 kop.
korona = 39 kop.
marka pruska = 47 kop.

Przy wymianie rubli na pieniądze zagraniczne lub odwrotnie, wartość obiegowa (czyli *kurs*, od wyrazu łacińskiego *cursus*, znaczy: bieg) pieniędzy oblicza się według kursów, które codziennie są ogłaszane drukiem.

Fragment *Arytmetyki* Jeskego z uwagami związanymi z miarami rosyjskimi.

Analizując późniejsze koncepcje matematycznego kształcenia dzieci można stwierdzić, że przytoczone ustalenia pedagogiczne Jeskego stały się podstawą bodaj wszystkich następnych koncepcji matematycznego kształcenia dzieci. Skorelowano ze sobą: kształcenie pojęć liczbowych uporządkowanych poprzez system dziesiątkowy i system dziesiątkowy jako baza dla kształtowania sensu mierzenia i dziesiątkowej logiki jednostek pomiarowych.

To, w jaki sposób Jeske osadził dziesiątkowy w edukacji matematycznej dzieci jest tak znaczące, że można to uznać za **kamień milowy matematycznego kształcenia na poziomie edukacji wczesnoszkolnej**. Ustalenia Jeskego spowodowały **edukacyjną metamorfozę systemu dziesiątkowego – zaczęto traktować go jako podstawę zarówno kształtowania pojęć**

liczbowych i umiejętności rachunkowych, jak wdrażania dzieci do rozumienia sensu pomiaru wielkości ciągłych i kształtowania umiejętności mierzenia.

Postaramy się to wykazać omawiając następne kamienie milowe historii edukacji matematycznej dzieci.

Opracowana ponad 30 lat później metodyka nauczania dzieci arytmetyki i geometrii przez L. Jeleńską (przy współpracy z M. Rusieckim) połączyła oba w/w skorelowane ze sobą zakresy kształcenia oparte na systemie dziesiątkowym.

Informacje biograficzne: **Ludwika W. Jeleńska** (1885–1961)[10]

Urodziła się 17 kwietnia 1885 w Warszawie w rodzinie Jana i Ludwiki z Czajewskich. Była siostrą Szczepana – autora bestseleru *Śladami Pitagorasa*. W 1915 na Uniwersytecie we Fryburgu uzyskała stopień doktora na podstawie pracy *La construction du systèmes philosophique d'après saint Thomas d'Aquin* (Thèse présente par Louise Jeleńska à la Faculté des Lettres de l'Université de Fribourg. Fribourg, Suisse: Imprimerie de l'Oeuvre de Saint-Paul, 1915). W okresie międzywojennym pracowała w Państwowym Seminarium Nauczycielskim Żeńskim im. E. Orzeszkowej w Grodnie, gdzie wykładała metodykę nauczania początkowego i propedeutykę filozofii. Wspólnie z M. Rusieckim opublikowała wielokrotnie wznawianą *Metodykę arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania* (1939). Po zakończeniu wojny osiadła w Poznaniu, gdzie w dalszym ciągu zajmowała się metodyką nauczania matematyki w szkole powszechnej. Opublikowała książkę *Szkoła kształcąca* (1945). Interesowała się także zagadnieniami dogmatycznymi katolicyzmu; religii poświęciła kilka własnych książek i tłumaczeń wydanych w Poznaniu przed 1939. W czasach komunizmu nie korzystano z jej rad.

Zmarła 27 kwietnia 1961 w Poznaniu.

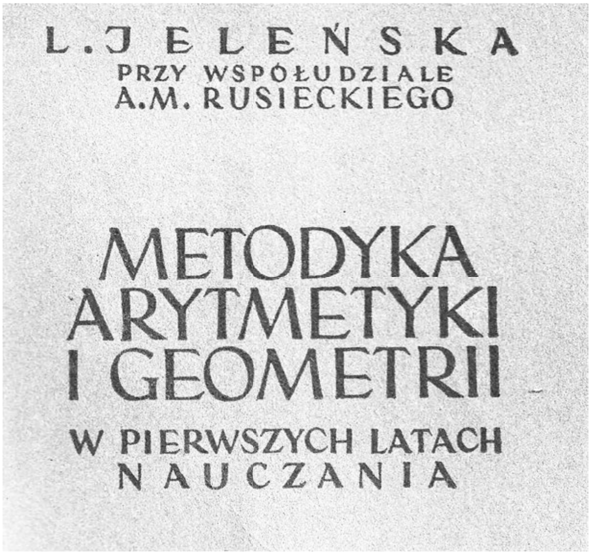
Marian A. Rusiecki (1892–1956)[11]

Urodził się 23 marca 1892 w Bodzechowie koło Kielc. W 1916 ukończył Wydział Matematyczno-Fizyczny Uniwersytetu Kijowskiego. Przez trzy lata pracował jako nauczyciel w gimnazjum polskim w Kijowie, a od 1919 uczył w seminarium nauczycielskim w Białymstoku. W 1922 przeniósł się do Warszawy, gdzie przez 16 lat pełnił obowiązki instruktora matematyki w Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, jednocześnie uczył w wielu warszawskich szkołach. W czasie okupacji brał udział w tajnym nauczaniu i prowadził antykwariat. Został wywieziony po Powstaniu Warszawskim, w 1945 pracował jako nauczyciel w wiejskiej szkole podstawowej. Po powrocie do Warszawy został redaktorem działu matematyki w Państwowych Zakładach Wydawnictw Szkolnych. W latach 1953–1956 pracował w Państwowym Wydawnictwie Naukowym jako redaktor, a potem jako doradca naukowy. Wykładał również metodykę nauczania matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, był współzałożycielem czasopisma dla nauczycieli *Matematyka*, brał udział w pracach komisji programowej Ministerstwa Oświaty. W 1930 założył i redagował ważne czasopismo dla nauczania matematyki *Parametr*. Był autorem lub współautorem orygi-

[10] W. Piotrowski, *L. Jeleńska*, [w]: Słownik Biograficzny Matematyków Polskich, red. S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, PWSZ Tarnobrzeg, 2003.
[11] W. Piotrowski, *M. Rusiecki*, [w]: Słownik Biograficzny Matematyków Polskich, red. S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, PWSZ Tarnobrzeg, 2003.

nalnych podręczników szkolnych, opracowań metodycznych, był członkiem Komisji Głównej Olimpiady Matematycznej.

Zmarł 17 listopada 1956 w Warszawie.


L. JELEŃSKA
PRZY WSPÓŁUDZIALE
A.M. RUSIECKIEGO

METODYKA
ARYTMETYKI
I GEOMETRII
W PIERWSZYCH LATACH
NAUCZANIA

L. Jeleńska, A. Rusiecki: *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, Pierwsze wydanie: Księgarnia św. Wojciecha, 1939 (204 s.), powojenne wydania mają mniej stron, nie ma też informacji o wydaniu, nakładzie i pierwowzorze przedwojennym.

Autorka wyraźnie zaznaczyła: *Ważnym* […] *pojęciem podstawowym, które dzieci musza zdobyć już w I klasie (chociaż nie w całej rozciągłości), jest pojęcie* ***systemu dziesiątkowego***.Zaleca wyodrębnienie *dziesiątki* jako *grupy podstawowej*. Godnym zauważenia jest jej rozumienie tego wyodrębnienia: *jako specjalne troskliwe ćwiczenie* i *uwypuklenie naszego systemu rachunkowego*. Kiedy dziecko przejdzie do drugiej i trzeciej, następnych dziesiątek to według autorów samodzielnie zdobędzie *pojęcie powracającej dziesiątki jako porządkującej liczenie*. Pojęcie takie to nie jest uważane za równoznaczne z pojęciem systemu dziesiątkowego, jest jego podłożem (podkreślenie S.D.). Momentami przełomowymi o szczególnym znaczeniu metodycznym u Jeleńskiej są: *Przekraczanie progu dziesiątkowego w dodawaniu, w odejmowaniu i dodawanie „kilkunastu”*. Dziecko powinno w trakcie nauki krystalizować pojęcie systemu pozycyjnego, w tym ważnej informacji, że każda jednostka wyższego rzędu zawiera 10 jednostek niższego rzędu.

Opracowana przez L. Jeleńską metodyka na kolejne długie lata wyznaczyła przebieg sposobu kształtowania pojęć i umiejętności matematycznych dzieci.

Równolegle ważność układu dziesiętnego w nauczaniu podkreślili Polskiej Szkoły Matematycznej: S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek. W podręczniku[12] napisanym przez nich

[12] Po odzyskaniu niepodległości przez Polskę w listopadzie 1918 roku, szkolnictwo polskie znalazło się w dużych kłopotach. Wynikały one z istnienia nie tylko różnych typów szkół, lecz również z różnych systemów szkolnictwa w trzech zaborach. Pierwsza reforma została przeprowadzona w latach 1919–1922. Podręczniki pisane przez S. Banacha z współautorami były dostosowane do przeprowadzonej Polsce reformy szkolnej braci

Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej (Lwów – Warszawa, 1933)[13] tak prowadzili układ dziesiętny:

ROZDZIAŁ I

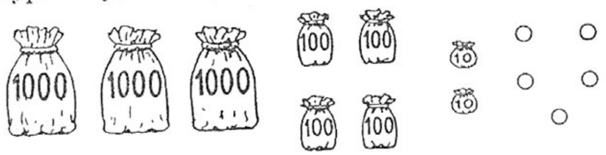
Układ dziesiętny

§ 1. Pisanie liczb w układzie dziesiętnym

L i c z e n i e. Jeżeli mamy policzyć dużo jakichś przedmiotów np. kulek, to możemy to zrobić w następujący sposób:

Łączymy kulki w dziesiątki, te dziesiątki zbieramy po dziesięć w setki, otrzymane setki łączymy po dziesięć w tysiące itd. Tak postępuje kasjer mając do liczenia dużo monet np. jednozłotowych.

Przypuśćmy, że otrzymaliśmy, jak na rys. 1



Rys. 1.

3 tysiące, 4 setki, 2 dziesiątki i 5 kulek osobno. Wszystkich kulek jest więc trzy tysiące czterysta dwadzieścia pięć.

Jeden przedmiot (jedną kulkę) nazywamy j e d n o s t k ą p i e r w s z e g o r z ę d u lub krótko j e d n o s t k ą, dziesiątkę nazywamy j e d n o s t k ą d r u g i e g o r z ę d u, setkę j e d n o s t k ą t r z e c i e g o r z ę d u itd.

Na następującej tablicy zaznaczone mamy jednostki aż do rzędu trzynastego.

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Rząd
biliony (tysiące miliardów)	setki miliardów	dziesiątki miliardów	miliardy (tysiące milionów)	setki milionów	dziesiątki milionów	miliony (tysiące tysięcy)	setki tysięcy	dziesiątki tysięcy	tysiące	setki	dziesiątki	jednostki	

Fragment z podręcznika *Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej.*

Jędrzejewiczów z lat 1932–1933. Według tej reformy obowiązywał następujący model kształcenia: Szkoła powszechna – 6 lat, szkoły średnie: jednolite gimnazjum – 4 lata, zróżnicowane liceum – 2 lata. Była też klasa VII (kończąca) w szkole powszechnej, zamiast I gimnazjum.

[13] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek: *Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej*, Lwów – Warszawa, 1933.

Banach, Sierpiński i Stożek układ dziesiętny wprowadzają semantycznie. Semantyka podana przez wybitnych matematyków jest na dwóch poziomach, zarówno dla ucznia zdolnego i mniej zdolnego. Dla zdolnego słowo jakichś będzie modelem generowany, zaś dla mniej zdolnego mamy model izolowany, który dotyczy kulek Zauważmy, że to samo pojęcie jest dla uczniów o różnych poziomach mentalnych. Zaprezentowaną sytuacją dydaktyczną (*Łączymy kulki w dziesiątki, te zbieramy po dziesięć w setki ...*) możemy manipulować, jak by tu było z pieniędzmi.

Zwróćmy uwagę na tabelkę, której analiza dostarczy uczniowi nazw liczb, procesu ich tworzenia, jak również w świadomości niektórych z nich może zrodzić się pytanie co dalej, jak dalej możemy tworzyć następne jednostki. Przy tej analizie ważny jest związek między filogenezą a ontogenezą. W dobie Arystotelesa nie było możliwości poznania tak dużych liczb, przy pomocy rzymskich znaków nie zapiszemy miliona.

Następnie autorzy podręcznika w formie pisanego wyjaśnienia informują, *że 10 jednostek tworzy dziesiątkę, a więc dziesięć jednostek rzędu pierwszego rzędu równa się jednostce drugiego rzędu. 10 jednostek tworzy setkę, a więc dziesięć jednostek drugiego rzędu równa się jednostce trzeciego rzędu ...*

Konsekwentnie profesorowie matematyki, autorzy podręcznika semantykę prowadzą na dwóch poziomach.

P i s a n i e l i c z b. Do zapisywania liczb używamy dziesięciu znaków, zwanych cyframi:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .

dla ucznia zdolnego	**dla ucznia mniej zdolnego**
Przy pomocy tych znaków możemy zapisać każdą liczbę.	Np. liczbę trzy tysiące czterysta dwadzieścia pięć zapisujemy: 3425
Każda z cyfr wskazuje ilość jednostek tego rzędu, na którym stoi	(licząc od ręki prawej ku lewej). A zatem liczba zawiera 5 jednostek, 2 dziesiątki, 4 setki i 3 tysiące.
Brak jednostek jakiegoś rzędu oznaczamy cyfrą zero, umieszczając ją na odpowiednim miejscu.	Np. w liczbie 5036 cyfra zero oznacza brak setek.

C z y t a n i e l i c z b. Liczbę odczytujemy w następujący sposób: dzielimy najpierw liczbę na klasy po t r z y c y f r y (od prawej ręki ku lewej).

dla ucznia zdolnego	**dla ucznia mniej zdolnego**
Np. a) 15 345 tys. b) 25 276 476 milionów tysięcy	Następnie odczytujemy każdą klasę, wymieniając jednostkę najniższego rzędu danej klasy.
A więc czytamy: a) 15 tysięcy 345, b) 25 milionów 276 tysięcy 456.	Możemy również dzielić liczbę na klasy po sześć cyfr. Np. 53 456714 712342 bilionów milionów
	Czytamy: 53 bilionów 456714 milionów 712342

Zatem, ci wybitni matematycy Polskiej Szkoły Matematycznej pisali w ten sposób podręcznik, aby nauczyciele mogli uczniom otworzyć świat matematyki najbardziej adekwatnym sposobem. Nie przedkładali matematycznej precyzji nad zrozumienie, dbali o wykładową, ilustracyjną, i zadaniową funkcje podręcznika. Ich podręczniki miały szerokie spektrum, daje się wyraźnie zauważyć części przeznaczone dla uczniów słabszych i zdolniejszych. Uczeń z takiego podręcznika może korzystać samodzielnie, ale podręcznik pomaga istotnie nauczycielowi w jego pracy. Podane w podręczniku sytuacje dotyczące codziennych doświadczeń uczniów są z różnych dziedzin, co w umysłach uczniowskich może budzić potrzebę ujęcia tych sytuacji w sposób ogólniejszy, co w konsekwencji prowadzić może do abstrahowania.

Podkreślić tu trzeba, że ustalenia metodyczne L. Jeleńskiej oraz S. Banacha, W. Sierpińskiego i W. Stożka to następny **kamień milowy w matematycznym kształceniu dzieci na drodze wyznaczonej wcześniej przez A Jeskego.** Ustalenia te wyznaczyły w czasach powojennych miejsce i sposoby zapoznawania dzieci z dziesiątkowym systemem liczenia oraz korzystania z niego w działalności matematycznej.

Kolejna zmiana o randze **kamienia milowego** w ustalaniu miejsca dziesiątkowego systemu liczenia w edukacji dzieci odbyła się na przełomie wieków XX i XXI. Jest ona konsekwencją badań nad prawidłowościami kształtowania się umiejętności liczenia.

Wymienić tu trzeba badania R. Gelmam[14] oraz polskie badania zrealizowane przez E. Gruszczyk-Kolczyńską.[15] W badaniach tych ustalono, że umiejętność liczenia kształtuje się w umysłach dzieci tak, jak gramatyka języka ojczystego. Opisano, jak dzieci odkrywają i przyswajają sobie reguły, które są stosowane w trakcie liczenia i stosując je doskonalą umiejętność liczenia. R. Gelman ustaliła, że są to: reguła jeden do jednego, reguła niezależności porządkowej, reguła kardynalności i reguła abstrakcji. Na podstawie badań E. Gruszczyk-Kolczyńska potwierdziła sposoby ustalania tych reguł przez dzieci i dodała jeszcze jedną – dostrzeganie regularności dziesiątkowego systemu liczenia i korzystanie z nich. Odkrycie tej reguły pozwala dzieciom liczyć w coraz szerszym zakresie, jest podstawą prawidłowego zapisywania liczb i doskonalenia umiejętności rachunkowych we wszystkich etapach edukacji szkolnej.

E. Gruszczyk-Kolczyńska opracowała na tej podstawie edukacyjny model wspomagania dzieci w kształtowaniu się liczenia w edukacji przedszkolnej i szkolnej. W ksiażce[16] *Eduakcja matematyczna w klasie I* postuluje też wydzielenie edukacji matematycznej z kształcenia zintegrowanego, bowiem kilkuletnia praktyka szkolna dowodzi, ze realizacja edukacji matematycznej w konwencji zintegrowanego kształcenia przynosi dużo szkód. Ukazuje również o co zadbać i czego unikać, aby dzieci lubiły uczyć się matematyki i odnosiły sukcesy edukacyjne, potem życiowe. Z jej badań[17] nad uzdolnieniami matematycznymi wynika, że dzieci w szkole tracą radość uczenia się matematyki i stają się mniej twórcze. Poniżej zamieszczamy fragmenty ze wspomnianej ksiażki *Eduakcja matematyczna w klasie I*, w któ-

[14] R. Gelman: *What young children know about numbers*, Educational Psychologist 15(1980), 54–68, oraz R. Gelman i C. R. Gallistel: *The child's understanding of number*, Harvard University Press, 1978.

[15] *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki, Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa, 1992, i 13 następnych wydań, rozdział 2.

[16] *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla rodziców i nauczycieli*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawca CEBP, Kraków, 2014.

[17] *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wyd. Nowa Era, Warszawa, 2012, rozdział 5.

rych autorka traktuje o wadach tradycyjnego sposobu przekraczania progu dziesiątkowego i o rozwiązywaniu zadań okienkowych.

O wadach tradycyjnego sposobu przekraczania progu dziesiątkowego i proponowane zmiany

Ze względu na szczególną rolę liczby 10 w dziesiątkowym systemie liczenia w tradycyjnej metodyce zaleca się taki sposób postępowania w dodawaniu i odejmowaniu:

- przy obliczaniu sumy typu **8 + 6 = ...** dziecko ma wykonać kolejno takie czynności:
  a) przeczytać działanie i rozłożyć liczbę **6** na składniki **2 i 4** (bo tylko w taki sposób można w tym działaniu[15] dopełnić do dziesiątki),
  b) zapisać **8 + (2 + 4) = ...**, ale nie wpisywać sumy,
  c) przekształcić to działanie w taki sposób **(8 + 2) + 4 = ...** nie wpisywać sumy,
  d) jeszcze raz przekształcić działanie w taki sposób **10 + 4 = ...** i wpisać sumę **14;**
- gdy dziecko oblicza różnicę np. **14 – 7 = ...** ma kolejno wykonać takie czynności:
  a) po przeczytaniu działania[16] liczbę **7** rozkłada na składniki **4 i 3** i zapisuje **14 – (4 + 3) = ...**, nie wpisuje różnicy,
  b) przekształcić działanie w taki sposób **(14 – 4) – 3 = ...** ale nadal nie wpisuje wyniku,
  c) jeszcze raz przekształcić działanie tak **10 – 3 = ...** i może już zapisać różnicę 7.

Mamy tu do czynienia z paradoksem: obliczenie sum typu **8 + 6** i różnic typu **14 – 7** jest dla dzieci łatwe, bo mogą korzystać np. z liczydła. Natomiast wykonanie kolejnych przekształceń z zastosowaniem symboli przekracza znacznie możliwości intelektualne dzieci. Wszak dopiero zaczynają rozumować operacyjnie na poziomie konkretnym i z wielkim trudem uczą się kodować i dekować czynności matematyczne z zastosowaniem cyfr – symboli liczb i znaków działań. Dlatego opisany sposób przekraczania progu dziesiątkowego jest dla dzieci niezrozumiały, nie widzą też sensu we wstrzymywaniu się przed podaniem sumy lub różnicy do momentu ukończenia przekształceń.

Przytoczony fragment publikacji pokazuje też, jak zmienił się sposób przedstawiania problemów edukacyjnych. Nacisk położony jest na jest teraz umiejętne kierowanie procesem uczenia się dzieci, aby zbudowały w swoim umyśle określone pojęcia i umiejętności matematyczne. Od nauczyciela wymaga się więc solidnej wiedzy psychologicznej i dobrej znajomości modeli kształtowania pojęć i umiejętności matematycznych. Dowodem jest następny fragment książki dla rodziców i nauczycieli o edukacji matematycznej dzieci.

W monografii liczb drugiej dziesiątki trzeba nadal dbać o rozwijanie umiejętności rachunkowych, ze zwróceniem uwagi na operacyjne rozumowania. Chodzi o **rozwiązywanie zadań okienkowych**[19], ale już z przekroczeniem progu dziesiątkowego. Nie będzie to dla dzieci zbyt trudne, jeżeli nauczyciel skorzysta z moich doświadczeń.

Zacząć trzeba od przemiennego układania i rozwiązywania zadań przez dzieci w parach. Mają woreczek oraz 16 ziaren fasoli (kamyków, patyczków) i liczydło (10 + 10 + 10). Jedno dziecko zamyka oczy, drugie chowa do woreczka tyle ziaren fasoli, ile chce. *Mówi: otwórz oczy. Fasolki są na stole i w woreczku, razem jest ich szesnaście. Ile fasolek schowałem do woreczka.* Zapytane dziecko może skorzystać z liczydła, może na palcach doliczać, może rachować w pamięci. Gdy poda liczbę, sprawdza, czy ona zgadza się z liczbą fasolek wysypanych z woreczka. Potem następuje zmiana ról.

Z moich doświadczeń wynika, że dzieci chętnie korzystają z liczydła i tak ma być. Po kilku takich naprzemiennie układanych i rozwiązywanych zadaniach nauczyciel stwierdza *Można takie zadania zapisywać tak*:

5 + □ = 16   7 + □ = 16   4 + □ = 16

Poleca rozwiązać te zadania i radzi *Można pomagać sobie rachowaniem na liczydle, na kasztanach. Kto już będzie wiedział, podniesie rękę, podejdę i jeżeli wynik będzie dobry, można będzie rozwiązane zadanie zapisać w swoim zeszycie.*

W podobny sposób dzieci doskonalą odejmowanie w zadaniach okienkowych. Także mają woreczek, 16 ziaren fasoli (kamyków, patyczków) i liczydło (10 + 10 + 10). Jedno dziecko zamyka oczy, drugie chowa do woreczka, tyle ziaren fasoli, ile chce. *Mówi: otwórz oczy. Na stole było 16 fasolek, zabrałem kilka i włożyłem do woreczka. Zastało tyle fasolek – policz je. Ile fasolek zabrałem?* Zapytane dziecko może skorzystać z liczydła, może na palcach doliczać, może rachować w pamięci. Gdy poda liczbę zabranych fasolek, sprawdza czy zgadza się z liczbą fasolek wysypanych z woreczka. Potem zmiana ról. Także w tej serii zadań dzieci chętnie korzystają z liczydła.

19) Podobnie, jak w monografii pierwszej dziesiątki należy respektować zasadę stopniowania trudności. W trakcie monograficznego opracowania liczb drugiej dziesiątki nadal uczymy dzieci rozwiązywać najłatwiejszy typ zadań okienkowych. W następnych rozdziałach przedstawię, jak wdrażać dzieci do rozwiązywania trudniejszego typu zadań okienkowych.

Fragmenty podręcznika metodycznego E. Gruszczyk-Kolczyńskiej: *Edukacja matematyczna w klasie I.*

Zakończenie

Zadziwiające jest to, że w koncepcjach edukacyjnych A. Jeskego, L. Jeleńskiej oraz S. Banacha, W. Sierpińskiego i W. Stożka odnaleźć można wiele rozwiązań metodycznych, które są na miarę współczesnej wiedzy psychologicznej i pedagogicznej. Dotyczy to nie tylko roli dziesiątkowego systemu liczenia w edukacji matematycznej dzieci. Warto więc sięgnąć do tych opracowań i odczytać je na nowo, z korzyścią dla podniesienie poziomu edukacji matematycznej.

Warto sięgać do źródeł historycznych, korzystać z propozycji dydaktycznych tam zawartych, modyfikować je odczytując je na nowo, dostosowywać do obecnych propozycji. Koniecznym wydaje się zapoznawanie z nimi czynnych i przyszłych nauczycieli.

Literatura

[1] Banach S., Sierpiński W., Stożek W.: *Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej*, Lwów – Warszawa, 1933.

[2] Domoradzki S.: *Remarks concerning the texbook "Arithmetics and geometry" for 5 class of primary school by S. Banach, W. Sierpiński and W. Stożek,* in: *Education, Science and Economics at Universities. Integration to International Educational Area*, Wydawnictwo Novum, Płock, 2008, pp. 659–667.

[3] Gelman R., Gallistel C. R.: *The child's understanding of number*, Harvard University Press, 1978.

[4] Gelman R.: *What young children know about numbers*, Educational Psychologist, 15(1980), pp. 54–68.

[5] Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki, Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa, 1992.

[6] Gruszczyk-Kolczyńska E. (ed.): *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa, 2012.

[7] Gruszczyk-Kolczyńska E. (ed.): *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla rodziców i nauczycieli*, Wydawca CEBP, Kraków, 2014.

[8] Jeske A.: *Arytmetyczka dla dzieci*, nakładem Księgarni Stanisława Arcta w Lublinie, Warszawa, 1873.

[9] Jeske A.: *Pedagogika, obejmująca zasady i metody moralnego, fizycznego i naukowego wychowania dziatek*, nakładem Księgarni Stanisława Arcta w Lublinie, Warszawa, 1875.

[10] Jeske A.: *Arytmetyka*, *Kurs* elementarny, nakładem i drukiem Michała Arcta, Warszawa, 1904.

[11] Jeleńska L., przy współudziale Rusieckiego M.: *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, Księgarnia św. Wojciecha, Poznań, 1939.

[12] Piaget J.: *Równoważenie struktur poznawczych. Centralny problem rozwoju*, PWN, Warszawa, 1981.

[13] Piotrowski W.: *M. Rusiecki*, [w]: *Słownik Biograficzny Matematyków Polskich*, Domoradzki S., Z. Pawlikowska-Brożek Z., Węglowska D. (eds), PWSZ, Tarnobrzeg, 2003.

[14] Piotrowski W.: *L. Jeleńska*, [w]: *Słownik Biograficzny Matematyków Polskich*, Domoradzki S., Z. Pawlikowska-Brożek Z., Węglowska D. (eds), PWSZ, Tarnobrzeg, 2003.

[15] Piramowicz G.: *Powinności nauczyciela* (1787), WSiP, Warszawa, 1988.

[16] Szuman S.: *Rozwój pytań u dziecka. Badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań*, w: *Dzieła wybrane*, tom 1, WSiP, Warszawa, 1985.

[17] Wachułka A.: *A. Jeske*, [w]: *Słownik Biograficzny Matematyków Polskich*, Domoradzki S., Z. Pawlikowska-Brożek Z., Węglowska D. (eds), PWSZ, Tarnobrzeg, 2003.

Adres

Dr hab., prof. UR Stanisław Domoradzki
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski
35-951 Rzeszów
Ul. Prof. S. Pigonia 1
e-mail: *domoradz@ur.edu.pl*

O NĚKTERÝCH KLASICKÝCH NEROVNOSTECH

Antonín Slavík

Abstract: The text focuses on the early history of several classical inequalities, in particular the AM-GM inequality, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, and Jensen's inequality. We revisit their original proofs, and also examine the context in which these inequalities appeared for the first time.

Úvod

Nerovnosti patří mezi nepostradatelné nástroje ve všech odvětvích moderní matematiky. K tomu, že se staly samostatným předmětem systematického studia, došlo až v 19. století. V současnosti je každoročně publikována řada monografií a článků věnovaných nerovnostem, existují i matematické časopisy zaměřené výhradně na nerovnosti a jejich aplikace (např. *Journal of Inequalities and Applications*).

Tento příspěvek se zabývá historií některých klasických nerovností, zejména nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, Cauchyovy-Bunjakovského-Schwarzovy nerovnosti a Jensenovy nerovnosti. Popíšeme, v jakém kontextu se tyto nerovnosti poprvé objevily, jak byly dokazovány a případně zobecňovány. Informace jsou čerpány především z původních pramenů a z přehledových prací [Fin, Roy], které se též věnují historii některých dalších nerovností. Řadu historických poznámek lze najít i v klasické monografii [HLP] nebo v mimořádně čtivě a srozumitelně psané knize [Stl].

1. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

K nejstarším známým nerovnostem patří vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG nerovnost): *Pro každou n-tici nezáporných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \tag{1}$$

přičemž rovnost nastává pouze pro $x_1 = \cdots = x_n$.

V nejjednodušším případě $n = 2$ má nerovnost (1) tvar

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

nebo ekvivalentně

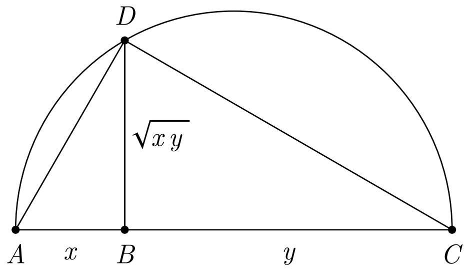
$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

přičemž rovnost nastává pouze pro $x = y$.

Obě tvrzení lze interpretovat geometricky:

1) Nechť AC je průměr půlkružnice, který je bodem B rozdělen na dvě části o délkách x, y. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ACD, kde bod D leží na dané půlkružnici a úsečka BD je kolmá na AC (obr. 1). Podle Eukleidovy věty o výšce je $|BD| = \sqrt{xy}$. Protože délka BD nikdy nebude větší než poloměr půlkružnice, platí
$$|BD| \leq \frac{|AC|}{2} = \frac{x+y}{2},$$
přičemž rovnost nastává, jen když B je středem AC, tj. když $x = y$.

2) Ze všech obdélníků, které mají obvod předepsané délky ℓ, má největší obsah čtverec o straně délky $\ell/4$. Skutečně, jsou-li x, y délky stran obdélníku, pak podle AG nerovnosti platí
$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$
a rovnost nastává, pouze když $x = y = \ell/4$.



Obr. 1: Geometrická interpretace AG nerovnosti pro $n = 2$

Tyto výsledky (a tedy vlastně i AG nerovnost pro $n = 2$) byly známy již ve starověkém Řecku.[1] Další historie AG nerovnosti je spjata až s rozvojem algebry v 17. století, zejména s prohlubováním znalostí o řešení algebraických rovnic.[2] Připomeňme známý vztah mezi kořeny a koeficienty libovolného normovaného polynomu: Jestliže $x_1, \ldots, x_n$ jsou kořeny polynomu
$$P(x) = x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^nA_n, \tag{2}$$
tj. pokud platí $P(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$, pak
$$A_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

[1] První tvrzení uvádí Pappos z Alexandrie ve 3. knize díla *Synagógé*. Druhé tvrzení platí v mnohem obecnější podobě: Ze všech n-úhelníků s předepsaným obvodem má největší obsah pravidelný n-úhelník. Theón z Alexandrie v komentáři k *Almagestu* připisuje tento výsledek Zénodórovi; jedná se o řešení tzv. izoperimetrické úlohy pro mnohoúhelníky. Pravděpodobný Zénodórův důkaz lze najít v [Tik].

[2] O vývoji algebry v 17. století podrobně pojednávají [Beč, Std1].

Koeficienty jsou tedy vcelku jednoduchými funkcemi kořenů (jedná se o tzv. elementární symetrické polynomy). Obtížnější a z praktického hlediska důležitější je obrácený problém: Co můžeme říci o kořenech daného polynomu na základě znalosti jeho koeficientů? V dalším textu budeme uvažovat pouze normované polynomy s reálnými koeficienty.

Je dobře známo, že kvadratický polynom $x^2 - A_1x + A_2$ má reálné kořeny x_1, x_2 právě tehdy, když jeho diskriminant $A_1^2 - 4A_2$ je nezáporný, tj. když $(A_1/2)^2 \geq A_2$. Zároveň víme, že $A_1 = x_1 + x_2$ a $A_2 = x_1x_2$. Odtud po úpravě plyne, že pro každá dvě reálná čísla x_1, x_2 platí

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2,$$

což je speciální případ AG nerovnosti (1) pro $n = 2$.

François Viète se v práci *De Numerosa Potestatum Resolutione*[3] z roku 1600 zabývá otázkou, za jakých okolností má kubická rovnice $x^3 - A_1x^2 + A_2x - A_3 = 0$ tři různé reálné kořeny, a bez důkazu uvádí podmínku $3\,(A_1/3)^2 > A_2$. Jako příklad zmiňuje rovnici $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, která má kořeny 1, 2, 3 a danou podmínku splňuje, neboť $3\,(6/3)^2 > 11$. Thomas Harriot v knize *Artis analyticae praxis* z roku 1631 upozorňuje, že Viètova podmínka není dostačující, neboť např. rovnice $x^3 - 6x^2 + 11x - 12 = 0$, která podmínce vyhovuje, má pouze jeden reálný kořen 4. K tomu, aby kubická rovnice měla tři navzájem různé kladné kořeny, musí podle Harriota dále platit $(A_1/3)^3 > A_3$, což ve výše uvedeném příkladu není splněno.[4]

Pokud x_1, x_2, x_3 jsou tři různé kořeny normované kubické rovnice, pak Viètovu a Harriotovu podmínku můžeme s využitím vztahu (3) přepsat do tvaru

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 > \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 > x_1x_2x_3. \tag{5}$$

Harriot dokázal, že nerovnosti (4) a (5) platí pro každá tři čísla x_1, x_2, x_3, která nejsou všechna shodná. Jeho důkazy jsou elementární, avšak poněkud zdlouhavé; lze je najít v [Std2] na str. 234–6, resp. v [SG] na str. 101–103. Ze vztahu (5), který je ekvivalentní s AG nerovností pro $n = 3$, pak Harriot odvodil výše zmíněnou podmínku $(A_1/3)^3 > A_3$. Poznamenejme, že obě nerovnosti (4), (5) představují speciální případy tzv. Maclaurinových nerovností, o kterých se zmíníme později.

[3] Viz též anglický překlad [Vie], str. 360.

[4] Harriot zemřel roku 1621. Kniha *Artis analyticae praxis* byla sestavena z dochovaných rukopisů a publikována až deset let po jeho smrti, přičemž bohužel došlo k vynechání, resp. nevhodnému přeuspořádání některých částí. O pečlivější rekonstrukci se zasloužila historička Jacqueline Stedall v knize [Std2] z roku 2003, kde jsou Harriotovy rukopisy zároveň přeloženy do angličtiny. Pasáž o Viètově podmínce týkající se kubických rovnic začíná na str. 229, Harriotova nová podmínka je uvedena na str. 232. Další anglický komentovaný překlad Harriotovy práce *Artis analyticae praxis* byl publikován roku 2007 v [SG].

Isaac Newton v knize *Arithematica universalis* [New] z roku 1707 publikoval bez důkazu následující pravidlo umožňující odhadnout počet komplexních kořenů libovolného polynomu stupně n: Začne se s posloupností zlomků

$$\frac{n}{1},\quad \frac{n-1}{2},\quad \frac{n-2}{3},\quad \dots,\quad \frac{1}{n}$$

a každý zlomek kromě prvního se vydělí předchozím zlomkem. Tím vznikne posloupnost $n-1$ čísel

$$\frac{n-1}{2n},\quad \frac{2(n-2)}{3(n-1)},\quad \frac{3(n-3)}{4(n-2)},\quad \dots,\quad \frac{n-1}{2n},$$

která se následně zapíší nad členy daného polynomu s mocninami $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^1$. V dalším kroku se pod každý z uvažovaných členů připíše znaménko plus nebo mínus podle toho, zda je druhá mocnina členu násobená číslem nad ním větší nebo menší než součin nejbližších dvou sousedních členů. Pod krajní dva členy polynomu, tj. člen s nejvyšší mocninou a absolutní člen, se vždy napíší znaménka plus. V takto získané posloupnosti všech znamének se nakonec spočítají případy, kdy se znaménka mění, čímž se získá dolní odhad počtu komplexních kořenů.[5] Protože u krajních členů jsou znaménka plus, počet znaménkových změn je vždy sudý; to je v souladu se skutečností, že polynom s reálnými koeficienty má sudý počet komplexních kořenů.

Newton celý postup demonstruje na příkladu polynomu

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q,$$

kde p, q jsou libovolná kladná čísla. Z výchozí trojice zlomků $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$ v dalším kroku vznikne dvojice zlomků $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, které se zapíší nad prostřední dva členy polynomu:

$$x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{px^2} + \overset{\frac{1}{3}}{3p^2x} - q$$

Protože platí $\frac{1}{3}p^2x^4 < 3p^2x^4$ a $\frac{1}{3}9p^4x^2 > -qpx^2$, doplníme pod prostřední dva členy znaménka plus a mínus. Po přidání znamének plus pod krajní členy vznikne následující schéma:

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & +\,px^2 & +\,3p^2x & -\,q \\ + & - & + & + \end{array}$$

Znaménka se dvakrát mění, proto bude mít uvažovaný polynom aspoň dva komplexní kořeny.

[5] Na počítání změn znamének je založeno i pravidlo Reného Descarta z roku 1637, které umožňuje odhadnout počet kladných kořenů libovolného polynomu; viz např. [Beč, Std1].

V Newtonově postupu je potřeba uvažovat i členy s nulovými koeficienty. Například u polynomu

$$x^4 - 6x^2 - 3x - 2$$

chybí kubický člen, což Newton vyznačuje hvězdičkou. Stejným postupem jako dříve pak dospěje ke schématu

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & \\ x^4 & * & -6x^2 & - & 3x & -2 \\ + & + & + & & - & + \end{array}$$

a usoudí, že polynom má aspoň dva komplexní kořeny. Nakonec ještě podává upřesňující návod pro případ, kdy jsou nulové dva nebo více po sobě jdoucích koeficientů; viz např. [Roy], str. 83.

Aplikujeme-li Newtonův postup na obecný polynom zapsaný ve tvaru (2), objeví se nad členem $(-1)^k A_k$, kde $k \in \{1, \dots, n-1\}$, číslo $\frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n-k+1}$. Znaménka plus nebo mínus pak doplňujeme podle toho, zda platí $\frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n-k+1} A_k^2 > A_{k-1} A_{k+1}$ nebo opačná nerovnost, přičemž klademe $A_0 = 1$.

Z Newtonova pravidla plyne, že pokud polynom (2) má pouze reálné kořeny, pak platí

$$\frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n-k+1} A_k^2 \geq A_{k-1} A_{k+1}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{6}$$

Jelikož je

$$\frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n-k+1} = \frac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2},$$

dají se nerovnosti (6) přepsat do tvaru

$$\left(\frac{A_k}{\binom{n}{k}} \right)^2 \geq \frac{A_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{A_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

neboli

$$E_k^2 \geq E_{k-1} E_{k+1}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \tag{7}$$

kde $E_1, \dots, E_n$ definujeme předpisem

$$E_k = \frac{A_k}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \tag{8}$$

a $E_0 = 1$.

Vztahy (7) bývají označovány jako Newtonovy nerovnosti.[6] Dnes víme, že z nich snadno plyne i AG nerovnost[7]: Logaritmováním vztahu (7) dostaneme

$$\log E_k \geq \frac{\log E_{k-1} + \log E_{k+1}}{2},$$

[6] Je užitečné nahlížet na $E_1, \dots, E_n$ jako na funkce proměnných $x_1, \dots, x_n$, přestože tuto závislost explicitně nevyznačujeme.

[7] Zdůvodnění je převzato z dvanácté kapitoly [Stl].

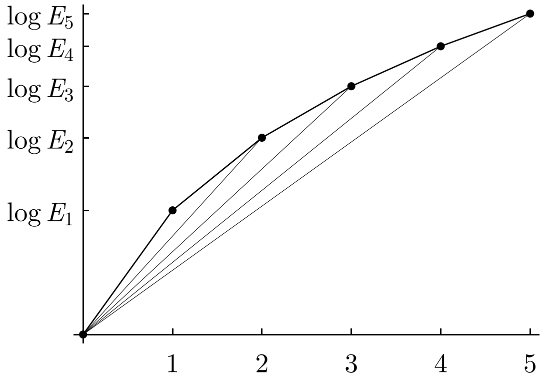
což znamená, že lomená čára procházející body $[k, \log E_k]$, $0 \leq k \leq n$, je grafem konkávní funkce (obr. 2). Nechť $L_k = (\log E_k)/k$, tj. L_k je směrnice přímky spojující body $[0,0] = [0, \log E_0]$ a $[k, \log E_k]$. Z konkávnosti plyne

$$L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_n$$

a pomocí exponenciály ihned obdržíme následující tzv. Maclaurinovy nerovnosti:

$$E_1 \geq (E_2)^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq (E_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \geq (E_n)^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

Navíc lze dokázat, že všechny nerovnosti v (9) přecházejí v rovnost právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$. Ponecháme-li v (9) pouze krajní členy, získáme AG nerovnost, neboť $E_1 = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ a $E_n = x_1 \cdots x_n$. Pro $n = 3$ ze vztahu (9) plyne jak Viètova podmínka (4), tak i Harriotova podmínka (5).



Obr. 2: Klesající směrnice přímek spojujících body $[0,0]$ a $[k, \log E_k]$

O zdůvodnění Newtonova pravidla týkajícího se počtu komplexních kořenů se pokusil Colin Maclaurin; roku 1726 zaslal viceprezidentovi *Royal Society* Martinu Folkesovi dopis, ve kterém jej informoval o svých dosavadních výsledcích. Dopis obsahuje zdůvodnění Newtonova pravidla pro polynomy druhého až čtvrtého stupně a je stručně zakončen větou „*To be continued.*“ Folkesovým přičiněním byl dopis ještě tentýž rok otištěn ve *Philosophical Transactions of the Royal Society* [Mac1]. Další pokusy o důkaz Newtonova pravidla pro obecné polynomy byly uveřejněny ve stejném časopise, a to nejprve v práci George Campbella [Cam] z roku 1728, a poté ve druhém otištěném Maclaurinově dopise Folkesovi [Mac2] z roku 1729.[8]

[8]Obsahy všech tří prací a okolnosti jejich vzniku jsou detailně popsány ve čtvrté kapitole [Std1]. Campbell a Maclaurin vedli spor ohledně prvenství, zdá se však, že ke svým objevům dospěli nezávisle na sobě. Edward Waring v knize [War1] (viz též anglický překlad [War2]) z roku 1782 poznamenal, že jejich důkazy Newtonova pravidla nejsou úplné. Campbell i Maclaurin dokázali, že každá změna znaménka odpovídá dvojici komplexních kořenů, avšak nezdůvodnili, že tyto dvojice jsou navzájem různé. Korektní odvození Newtonova pravidla pochází od Jamese Josepha Sylvestera, který v článku [Syl] z roku 1865 dokonce dospěl k obecnějšímu tvrzení. Moderní důkazy Newtonových nerovností lze najít např. v [HLP, Stl, Wag]; Sylvesterovo zobecnění Newtonova pravidla je popsáno v článku [Aco].

Druhý dopis [Mac2] je zajímavý i tím, že obsahuje důkazy některých Maclaurinových nerovností (9) včetně AG nerovnosti. Obsahem lemmatu V je následující tvrzení, o kterém Maclaurin píše, že je převzato z Eukleidových *Základů*: *Je-li úsečka AB rozdělena bodem P na dvě části, pak obsah obdélníku o stranách AP a PB je maximální, právě když jsou obě části stejně dlouhé.*

V dalšímu lemmatu VI pak Maclaurin tvrdí: *Je-li úsečka AB rozdělena na libovolný počet částí AC, CD, DE, EB, pak součin jejich délek je maximální, právě když jsou všechny části stejně dlouhé.* Důkaz vypadá následovně[9]: Je-li bod D umístěn jakkoliv, E je střed DB a e je libovolný jiný bod ležící na úsečce DB, pak součin $AC \times CD \times DE \times EB$ je větší než $AC \times CD \times De \times eB$, protože podle lemmatu V je $DE \times EB$ větší než $De \times eB$. Ze stejného důvodu je uvažovaný součin maximální jen tehdy, když body C, D jsou středy úseček AD, CE, neboli když části AC, CD, DE, EB jsou stejně dlouhé.

Přestože Maclaurin ve svých úvahách hovoří o dělení úsečky AB třemi dělicími body C, D, E, je jasné, že jeho postup je zcela obecný a funguje pro libovolný počet dělicích bodů. Důkaz však není zcela úplný: Maclaurin pouze ukázal, že součin délek může být maximální, jen když jsou všechny úsečky stejně dlouhé. Přitom automaticky předpokládal, že se maxima skutečně nabývá, což je ovšem potřeba zdůvodnit. Vybaveni znalostmi moderní matematické analýzy bychom mohli argumentovat následovně: Je-li ℓ délka úsečky AB a jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \ell - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ délky dílčích úseček, pak funkce $x_1 \cdots x_{n-1} \cdot \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$ je spojitá na kompaktní množině

$$\{x \in \mathbb{R}^{n-1};\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq \ell\},$$

a tedy nabývá extrémů.

Lemma VI v Maclaurinově dopise je následováno dalšími příbuznými tvrzeními. Lemma VII říká, že pokud je úsečka AB rozdělena na libovolný počet částí, pak součet součinů délek všech možných dvojic je maximální, právě když jsou všechny části stejně dlouhé. Jsou-li totiž části jako výše označeny AC, CD, DE, EB, pak uvažovaný součin je

$$\begin{aligned} AC \times (CD + DE + EB) + CD \times (DE + EB) + DE \times EB = \\ = AC \times CB + CD \times DB + DE \times EB. \end{aligned}$$

Aby byl součin $DE \times EB$ maximální, musí být podle lemmatu V bod E středem DE. Analogicky se zdůvodní, že D musí být středem CE a C středem AD.

V lemmatu VIII Maclaurin podobným způsobem ukazuje, že součet součinů délek všech možných trojic je maximální, právě když jsou všechny části stejně dlouhé. Nakonec v lemmatu IX píše, že přechozí úvahy lze zobecnit na součet součinů všech možných k-tic. Poté odvozuje následující větu: *Jestliže všechny kořeny rovnice*

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n A_n = 0$$

[9] Držíme se Maclaurinova zápisu a používáme stejné označení pro úsečky i jejich délky.

jsou kladné a nejsou si rovny, pak platí

$$\frac{\binom{n}{r}}{n^r}A_1^r > A_r, \quad r \in \{2, \ldots, n\}. \tag{10}$$

K dokázání věty stačí použít lemma IX na úsečku AB o délce $\ell = x_1 + \cdots + x_n$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou kořeny dané rovnice:

$$A_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_r} < \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} \left(\frac{\ell}{n}\right)^r = \binom{n}{r}\left(\frac{A_1}{n}\right)^r$$

Vztah (10) lze přepsat do tvaru $(A_1/n)^r > A_r/\binom{n}{r}$, resp. $(E_1)^r > E_r$, kde $E_1, \ldots, E_n$ jsou definovány pomocí (8). Vidíme, že nerovnosti (10) odpovídají Maclaurinovým nerovnostem (9); speciálně pro $r = n$ tedy ze vztahu (10) plyne AG nerovnost[10]

$$x_1x_2\cdots x_n < \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Z dnešního pohledu první korektní důkaz AG nerovnosti podal Augustin Louis Cauchy v učebnici *Cours d'analyse* [Cau1][11], která vychází z jeho přednášek konaných na pařížské *École Polytechnique*. První vydání knihy z roku 1821 je tvořeno dvanácti kapitolami, po kterých následuje devět dodatků na 174 stranách. Druhý dodatek *Sur les formules qui résultent de l'emploi du signe > ou <, et sur les moyennes entre plusieurs quantités* je věnován nerovnostem a průměrům. Cauchy v úvodu připomíná význam symbolů $<$, $>$ a podrobně rozebírá, které operace lze s nerovnostmi provádět (sčítání a násobení nerovností, násobení číslem, umocňování, logaritmování). V další části dodatku se dostává k průměrům a píše, že průměrem čísel a, a', a'', … je jistá hodnota $M(a, a', a'', \ldots)$, která se nachází mezi nejmenším a největším ze zadaných čísel. Cauchy nejprve dokáže několik vlastností takto abstraktně definovaného průměru a teprve poté se dostává k aritmetickému a geometrickému průměru; AG nerovnost se objevuje až v úplném závěru kapitoly.

V první části důkazu používá Cauchy matematickou indukci k ověření tvrzení v případě, že n je mocnina dvojky; ve druhé části pak elegantním trikem výsledek zobecní pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Ukažme si jeho postup podrobněji. Místo (1) budeme dokazovat ekvivalentní nerovnost

$$x_1\cdots x_n \le \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n. \tag{11}$$

(Cauchy místo x_1, x_2, x_3, … píše A, B, C, …) Pro $n = 2$ tvrzení platí, neboť

$$x_1x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2. \tag{12}$$

[10] Nerovnost je ostrá, neboť jsme předpokládali, že všechna čísla $x_1, \ldots, x_n$ nejsou shodná.
[11] Viz též komentovaný anglický překlad [BS].

Pro $n = 4$ použijeme právě dokázanou nerovnost (12) dvakrát za sebou a dostaneme

$$x_1x_2x_3x_4 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4. \tag{13}$$

Pro $n = 8$ nejprve aplikujeme vztah (13) a následně opět (12):

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \le \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4 \left(\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\right)^4 \le$$
$$\le \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}\right)^8$$

Předchozí výpočty ukazují, jak lze indukcí dokázat platnost nerovnosti (11) pro všechna n ve tvaru 2^m, kde $m \in \mathbb{N}_0$:

$$x_1 \cdots x_{2^m} \le \left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} \tag{14}$$

Není-li n mocninou dvojky, najdeme nejmenší přirozené m takové, že $2^m > n$. Dále položíme

$$K = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

a použijeme již dokázanou nerovnost (14), čímž obdržíme

$$x_1 \cdots x_n K^{2^m-n} \le \left(\frac{x_1+\cdots+x_n+(2^m-n)K}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{2^m K}{2^m}\right)^{2^m} = K^{2m}.$$

K dokončení důkazu stačí vydělit číslem K^{2^m-n}:

$$x_1 \cdots x_n \le K^n = \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

Právě popsaný Cauchyův důkaz je dnes považován za klasický a najdeme jej v řadě učebnic; viz např. [Stl, Ves1].

AG nerovnost má i svou méně známou integrální variantu, kde místo konečné posloupnosti čísel $x_1, \ldots, x_n$ vystupují funkční hodnoty spojité funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Příslušné tvrzení se poprvé objevuje v práci Viktora Jakovleviče Bunjakovského [Bou] z roku 1859; ta je věnována nerovnostem, ve kterých vystupují integrály. Přirozenou analogií aritmetického průměru je výraz

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bunjakovskij se zamýšlí nad otázkou, jak by měla být definována analogie geometrického průměru. Všímá si toho, že logaritmem geometrického průměru n-tice čísel je aritmetický průměr jejich logaritmů:

$$\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n} \tag{15}$$

V souladu s tímto pozorováním by logaritmem geometrického průměru spojité funkce g měla být hodnota $\frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)\,\mathrm{d}x$, což vede k definici geometrického průměru jakožto výrazu

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Bez podrobnějšího vysvětlení pak Bunjakovskij píše, že z AG nerovnosti plyne vztah

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{16}$$

Zřejmě má na mysli následující postup: Interval $[a,b]$ rozdělíme pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ na n stejně velkých intervalů. Použitím AG nerovnosti a vztahu (15) na hodnoty $g(x_1)$, … , $g(x_n)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n g(x_i)\frac{b-a}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) \geq \\ \geq \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n \log g(x_i)}{n}\right) &= \exp\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n \log g(x_i)\frac{b-a}{n}\right), \end{aligned}$$

odkud přechodem k limitě pro $n \to \infty$ obdržíme nerovnost (16).

Z integrální verze (16) lze zpětně odvodit původní nerovnost (1): Jsou-li dána kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, stačí opět rozdělit interval $[a,b]$ na n stejně velkých podintervalů a definovat funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tak, že její hodnota uvnitř i-tého podintervalu bude x_i (hodnoty v krajních bodech lze volit libovolně); nerovnost (16) se pak redukuje na vztah (1).

2. Cauchyova-Bunjakovského-Schwarzova nerovnost

V Cauchyově učebnici [Cau1] se kromě důkazu AG nerovnosti poprvé v historii objevuje i následující nerovnost: *Pro všechna reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n$ *a* $b_1, \ldots, b_n$ *platí*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}, \tag{17}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když jeden z vektorů $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ *je násobkem druhého.*

Chceme-li dospět k požadované nerovnosti, stačí dokázat, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Tato nerovnost platí, protože

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \ge 0.$$

Z předchozího výpočtu zároveň plyne, že rovnost ve vztahu (17) nastane právě tehdy, když $\sum_{i,j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 = 0$, neboli $a_i b_j = a_j b_i$ pro každou dvojici i, j. Je-li aspoň jedno číslo b_j nenulové, bude platit $a_i = \frac{a_j}{b_j} b_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $(b_1, \dots, b_n) = \lambda \cdot (a_1, \dots, a_n)$ pro $\lambda = \frac{a_j}{b_j}$; tím je důkaz dokončen.

Vzorec

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

ke kterému jsme dospěli v průběhu důkazu, se nazývá Lagrangeova identita.[12] Někdy se zapisuje v ekvivalentní podobě

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \tag{18}$$

Cauchy místo $a_1, a_2, a_3, \dots$ a $b_1, b_2, b_3, \dots$ píše $a, a', a'', \dots$ a $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$; Lagrangeovu identitu (18) pak v jeho důkazu najdeme ve tvaru

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \cdots + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \cdots =$$
$$= (a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots).$$

Pokud odhlédneme od tohoto poněkud těžkopádného způsobu zápisu, neliší se Cauchyův postup od výše uvedeného důkazu.

Je pozoruhodné, že v učebnici [Cau1] je nerovnost (17) uvedena bez jakékoliv motivace a ve zbytku knihy není nikde zapotřebí. Cauchy ji využil až v knize [Cau2] z roku 1829, konkrétně v dodatku *Note sur la détermination approximative des racine d'une équation algébrique ou transcendante* věnovaném přibližnému řešení algebraických a transcendentních rovnic.

Podobně jako u AG nerovnosti se integrální verze Cauchyovy nerovnosti poprvé objevuje v Bunjakovského práci [Bou]. Autor nejprve uvádí nerovnost (17) a píše, že je dobře známá; Cauchyovo jméno nezmiňuje.[13] Poté následuje integrální tvar

[12] Pro $n = 3$ lze identitu nalézt v Lagrangeově práci [Lag] z roku 1773; Cauchy píše, že tento speciální případ identity je užitečný při zkoumání křivosti křivek na plochách a v mechanice, neuvádí však žádné podrobnosti.

[13] Bunjakovskij byl Cauchyovým studentem, v Paříži získal roku 1825 doktorát.

nerovnosti

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_{x_0}^{X} \psi(x)^2\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce definované na $[x_0, X]$. Bunjakovskij bez dalších podrobností tvrdí, že tento vztah ihned plyne z nerovnosti (17), pokud za čísla $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ dosazujeme hodnoty funkcí φ, ψ.

Integrální tvar Cauchyovy nerovnosti je spjat i se jménem Hermanna Amanda Schwarze. Ten v článku [Sch] z roku 1888 věnovaném zkoumání minimálních ploch pomocí variačního počtu uvažuje tři dvojné integrály

$$A = \iint \varphi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad B = \iint \varphi\chi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad C = \iint \chi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

přičemž se vždy integruje přes jistou oblast $T \subset \mathbb{R}^2$. O funkcích $\varphi, \chi : T \to \mathbb{R}$ se předpokládá, že jejich podíl není roven konstantní funkci. Potom

$$\iint (\alpha\varphi + \beta\chi)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$$

je kvadratická forma v proměnných α, β, která je pozitivně definitní, neboť integrál na levé straně je s výjimkou případu $\alpha = \beta = 0$ kladný. Odtud plyne, že diskriminant kvadratické formy musí být záporný, tj. $4B^2 - 4AC < 0$.[14] Z této nerovnosti pak získáme $|B| < \sqrt{A}\sqrt{C}$, neboli

$$\left|\iint \varphi\chi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| < \sqrt{\iint \varphi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \cdot \sqrt{\iint \chi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}. \tag{19}$$

Pokud by některá z funkcí φ, χ byla násobkem druhé, pak předchozí nerovnost zřejmě přejde v rovnost.

Cauchyova, Bunjakovského i Schwarzova nerovnost představují speciální případ obecného tvrzení: *Nechť X je libovolný reálný vektorový prostor se skalárním součinem, ve kterém je norma vektoru $x \in X$ je definována předpisem*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}. \tag{20}$$

Pak pro každou dvojici vektorů x, $y \in X$ platí

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|, \tag{21}$$

přičemž rovnost nastává pouze tehdy, když jeden z vektorů x, y je násobkem druhého.[15]

[14] Diskriminantem kvadratické formy $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ rozumíme výraz $D = b^2 - 4ac$. Snadno se ověří, že $4aF(x, y) = (2ax + by)^2 - Dy^2$; z tvaru pravé strany je pak vidět, že F je pozitivně nebo negativně definitní (v závislosti na znaménku a) jen tehdy, když $D < 0$.

[15] Nerovnost (21) je nepostradatelným nástrojem při studiu vektorových prostorů se skalárním součinem; jejím důsledkem je například trojúhelníková nerovnost pro normu definovanou předpisem (20); viz [Net, Ves2].

Schwarzův důkaz nerovnosti (19) je pozoruhodný tím, že se dá téměř beze změny použít k odvození obecné nerovnosti (21): Předpokládejme, že ani jeden z vektorů x, y není násobkem druhého (jinak je tvrzení zřejmé). Pak pro každou netriviální lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$ platí

$$0 < \|\alpha x + \beta y\|^2 = (\alpha x + \beta y) \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta x \cdot y + \beta^2 \|y\|^2. \tag{22}$$

Výraz na pravé straně tedy představuje pozitivně definitní kvadratickou formu v proměnných α, β. Její diskriminant $4(x \cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ musí být záporný, odkud po úpravě snadno plyne (21).

Abstraktní Cauchyovu-Bunjakovského-Schwarzovu nerovnost (21) zformuloval John von Neumann v práci o spektrální teorii hermitovských operátorů [Neu] z roku 1929. Pracuje zde (zřejmě s ohledem na aplikace v kvantové mechanice) s komplexními vektorovými prostory se skalárním součinem[16] a jeho důkaz nerovnosti (21) je proto komplikovanější.

Mírnou modifikací Schwarzovy metody dospějeme k důkazu, který je dnes chápán jako standardní a vyskytuje se v mnoha učebnicích: Lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$ ve vztahu (22) nahradíme výrazem $x + \beta y$, čímž obdržíme

$$0 < \|x + \beta y\|^2 = (x + \beta y) \cdot (x + \beta y) = \|x\|^2 + 2\beta x \cdot y + \beta^2 \|y\|^2.$$

Na pravé straně je nyní kladná kvadratická funkce v proměnné β, a proto její diskriminant $4(x \cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ musí být záporný.

3. Jensenova nerovnost

Johan Ludwig William Valdemar Jensen si při pozorném čtení Cauchyova důkazu AG nerovnosti uvědomil, že stejný postup lze použít k odvození obecnějšího tvrzení.[17] Jeho článek [Jen2] z roku 1906 je významný i tím, že jde o první dobře dostupnou práci obsahující definice konvexní a konkávní funkce[18], a to v následující podobě: *Funkce f definovaná na reálném intervalu I je konvexní, resp. konkávní, pokud platí*

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \textit{resp.} \quad f(x) + f(y) \leq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

pro každou dvojici x, $y \in I$. Jensen uvádí řadu příkladů. Přímo z definice např. ukazuje, že funkce $x \mapsto |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$ a $x \mapsto x^p$ je pro $p > 1$ konvexní na $[0, \infty)$, zatímco pro $p \in (0, 1)$ jde o konkávní funkci na $[0, \infty)$. Z Rolleovy věty pak odvozuje

[16] V tomto článku se poprvé objevuje definice abstraktního Hilbertova prostoru, tj. úplného vektorového prostoru se skalárním součinem.

[17] Jensen nebyl profesionální matematik. V letech 1881–1924 pracoval jako inženýr v kodaňské telefonní společnosti *Kjobenhavns Telefonselskab* a matematice se věnoval pouze ve volném čase.

[18] Poprvé se tyto definice spolu s důkazem Jensenovy nerovnosti objevily roku 1905 v Jensenově dánsky psaném článku [Jen1].

známé kritérium dávající do souvislosti konvexitu nebo konkávnost se znaménkem druhé derivace.

Moderní definice konvexní a konkávní funkce jsou poněkud odlišné[19]: Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je konvexní, pokud pro každou dvojici x, $y \in I$ a každé $t \in [0,1]$ platí $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$; definice konkávní funkce se dostane obrácením předchozí nerovnosti. Jensenova podmínka odpovídá volbě $t = \frac{1}{2}$, je tedy slabší a třídy jensenovsky konvexních, resp. konkávních funkcí jsou bohatší. Pokud se ovšem omezíme na spojité funkce, jsou obě definice ekvivalentní[20].

V dalším textu budeme předpokládat, že $f : I \to \mathbb{R}$ je konvexní podle Jensenovy definice. Jensen si všímá, že pro každou čtveřici hodnot $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ plyne z definice nerovnost

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) &\geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \geq \\ &\geq 4f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right). \end{aligned}$$

Obecněji, pro 2^m hodnot $x_1, \ldots, x_{2^m} \in I$ obdržíme

$$\sum_{i=1}^{2^m} f(x_i) \geq 2^m f\left(\frac{\sum_{i=1}^{2^m} x_i}{2^m}\right). \tag{23}$$

Mějme nyní n-tici hodnot $x_1, \ldots, x_n \in I$, kde n není mocninou dvojky. Najdeme nejmenší přirozené m takové, že $2^m > n$, položíme

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^m} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

a použijeme již dokázanou nerovnost (23):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^m - n) f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &\geq 2^m f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + (2^m - n)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}{2^m}\right) = \\ &= 2^m f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{aligned}$$

Odtud po úpravě dostaneme

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

[19] Viz např. [Ves1]. Funkce konvexní podle Jensenovy definice se v angličtině označují termínem *midpoint convex* nebo zkráceně *midconvex*.

[20] Důkaz lze najít např. v [Sim], str. 3.

Jsou-li $n_1, \ldots, n_m$ přirozená čísla a $n = n_1 + \cdots + n_m$, plyne z předchozího vztahu nerovnost

$$f\left(\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m}{n}\right) \leq \frac{n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \cdots + n_mf(x_m)}{n}. \tag{24}$$

Pokud f je navíc spojitá (a tedy konvexní podle moderní definice), lze dokázat silnější tvrzení: *Pro každou m-tici kladných reálných čísel $a_1, \ldots, a_m$ a jejich součet $a = a_1 + \cdots + a_m$ platí*

$$f\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m}{a}\right) \leq \frac{a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_mf(x_m)}{a}. \tag{25}$$

Jensen píše, že stačí volit posloupnost m-tic $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\lim \frac{n_1}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{a_1}{a}, \quad \ldots, \quad \lim \frac{n_m}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{a_m}{a}.$$

Pro každou takovou m-tici platí vztah (24) a limitním přechodem pak obdržíme požadovanou nerovnost (25); v tomto kroku využíváme též spojitost funkce f.

Vztah (25) je dnes označován jako Jensenova nerovnost.[21] Dospěl k ní Otto Hölder již v roce 1889 v článku [Hol], a to za silnějšího předpokladu, že f má nezápornou druhou derivaci. Hölderův důkaz byl komplikovanější než Jensenův a klíčovou roli v něm hrála Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Někdy se nerovnost (25) zapisuje ve tvaru

$$f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_mx_m) \leq \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2) + \cdots + \alpha_mf(x_m),$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou kladná reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Je-li f konkávní funkce, pak platí obrácená nerovnost

$$f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_mx_m) \geq \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2) + \cdots + \alpha_mf(x_m) \tag{26}$$

(pro důkaz stačí použít Jensenovu nerovnost na funkci $-f$, která je konvexní).

Řadu známých nerovností lze odvodit jako důsledek Jensenovy nerovnosti, kde za f volíme vhodnou funkci. Jensen např. ukazuje, že pro konkávní funkci $f(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$, dostaneme použitím (26) nerovnost

$$\log(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_mx_m) \geq \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \cdots + \alpha_m \log x_m,$$

ze které dále plyne

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_mx_m \geq (x_1)^{\alpha_1}(x_2)^{\alpha_2} \cdots (x_m)^{\alpha_m}.$$

[21] Spojitost funkce f ve skutečnosti není nezbytná, stačí konvexita podle moderní definice (viz např. [Jar], Věta 99, nebo [Sim], Proposition 1.2).

Tento výsledek zobecňuje klasickou verzi AG nerovnosti, která odpovídá volbě $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \frac{1}{m}$.[22]

Jensen dále ukazuje, že volbou funkce $f(x) = x^2$ (která je konvexní) přejde nerovnost (25) do tvaru

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{a}\right)^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2}{a},$$

neboli po úpravě

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 \leq a \cdot \sum_{i=1}^n a_i x_i^2.$$

Položíme-li $a_i = y_i^2$, $x_i = \frac{z_i}{y_i}$, obdržíme Cauchyovu nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i z_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right).$$

Aplikujeme-li Jensenovu nerovnost (25) na konvexní funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, přičemž položíme $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = \frac{1}{m}$, dostaneme

$$\frac{m}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_m}}{m}$$

nebo ekvivalentně

$$\frac{m}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_m}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m},$$

což je nerovnost mezi tzv. harmonickým průměrem a aritmetickým průměrem.

Dodejme, že v Jensenově článku [Jen] je odvozena také integrální verze Jensenovy nerovnosti (25), a to ve tvaru

$$f\left(\frac{\int_0^1 a(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x}\right) \leq \frac{\int_0^1 a(x)f(g(x))\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{27}$$

kde f je spojitá konvexní funkce, a je kladná integrovatelná funkce a g je integrovatelná. Důkaz je snadný, stačí aplikovat Jensenovu nerovnost (25) na integrální součty, které v limitě přejdou v integrály. V závěru článku pak Jensen vyjmenovává některé integrální nerovnosti, které lze získat jako důsledky vztahu (27). Položíme-li např. $f(x) = \log x$, obdržíme po úpravě

$$\frac{\int_0^1 a(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x} \leq \exp\left(\frac{\int_0^1 a(x)\log g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x}\right),$$

což je zobecněná verze integrální AG nerovnosti (16).

[22] Uvedeným způsobem je AG nerovnost dokazována i ve známé učebnici Vojtěcha Jarníka *Diferenciální počet II* [Jar].

4. Závěr

V tomto příspěvku jsme se zaměřili pouze na nejstarší historii tří klasických nerovností. Ty byly v průběhu let dále zobecňovány a objevily se i nové důkazy, které jsou často elegantnější než původní postupy. V současnosti je např. známo více než padesát různých důkazů AG nerovnosti; viz [BMV, Bul]. Zjistilo se také, že některé nerovnosti jsou mezi sebou ekvivalentní v tom smyslu, že jedno tvrzení lze dokázat pomocí druhého a naopak. Např. AG nerovnost je ekvivalentní s Cauchyovou nerovností nebo s tzv. Bernoulliho nerovností; podrobnosti lze najít v [Lin, Mal].

Poděkování

Děkuji Jiřímu Veselému za řadu podnětných připomínek k předchozí verzi textu a Zdeňku Halasovi za konzultace týkající se starořecké matematiky.

$+ 2pq = 0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, ſi mutationem ſignorum ſpectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo duæ impoſſibiles, quæ pro ambiguitate ſua priori caſu negativæ poſteriori affimativæ eſſe videntur.

Verum quot radices impoſſibiles ſunt cognoſci fere poteſt per hanc regulam. Conſtitue ſeriem fractionum quorum denominatores ſunt numeri in hac progreſſione 1, 2, 3, 4, 5, *&c.* pergendo ad numerum uſque qui eſt dimenſionum æquationis; numeratores vero eadem ſeries numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem poſteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca ſuper terminis mediis æquationis. Et ſub quolibet mediorum terminorum, ſi quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem ſit majus quam rectangulum terminorum utrinque conſiſtentium, colloca ſignum $+$; ſin minus, ſignum $-$. Sub primo vero & ultimo termino colloca ſignum $+$. Et tot erunt radices impoſſibiles quot ſunt in ſnbſcriptorum ſignorum ſerie mutationes de $+$ in $-$ & $-$ in $+$. Ut ſi habeatur æquatio $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$: divido ſeriei hujus $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3}$ fractionum ſecundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per ſecundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco ſuper mediis terminis æquationis ut ſequitur.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3}. & & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & + & pxx & + & 3ppx & - & q = 0 \\ + & & - & & + & & + \end{array}$$

Dein quoniam quadratum ſecundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus eſt quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$, ſub termino pxx colloco ſignum $-$. At quia

tertii

Newtonovo pravidlo pro odhad počtu komplexních kořenů [New] tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus eſt quam nihil, atque adeo multo majus quam ſecundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco ſub tertio illo termino ſignum $+$. Dein ſub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco ſigna $+$. Et ſignornm ſubſcriptorum quæ in hac ſunt ſerie $+-++$ mutationes duæ, una de $+$ in $-$, alia de $-$ in $+$ indicant duas eſſe radices impoſſibiles. Sic & æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, duas habet radices impoſſibiles. Æquatio itē $x^4-6xx-3x-2=0$, duas habet.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 & -4xx & +4x & -6=0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \\ x^4 & * & -6xx & -3x & -2=0 \\ + & + & + & - & + \end{array}$$

Nam hæc fractionum ſeries $\frac{1}{4}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{4}{1}$ dividendo ſecundam per primam, tertiam per ſecundam, & quartam per tertiam, dat hanc ſeriem $\frac{3}{8}.\ \frac{4}{9}.\ \frac{3}{8}$ ſuper mediis æquationis terminis collocandam. Dein ſecundi termini qui hic nihil eſt quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus eſt quam rectangulum negativum $-6x^6$ ſub terminis utrinque poſitis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare ſub termino illo deficiente ſcribo $+$. In cæteris pergo ut in exemplo ſuperiori; & ſignorum ſubſcriptorum prodit hæc ſeries $+++-+$ ubi duæ mutationes indicant duas radices impoſſibiles. Et ad eundem modum in æquatione

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2}{5}. & \frac{1}{2}. & \frac{1}{2}. & \frac{2}{5}. & \\ x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

$x^5-4x^4+4x^3-2xx-5x-4=0$, deteguntur impoſſibiles duæ.

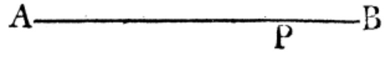
Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum $-$, ſub ſecundo ſignum $+$, ſub tertio ſignum

Q 2

Newtonovo pravidlo pro odhad počtu komplexních kořenů (pokračování) ed by $\frac{3}{8}$ be equal to the Product of the firſt and third Terms, yet in that Caſe, in applying Sir *Iſaac Newton*'s Rule, the Sign — ought to be placed under the ſecond Term, and the ſame is to be ſaid of the Square of the fourth Term. The Rule deduced from the viith Propoſition ſhews four Roots imaginary, when a is greater than b, and alſo when b^2 is greater than $15\ a^2$; but a Rule founded on the xith Propoſition, ſhews the four Roots to be imaginary always when a exceeds b, or when b^2 exceeds $9\ a^2$; from which the Excellency of this Rule above theſe two is manifeſt. I have ſaid ſo much of Biquadratick Equations, that I muſt leave it to thoſe that are willing to take the Trouble, to make like Remarks on the higher Sorts of Equations.

In inveſtigating the preceeding Propoſitions, when I found my ſelf obliged to go through ſo intricate Calculations, I often attempted to find ſome more eaſy Way of treating this Subject. The following was of conſiderable Uſe to me,and may perhaps be entertaining to you. By it, I inveſtigate ſome *maxima* in a very eaſy Manner, that could not be demonſtrated in the common Way with ſo little Trouble.

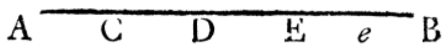
LEMMA V. Let the given Line AB be divided any where in P and the Rectangle of the Parts AP and PB will be a *maximum* when theſe Parts are equal.



This is manifeſt from the Elements of *Euclid*.

LEMMA VI. If the Line AB is divided into any Number of Parts AB, CD, DE, EB, the Product of all thoſe Parts multiplied into one another will be a *max-*

Lemma V a VI v Maclaurinově dopisu Folkesovi [Mac2] *maximum* when the Parts are equal amongſt themſelves. For let the Point D be where you will, it is manifeſt that if DB be biſſected in E, the Product $AC \times CD \times DE \times EB$ will be greater than $AC \times CD \times De \times eB$



becauſe by the laſt Lemma $DE \times EB$ is greater than $De \times eB$; and for the ſame reaſon AD and CE muſt be biſſected in C and D; and conſequently all the Parts AC, CD, DE, EB muſt be equal amongſt themſelves, that their Product may be a *maximum.*

LEMMA VII. The Sum of the Products that can be made by multiplying any two Parts of AB by one another is a *maximum* when the Parts are equal. The Sum of theſe Products is $AC \times CB + CD \times DB + DE \times EB$: Now that $DE \times EB$ may be a *maximum*, DB muſt be biſſected in E by the v^th Lemma, and for the ſame reaſon AD and CE muſt be biſſected in C and D, that is all the Parts, AC, CD, DE, EB muſt be equal, that the Sum of all theſe Products may be a *maximum.*

LEMMA VIII. The Sum of the Products of any three Parts of the Line AB is a *maximum*, when all the Parts are equal. For that Sum is $AC \times CD \times DE + EB \times \overline{AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE}$; and ſuppoſing the Point E given, it is manifeſt that AE muſt be equally triſected in C and D that $AC \times CD \times DE$ may be a *maximum* by Lemma vi. and that $AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE$ may be a *maximum* by Lemma vii^th. From which it is manifeſt that all the Parts AC, CD, DE, EB muſt be equal, that the Sum of the Products of any three of them may be a *maximum.*

LEMMA IX. It is manifeſt that this way of reaſoning is general, and that the Sum of any Quantities being given, the Sum of all the Products that can be

M made

Lemma VII a VIII v Maclaurinově dopisu Folkesovi [Mac2]

$$(35) \qquad \sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A+B+C+D\ldots}{n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(36) \qquad ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{n}\right)^n.$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2;$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, &c.... enfin $n=2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$
$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

&c.......................................

$$(37) \qquad ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \&c\ldots,$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots\ldots}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

Cauchyův důkaz AG nerovnosti [Cau1]

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{n}\right)^n;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. On conclut généralement de la formule (36)

$$(38) \qquad A+B+C+D\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots},$$

quel que soit le nombre des lettres $A, B, C, D, \ldots$. Ainsi, par exemple,

$$(39) \quad \begin{cases} A+B > 2\sqrt{AB}, \\ A+B+C > 3\sqrt[3]{ABC}, \\ \&c.\ldots, \end{cases}$$

Cauchyův důkaz AG nerovnosti (pokračování)

$$
(29)\left\{\begin{array}{r}
(a+a')^2+(a-a')^2=2\,(a^2+a'^2)\,,\\
(a+a'+a'')^2+(a-a')^2+(a-a'')^2+(a'-a'')^2=3(a^2+a'^2+a''^2)\,,\\
\&c.\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

16.[e] **Théorème.** *Soient a, a', a'' ..., α, α', α'' ... deux suites de quantités, et supposons que chacune de ces suites renferme un nombre n de termes. Si les rapports*

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{a'}{\alpha'},\quad \frac{a''}{\alpha''},\quad \&c.\ldots,$$

ne sont pas tous égaux entre eux, la somme

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''\ldots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}\,.\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2\ldots)}\,;$$

en sorte qu'on aura

$$
(30)\left\{\begin{array}{l}
\quad val.\,num.\;(a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''\ldots)\\
<\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}.\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2\ldots)}.
\end{array}\right.
$$

Démonstration. En effet, si au carré de la somme

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''\ldots$$

on ajoute les numérateurs des fractions qui représentent les carrés des différences entre les rapports

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{a'}{\alpha'},\quad \frac{a''}{\alpha''},\quad \ldots.$$

combinés entre eux de toutes les manières possibles, savoir,

$$(a\alpha'-a'\alpha)^2,\ (a\alpha''-a''\alpha)^2,\ \ldots\ (a'\alpha''-a''\alpha')^2,\ \&c.\ldots,$$

on trouvera

Původní důkaz Cauchyovy nerovnosti [Cau1]

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \ldots \\ \ldots + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \&c. \ldots = (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots); \end{array} \right.$$

et l'on en conclura

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots).$$

En extrayant les racines carrées des deux membres de cette dernière formule, on obtiendra précisément la formule (30).

Corollaire. Si l'on divise par n les deux membres de la formule (30), on trouvera

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \text{val. num. } \dfrac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots}{n} \\ < \dfrac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)}}{\sqrt{n}}. \end{array} \right.$$

Ainsi la moyenne arithmétique entre les produits

$$a\alpha, \quad a'\alpha', \quad a''\alpha'', \quad \ldots.$$

a une valeur numérique inférieure au produit de deux rapports qui représentent des moyennes entre les valeurs numériques des deux espèces de quantités comprises dans les deux suites

$$a, \quad a', \quad a'' \quad \ldots.$$
$$\alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'' \quad \ldots.$$

Scholie 1.er Lorsque les rapports

$$\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{a'}{\alpha'}, \quad \frac{a''}{\alpha''}, \quad \&c. \ldots.$$

deviennent égaux, on tire de la formule (31)

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots),$$

et par suite

Původní důkaz Cauchyovy nerovnosti (pokračování)

Prenons encore la relation bien connue

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) > (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Si l'on suppose que les nombres $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ soient les valeurs successives de la fonction continue $\varphi(x)$ depuis $x = x_0$, jusqu'à $x = X$, et que $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ représentent la suite des valeurs d'une autre fonction continue $\psi(x)$ entre les mêmes limites, l'inégalité précédente se trouvera remplacée par la suivante:

$$\textbf{(C)} \dots\dots\dots \int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 . dx . \int_{x_0}^{X} \psi(x)^2 . dx > \left(\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\psi(x)\,dx\right)^2,$$

De cette formule, qui se réduit à l'égalité pour $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$, λ étant une constante, on pourra déduire d'autres inégalités particulières. Ainsi, en supposant

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)} = \sqrt{f(x)},$$

on obtient

$$\textbf{(D)} \dots\dots\dots \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx . \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} > (X - x_0)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x) . \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \frac{1}{f(x)} > 1.$$

En faisant dans (C) $\psi(x) = 1$, on a cette autre formule

$$\textbf{(E)} \dots\dots\dots \left(\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx\right)^2 < (X - x_0) \int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 . dx.$$

Il est d'ailleurs visible que toutes les inégalités que nous venons d'établir se transforment en *égalités* pour $X = x_0$, et qu'en général les deux membres différent d'autant moins entr'eux, que la différence $X - x_0$ des limites est plus petite par rapport à chacune d'elles.

Les formules que nous venons de donner, et beaucoup d'autres qu'on obtiendrait par les mêmes principes, peuvent donner lieu à quelques applications intéressantes. Nous allons en donner quelques exemples.

2. Et d'abord des formules (A) et (B) on déduit très facilement la relation qui lie la fonction variée avec sa première dérivée. En effet, si l'on pose

$$\log f(x) = F'(x),$$

Bunjakovského nerovnost [Bou]

15.

Einführung der Constante c.

Der bekannte Satz, dass die Discriminante einer definiten binären quadratischen Form stets einen positiven von Null verschiedenen Werth besitzt, kann dazu angewendet werden, um eine Beziehung zwischen den absoluten Beträgen der über denselben Bereich T auszudehnenden drei Doppelintegrale

$$A = \int\int \varphi^2 \, dx\, dy, \quad B = \int\int \varphi\chi \, dx\, dy, \quad C = \int\int \chi^2 \, dx\, dy$$

herzuleiten, eine Beziehung, deren Kenntniss für die folgende Untersuchung von Wichtigkeit ist.

Die Grössen φ, χ bedeuten zwei reelle, für alle Stellen (x, y) des Bereiches T eindeutig erklärte Functionen der beiden Argumente x, y, welche die Eigenschaft haben, erstens, dass die über den Bereich T ausgedehnten Doppelintegrale A, B, C unbedingt convergent sind, zweitens, dass der Quotient der beiden Functionen φ und χ nicht einer Constanten gleich ist.

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die binäre quadratische Form

$$\int\int (\alpha\varphi + \beta\chi)^2 \, dx\, dy = A \cdot \alpha^2 + 2B \cdot \alpha\beta + C \cdot \beta^2$$

eine definite, weil das Doppelintegral, dessen Werth mit dem Werthe der quadratischen Form übereinstimmt, für kein von dem Werthepaare $\alpha = 0$, $\beta = 0$ verschiedenes Paar reeller Werthe der Grössen α, β gleich Null wird. Hieraus ergibt sich also die Beziehung

$$(21.) \qquad AC - B^2 > 0 \quad \text{oder} \quad |B| < \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}.$$

Wenn $\varphi = \sqrt{p} \cdot w_n$, $\chi = \sqrt{p} \cdot w_{n+1}$ gesetzt wird, so erhalten A, B, C beziehlich die Werthe W_{2n}, W_{2n+1}, W_{2n+2}. Es besteht demnach zwischen diesen drei Grössen die Beziehung

$$(22.) \qquad \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}.$$

Durch eine ganz analoge Schlussweise ergibt sich aus der Gleichung

$$\int\int_{\mathrm{T}} \left[\left(\frac{\partial(\alpha w_n + \beta w_{n+1})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\alpha w_n + \beta w_{n+1})}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy =$$
$$= W_{2n-1} \cdot \alpha^2 + 2\, W_{2n} \cdot \alpha\beta + W_{2n+1} \cdot \beta^2$$

Schwarzova nerovnost s důkazem [Sch]

J'introduirai la définition suivante. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, réelle, finie et uniforme, de la variable réelle x, satisfait dans un certain intervalle à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geqq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{1}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans cet intervalle.

Si au contraire $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \leqq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{2}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction concave.

On suppose en outre que ces inégalités ne se réduisent pas *constamment*, dans l'intervalle donné, à l'égalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right); \tag{3}$$

dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ est dite »linéaire» dans l'intervalle donné.

Cette expression a été adoptée parceque l'égalité (3) est satisfaite par $\varphi(x) = a + bx$.

Il ressort de ces définitions que les fonctions »linéaires» forment une transition de la classe des fonctions convexes à celle des fonctions concaves, et qu'elles doivent être considérées comme des cas limites communs aux deux classes.

Des définitions données il résulte immédiatement que $-\varphi(x)$ est concave, lorsque $\varphi(x)$ est convexe, et inversement. Il serait par suite suffisant dans ce qui suit de considérer seulement les fonctions convexes, puisque l'on passe si aisément d'une classe à l'autre. Comme toutefois il peut y avoir avantage à considérer les deux classes de fonctions, les fonctions concaves seront aussi mentionnées de temps en temps; mais on devra se souvenir, même lorsque ce ne sera pas toujours rappelé, qu'à toute proposition relative aux fonctions convexes correspond une proposition analogue pour les fonctions concaves.

Comme l'objet principal de cette recherche est de présenter une série d'inégalités d'un caractère général, comprenant comme cas particuliers presque toutes les inégalités jusqu'ici connues, nous allons développer d'abord les théorèmes nécessaires propres à ce but, avant d'entreprendre l'étude plus approfondie des fonctions convexes elles-mêmes.

Jensenova definice konvexní a konkávní funkce [Jen2]

Remarque. Les trois inégalités suivantes

$$\psi(x)\psi(y) \geqq \left[\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2, \quad \psi(x) \text{ positif};$$

$$\psi(x) + \psi(y) \geqq 2\psi(\sqrt{xy}), \quad x \text{ et } y \text{ positifs};$$

$$\psi(x)\psi(y) \geqq [\psi(\sqrt{xy})]^2, \quad x \text{ et } y \text{ positifs}, \ \psi(x) \text{ positif};$$

peuvent être ramenées à (1) par des substitutions simples, savoir, respectivement:

$$\log \psi(x) = \varphi(x),$$

$$\psi(e^x) = \varphi(x),$$

$$\log \psi(e^x) = \varphi(x).$$

2. *Généralisation de l'inégalité* (1).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction convexe quelconque dans un intervalle donné, et que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient tous situés dans cet intervalle ou à ses limites. De (1) il suit que

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + (x_3) + \varphi(x_4) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)$$

$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$$

et généralement, m étant un entier positif

$$\sum_{\nu=1}^{2^m} \varphi(x_\nu) \geqq 2^m \varphi\left(2^{-m} \sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right),$$

comme on le voit facilement par l'induction complète. Si alors n est un entier positif, et si l'on choisit m tel que $2^m > n$, on peut poser

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Et on trouve alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu) + (2^m - n)\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \geqq 2^m \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right),$$

ou

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu), \tag{4}$$

Původní důkaz Jensenovy nerovnosti [Jen2] laquelle est une généralisation de l'inégalité (1), qui sert à définir les fonctions convexes.

Il est clair qu'une inégalité semblable s'applique aux fonctions concaves: il suffit de renverser le signe d'inégalité. Pour les fonctions »linéaires» l'inégalité devient simplement une égalité.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction *continue* et convexe dans un certain intervalle. Nous savons qu'il existe de telles fonctions par les exemples précédents. Soit encore $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, où tous les n_μ sont des entiers positifs. Il résulte de (4), en choisissant les x d'une manière convenable,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m)\right) \leqq \frac{1}{n}\left(n_1\varphi(x_1) + n_2\varphi(x_2) + \ldots + n_m\varphi(x_m)\right).$$

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des nombres positifs quelconques dont la somme est a, et faisons croître les n indéfiniment, mais de telle sorte que

$$\lim \frac{n_1}{n} = \frac{a_1}{a}, \qquad \lim \frac{n_2}{n} = \frac{a_2}{a}, \quad \ldots, \quad \lim \frac{n_{m-1}}{n} = \frac{a_{m-1}}{a},$$

d'où il résultera

$$\lim \frac{n_m}{n} = 1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}}{a} = \frac{a_m}{a},$$

et par suite, $\varphi(x)$ étant continue par hypothèse,

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{a}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_\mu \varphi(x_\mu)}{a},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Lorsque $\varphi(x)$ est une fonction continue et convexe dans un intervalle donné, on aura l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}, \tag{5}$$

où $x_1, x_2, \ldots$ représentent des nombres tous situés dans l'intervalle, et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres positifs, mais d'ailleurs quelconques.

Původní důkaz Jensenovy nerovnosti (pokračování)

Literatura

[Aco] Acosta D. J., *Newton's Rule of Signs for Imaginary Roots*, Amer. Math. Monthly 110 (2003), no. 8, 694–706.

[Beč] Bečvář J., *Algebra v 16. a 17. století.* In Bečvář J., Fuchs E., Matematika v 16. a 17. století. Edice Dějiny matematiky, sv. 17, Prometheus, Praha, 1999.

[Bou] Bouniakowsky V., *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies*, Mémoires de l'Acad. de St.-Pétersbourg (ser. 7) 1 (1859), no. 9.

[BS] Bradley R. E., Sandifer C. E., *Cauchy's Cours d'analyse: An Annotated Translation*, Springer, 2010.

[BMV] Bullen P. S., Mitrinović D. S., Vasić P. M., *Means and their Inequalities*, Reidel, Dordrecht, 1988.

[Bul] Bullen P. S., *Handbook of Means and their Inequalities*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[Cam] Campbell G., *A method of determining the number of impossible roots in affected aequations*, Phil. Trans. Roy. Soc. 35 (1728), 515–531.

[Cau1] Cauchy A. L., *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris, 1821.

[Cau2] Cauchy A. L., *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829.

[Fin] Fink A. M., *An Essay on the History of Inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 249 (2000), 118–134.

[HLP] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities. Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[Hol] Hölder O., *Ueber einen Mittelwerthssatz*, Gött. Nachr. (1889), 38–47.

[Jar] Jarník V., *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1984.

[Jen1] Jensen J. L. W. V., *Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdier*, Nyt Tidss. for Math. 16, B (1905), 49–68.

[Jen2] Jensen J. L. W. V., *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica 30 (1906), 175–193.

[Lag] Lagrange J., *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*, Acad. Sci. Berlin (1773), 149–176.

[Lin] Lin M., *The AM-GM inequality and CBS inequality are equivalent*, Math. Intell. 34 (2012), no. 2, 6.

[Mac1] Maclaurin C., *A Letter from Mr. Colin Mac Laurin, Professor of Mathematicks at Edinburgh, and F. R. S. to Martin Folkes, Esq; V. Pr. R. S. concerning Æquations with Impossible Roots*, Phil. Trans. Roy. Soc. 34 (1726), 104–112.

[Mac2] Maclaurin C., *A Second Letter from Mr. Colin Mc Laurin, Professor of Mathematicks in the University of Edinburgh and F. R. S. to Martin Folkes, Esq; Concerning the Roots of Equations, With the Demonstration of Other Rules in Algebra; Being the Continuation of the Letter Published in the Philosophical Transactions, No 394*, Phil. Trans. Roy. Soc. 36 (1729), 59–96.

[Mal] Maligranda L., *The AM-GM inequality is equivalent to the Bernoulli inequality*, Math. Intell. 34 (2012), no. 1, 1–2.

[Neu] Von Neumann J., *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*, Math. Ann. 102 (1929), 49–131.

[Net] Netuka I., *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2014.

[New] Newton I., *Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Cambridge, 1707.

[Roy] Roy R., *Sources in the Development of Mathematics. Infinite Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-first Century*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[SG] Seltman M., Goulding R., *Thomas Harriot's Artis analyticae praxis. An English translation with commentary*, Springer, New York, 2007.

[Sch] Schwarz H. A., *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Acta Soc. Scient. Fen. 15 (1888), 315–362.

[Sim] Simon B., *Convexity: An Analytic Viewpoint*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[Std1] Stedall J., *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*, European Mathematical Society, Zürich, 2011.

[Std2] Stedall J., *The greate invention of algebra. Thomas Harriot's treatise on equations*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[Stl] Steele J. M., *The Cauchy-Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, New York, 2004.

[Syl] Sylvester J. J., *Elementary Proof and Generalization of Sir Isaac Newton's Hitherto Undemonstrated Rule for the Discovery of Imaginary Roots*, Proc. London Math. Soc. 1 (1865), 1–16.

[Tik] Tikhomirov V. M., *Stories about maxima and minima*, American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.

[Ves1] Veselý J., *Základy matematické analýzy I*, Matfyzpress, Praha, 2004.

[Ves2] Veselý J., *Základy matematické analýzy II*, Matfyzpress, Praha, 2009.

[Vie] Viète F., *The analytic art.* Translated from the Latin and with an introduction by T. Richard Witmer, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.

[Wag] Wagner C. G., *Newton's Inequality and a Test for Imaginary Roots*, The Two-Year College Mathematics Journal 8 (1977), no. 3, 145–147.

[War1] Waring E., *Meditationes algebraicae*, Cambridge, 1782.

[War2] Waring E., *Meditationes algebraicae, an English Translation of the Work of Edward Waring.* Edited and translated from the Latin by Dennis Weeks, American Mathematical Society, 1991.

Adresa

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *slavik@karlin.mff.cuni.cz*

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

BOLA RAZ JEDNA KONFERENCIA ...

VOJTECH BÁLINT

Abstract: In the years 1962 – 2008 there were held 30 conferences on the teaching of mathematics on the technical universities. The aim of this paper is to identify the reasons, which have lead to the disruption of that tradition.

1 Úvod

V roku 1962 vznikla *Komise JČSMF pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských*, v skratke VŠTEZ. Hlavným cieľom práce *Komisie* bolo skvalitniť vyučovanie matematiky na všetkých technikách, teda na vyššie spomínaných typoch škôl v celej Československej republike. Za tým účelom sa *Komisia* rozhodla usporiadať pravidelné konferencie pre učiteľov matematiky na technikách. Za 46 rokov sa konalo 30 takých konferencií, (zatiaľ) posledná v roku 2008 v Lázních Bohdaneč. Cieľom tohto príspevku nie je podať podrobný prehľad o tých konferenciách, pretože k tomu stačí nahliadnuť do konferenčných Zborníkov, ale identifikovať príčiny, kvôli ktorým sa užitočná tradícia prerušila. Je však možné, že sa aj ukončila, pretože je otázne, či bude niekedy pokračovať.

2 Pokus o krátku analýzu

Ide o históriu posledného polstoročia a najmä posledných 17 rokov, počas ktorých sa odohrali naprosto zásadné zmeny.

Ako už bolo spomínané, *Komisia* za najúčinnejšiu formu skvalitnenia vyučovania matematiky na technikách považovala usporiadanie pravidelných konferencií. Bolo to logické, pretože potreba matematiky na technikách sa neustále zvyšovala, a spolu s tým sa na technikách zvyšoval aj počet učiteľov matematiky, ktorý v roku 1984 bol približne 800. Počet učiteľov matematiky na základných a stredných školách bol samozrejme výrazne vyšší. Lenže tých 800 malo učiť vysokoškolskú matematiku a pritom ju ešte aj pestovať, teda robiť vedu, takže to bola veľká výzva aj pre tie vysoké školy, ktorých úlohou bolo vychovávať budúcich učiteľov matematiky na technikách, teda pre fakulty prírodovedecké a matematicko-fyzikálne. Na konferenciách o vyučovaní matematiky na VŠTEZ prezentovali svoje názory a najmä metódy vyučovania mnohé osobnosti zo špičkových matematických pracovísk, takže mladí, začínajúci učitelia mali možnosť sa s nimi zoznámiť a zlepšiť tak svoje pedagogické majstrovstvo. V roku 1980 sa konala už 16. konferencia, teda za 18 rokov od vzniku *Komisie* sa konferencia VŠTEZ konala takmer každý rok, potom sa prešlo na pravidelný dvojročný cyklus.

Hlavnou témou konferencií VŠTEZ boli koncepčné otázky, teda **čo by bolo treba učiť a ako by to bolo asi najlepšie učiť**. Obvykle odzneli síce aj prednášky o vlastných vedeckých výsledkoch, ale nosnou oblasťou bola metodika, pretože osnovy boli na všetkých technikách takmer rovnaké. Samozrejme, vo vyšších ročníkoch štúdia došlo na jednotlivých technikách k prirodzenej diferenciácii aj v osnovách matematiky, lebo elektrotechnický, strojársky a stavebný inžinier sa museli aj špecializovať, a podobne aj inžinier hutnícky, banícky, dopravný, ekonomický, chemicko-technologický, textilný, lesnícky, drevársky, poľnohospodársky, ... Spoločný matematický základ bol ale veľmi široký, takže naozaj bolo o čom hovoriť. Stačí nahliadnuť do SEFI Document 92.1: *A core Curriculum in Mathematics for the European Engineer* ([22]).

V roku 1993 sa spoločný štát rozpadol. Zotrvačnosťou však pokračovali spoločné problémy, a tým aj spoločné konferencie o vyučovaní matematiky na VŠTEZ. Zásadná zmena nastala až po roku 1998, keď *„študent sa stal nositeľom balíka peňazí"* v oboch samostatných štátoch, v ČR aj v SR. Stručne: zaviedlo sa *platenie za kus*, teda škola dostala toľko balíčkov peňazí, koľko mala študentov. Samozrejme, po formálnej stránke sa to nazvalo *prechod na trojstupňové štúdium*, aby sa zahmlila podstata. Mnohým však bolo ihneď jasné, kam takáto napodobenina trhového mechanizmu povedie a dali to aj najavo. Na problémy vyučovania matematiky na technikách som slovenskú matematickú komunitu upozornil ([1]) na zjazde JSMF v Nitre v roku 2002 a znovu – a oveľa dôraznejšie – na ďalšom zjazde v roku 2005. Varovné a veľmi kritické hlasy sa však ozvali z mnohých zdrojov, okrem iného na konferenciách v Hejnicích 2002 (napr. [2], [13], [14], [16], [17]), v Jasnej 2002 ([3]), v Brne 2003 (napr. [4], [9], [21]), v Rožňave 2004 (napr. [5], [18]), v Prahe 2010 (napr. [7], [10], [15], [20], [21]), … Keďže zjazdové ani konferenčné zborníky obvykle nie sú masovo dostupné, uvediem tu (bez nároku na úplnosť) niekoľko málo z tých hlasov.

Z pedagogického hľadiska je veľmi nepríjemná skutočnosť, že na fakultu sú prijatí (zo známych dôvodov) všetci záujemcovia. Základný problém vidíme v tom, že pregraduálna etapa má dva rovnocenné, ale v podstate protichodné ciele: prípravu na nástup do praxe a prípravu na graduované štúdium. Vzhľadom k ohraničenému počtu hodín sa podľa nás obom cieľom súčasne nedá bezo zvyšku vyhovieť (J. Doležalová a P. Kreml [12], [13]).

Kardinálna otázka je, či sa podarí už v prvých semestroch bakalárskeho štúdia komplexným pôsobením všetkých zainteresovaných subjektov, t. j. predovšetkým odborových katedier, nastoliť pri výučbe matematiky takú pracovnú atmosféru, ktorá by študentov motivovala k cieľavedomej príprave na budúce aplikácie matematických znalostí. Je treba presvedčiť študentov, ktorí často z mnohých zdrojov počúvajú o zbytočnosti matematiky, že tento názor v žiadnom prípade nemôže obstáť na akejkoľvek vysokej škole technického alebo ekonomického zamerania (L. Prouza [21]).

Dôležitý je už samotný základ, s ktorým prichádzajú študenti zo strednej školy. Tu je možné pozorovať dlhodobo sa zhoršujúcu úroveň stredoškolskej matematickej prípravy. Pritom za dobu od publikácie článku [8] sa situácia nielen nezlepšila, ale práve naopak (J. Baštinec [9]).

Před sto lety probíhal boj … o zřízení druhé české univerzity, a tím také o druhé místo vychovávající učitele. Dnes učitele matematiky v ČR vychovává 18 fakult … Opravdu si někdo v této republice může myslet, že všechna tato pracoviště jsou schopna poskytovat kvalitní vzdělání, a kdyby tomu tak i náhodou bylo, že se ročně „urodí" dostatečný počet jejich studentů? (E. Fuchs [15])

Mimoriadne kvalitný a podrobný je rozbor stavu učiteľstva v článku [10] J. Bečvářa.

V Európe sa začala prednedávnom vyvíjať enormná snaha vyškoliť značne väčšie percento populácie s tzv. univerzitným vzdelaním, lebo takto vraj predbehneme Američanov, Japoncov a všetkých tých, ktorí nám strpčujú život tým, že sú chytrejší. Nedáva to žiaden zmysel, lebo uchádzač o univerzitný diplom by mal disponovať prinajmenšom nadpriemerným talentom a k tomu nemalou usilovnosťou. Graf, ktorý vyjadruje súvis IQ a počtu ľudí má približne normálne rozdelenie. Ale graf tejto funkcie mal v podstate tento tvar pred tisíc rokmi a takýto bude mať aj o tisíc rokov. Aj v USA, aj v Japonsku, aj v Laponsku … ba dokonca aj na Slovensku. Je samozrejme len na spoločnosti, od akého percentilu nahor sa rozhodne udeľovať papier o univerzitnom vzdelaní (VB [6]).

Samostatnú kapitolu predstavuje zcela výnimočný článok [19] P. Piťhu, ktorý by mal byť citovaný celý, pretože mimoriadne výstižne charakterizuje problémy školstva v ČR aj v SR. Tento by mali všetci učitelia na všetkých stupňoch škôl ovládať naspamäť.

Prejavuje sa snaha ponechať *takmer celý* terajší magisterský program z matematiky a vtesnať ho *do nepomerne menšieho* počtu hodín v bakalárskom programe. Ako to ale zvládnuť po stránke odbornosti predmetu samotného a tiež z hľadiska didaktického? (R. Grepl [16])

Tieto trefné riadky sú presýtené zúfalstvom a zasluhujú si podrobnejší rozbor. Ide o odstrašujúce osnovy (pozri [14], [17], [5]), keď na Brnianskej technike sa pokúsili vtesnať obsah štyroch semestrov do jedného. Študent techniky pri 4 hodinách prednášok a 2 hodinách cvičenia týždenne mal za 13 týždňov zvládnuť nasledovný obsah:

1. Základné matematické pojmy, elementy matematickej logiky, množiny, operácie s množinami, funkcie, inverzná funkcia, funkcia dvoch a viac premenných, funkcia komplexnej premennej.
2. Vektorové priestory, základné pojmy, báza dimenzia. Vektory a operácie s vektormi, lineárna kombinácia vektorov, ich závislosť a nezávislosť.
3. Matice a determinanty, sústavy lineárnych rovníc a ich riešenie. Skalárny, vektorový a zmiešaný súčin vektorov a ich geometrické aplikácie.
4. Analytická geometria lineárnych a kvadratických útvarov.
5. Diferenciálny počet funkcií jednej premennej, limita, spojitosť, derivácia. Priebeh funkcie.
6. Diferenciálny počet funkcií viac premenných, limita, spojitosť. Smerové a parciálne derivácie, gradient funkcie.
7. Derivácie vyšších rádov, totálny diferenciál, Taylorova veta. Extrémy funkcií viac premenných.
8. Integrálny počet funkcií jednej premennej, neurčitý integrál. Priame integračné metódy.
9. Metóda per partes, substitučná metóda, integrovanie racionálnych funkcií.
10. Určitý integrál a jeho aplikácie.
11. Dvojrozmerný a viacrozmerný integrál.
12. Transformácie viacrozmerných integrálov.
13. Krivkový a plošný integrál.

Keďže na pedagogických princípoch sa nič zásadného nezmenilo, bolo jasné, že tieto „osnovy“ sa nemôžu udržať. Je ale pozoruhodné, že vôbec vznikli, pričom pomenovanie dôvodov, ktoré k ich vzniku viedli, by asi viedlo k právnym sporom ...

Pre držiteľov maturitného vysvedčenia zaviedol Igor Kluvánek v roku 1964 názov produkty povinnej školskej dochádzky (PPŠD). Problém PPŠD bol ten, že v povojnových rokoch nebol dostatok kvalifikovaných učiteľov, takže zďaleka nie na každej základnej alebo strednej škole učili skutoční odborníci. Snom Igora Kluvánka bolo vychovať generáciu dobrých učiteľov matematiky. Tento svoj sen postupne uskutočňoval až do svojho odchodu do Austrálie nekompromisným prístupom k vedomostiam študentov.

Tesne pred koncom 2. tisícročia sa Európa rozhodla, že predbehne USA. Keďže jej vodcovia objavili dávno známy fakt, že k tomu bude treba dobré mozgy, v nemalej časti

Európy sa začali úvahy o prechode na trojstupňové vysokoškolské štúdium. Vodcovia sa teda zišli v Bologni, jednom z najväčších centier stredovekej múdrosti, a bohužiaľ príliš rýchlo sa prešlo od slov k činom, pretože návnada bola neodolateľná. Idea bola určite zaujímavá: *poskytnúť* oveľa väčšej časti populácie vysokoškolské vzdelanie. Zabudlo sa pri tom na jednu dôležitú vec – **vzdelanie sa v skutočnosti nikomu nedá poskytnúť, dá sa len umožniť**. To je zásadný rozdiel! V stredoveku bolo vzdelanie umožnené len malej vybranej hŕstke ľudí a je dobre, že sa to už dávno zmenilo aj *bez* Boloňských dohôd.

V dôsledku Boloňských dohôd vznikla úplne nová situácia: *aróma eurodotácií* sa pre stredoeurópskych politikov stala neodolateľnou. Zo školstva sa stal biznis, takže počet (nielen) vysokých škôl sa zmnohonásobil – v SR je ich 38, v ČR takmer 80 a všetky sa chcú nazývať univerzitami. Už v roku 2002 som v jednom článku napísal: „Nositeľom balíka peňazí sa vraj má stať študent. Možno som to pochopil nesprávne, ale v praxi to bude znamenať, že nastane neľútostný – a možno aj bezohľadný – boj o študenta, univerzity sa budú predháňať vo vytvorení čo najvýhodnejšej ponuky pre študenta, čo bude znamenať enormný pokles požiadaviek na kvalitu študenta. Jednoducho povedané – ak ešte nemáte vysokoškolský diplom, **prosíme** Vás, prihláste sa!" Bohužiaľ, moje najhoršie obavy sa naplnili vrchovatou mierou.

Namiesto PPŠD je teda asi načase zaviesť nový názov, a to nielen pre držiteľov maturitného vysvedčenia, ale aj pre držiteľov vyšších, možno až najvyšších certifikátov. Podľa môjho názoru najvýstižnejší názov je **PET-fľaša**. Dôvod je ten, že už stredné školy by mali byť do určitej miery výberové, ale v dôsledku „*financovania za kus*" takými nie sú, takže prijmú na štúdium aj prázdnu PET-fľašu. Aby som predišiel súdnym sporom kvôli názvu prázdna PET-fľaša, musím dodať, že nejde o dehonestovanie študentov. Chyba nie je v študentoch, chyba je v systéme financovania, ktorý nútil a stále núti školy znižovať požiadavky na vedomosti. Politikom (a najmä oligarchom, ktorí ich riadia) je naviac jasné, že stádu sa vládne oveľa jednoduchšie, ako vzdelaným ľuďom, takže nemajú záujem o skutočnú vzdelanosť širšej vrstvy. O to viac však budú o potrebe vzdelanosti hovoriť ...

Syndróm PET-fľaše samozrejme pôsobí nielen na stredných školách, ktoré by už mali byť výberové, ale aj na bakalárskom stupni vysokých škôl a paradoxne – ale zákonite! – v ešte väčšej miere na magisterskom stupni, lebo prideľovaný balíček peňazí je na tomto stupni väčší. Balíček na doktorandskom štúdiu je ešte väčší, a na tzv. končiaceho študenta sú balíčky dokonca dva. A keďže vstupuje do toho aj tzv. akreditačná hra, aby sa dalo vôbec zúčastniť boja o balíčky, tak je neraz otázna aj kvalita vyšších certifikátov.

Obzvlášť nepríjemné je, že do boja o PET-fľaše sa z existenčných dôvodov zapojili aj špičkové univerzity. Napr. počet poslucháčov na Karlovej Univerzite v Prahe stúpol priam raketovo: z necelých 27 tisíc v roku 1999 až na 45 tisíc v roku 2003, na Masarykovej univerzite v Brne zo 17 tisíc v roku 1999 na vyše 36 tisíc v roku 2008. Nepodarilo sa mi zistiť tieto čísla pre Univerzitu Komenského v Bratislave, ale určitý obraz poskytne aj počet absolventov vysokých škôl na Slovensku; tento bol 15 tisíc v roku 1998 a takmer 35 tisíc v roku 2006. Vysoká škola dopravná v Žiline ako predchodkyňa terajšej Žilinskej univerzity mala 6 tisíc poslucháčov v roku 1992, t. j. pre 15-miliónové Česko-slovensko, ale teraz pre 5-miliónové Slovensko má poslucháčov až 12 tisíc.

V rámci boja o PET-fľaše musel počet hodín matematiky na školách výrazne poklesnúť, keďže nie škola si vyberá žiaka, ale žiak si vyberá školu. Hlavné kritérium PET-fľaše totiž je, že škola nič po mne nemôže chcieť, a už vôbec nie matematiku. Škola ma potrebuje, keďže na mňa dostáva peniaze, tak čo by ešte chcela.

Prechod na trojstupňové štúdium spôsobil, že konečný produkt technickej univerzity, teda INŽINIER, absolvuje na väčšine našich techník zhruba o polovicu menej hodín kontaktnej výučby matematických predmetov, ako v rokoch 1970–1985 ([1], [3], [4]). To zákonite znamená aj menší počet učiteľov matematiky na technikách – to je už ale upozornenie pre fakulty matematicko-fyzikálne a prírodovedné na možnú (ne)potrebnosť ich produktov.

Počet účastníkov 16. konferencie VŠTEZ v roku 1980 v Banskej Bystrici bol 143, na 18. konferencii v roku 1984 v Bratislave sa zúčastnilo dokonca 162 učiteľov. Počet účastníkov na 26. konferencii v roku 2000 v Lázních Bohdaneč klesol na necelých 70 a približne tento počet sa udržal až po 30. konferenciu v roku 2008. Samozrejme, dnes je možné aj viackrát ročne chodiť na odborne (aj geograficky) veľmi atraktívne konferencie po celom svete – je to len otázka peňazí. Oveľa väčší problém však je, že **stratil sa hlavný motív konferencie typu VŠTEZ.** Keďže každá technika (a nielen technika) prijme na štúdium aj prázdnu PET-fľašu, lebo najmä počet študentov rozhoduje o prídele financií, tak požiadavky na kvalitu išli zákonite dole. Dokonca na mnohých technikách sa už nerobia ani prijímacie skúšky, pretože PET-fľaša by sa na školu s prijímačkami možno ani neprihlásila. **Za takéhoto stavu je zbytočné hovoriť o metodike vyučovania a jej zlepšovaní,** lebo súťaž o PET-fľaše sa začala v roku 1999 a dosiahla obrovské úspechy: napr. v SR končí ročne 600 politológov (400 z jednej fakulty) a neuveriteľne veľa inžinierov sociálnej práce. Asi aby sa mohli starať jeden o druhého ...

3 Záver

Platenie za kus považujem za hlavný dôvod, prečo sa tradícia konferencií VŠTEZ prerušila a (zatiaľ) posledná, s poradovým číslom 30, bola v roku 2008 v Lázních Bohdaneč.

Problém. Bude niekedy 31. konferencia o vyučovaní matematiky na VŠTEZ?

Lebo katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky ju pripravila podľa plánovaného dvojročného cyklu na rok 2010 do Žiliny presne tak, ako to bolo aj napísané v Zborníku 30. konferencie. Ale záujemcov sa našlo len 14. Nič to nemení na mojom presvedčení, že takéto konferencie by mimoriadne pomohli najmä začínajúcim učiteľom matematiky na technikách. Tí starší učitelia im totiž majú odborne čo povedať a nie je dôvod myslieť si, že v budúcnosti to bude ináč. Aj keď – kto vie? Lebo v spoločnosti, kde hlavným a takmer jediným kritériom kvality je schopnosť vyrobiť zisk, môže byť všetko ináč.

Literatúra

[1] Bálint V.: *Kam kráčaš, SVŠT?* In: Zborník zjazdu JSMF, Nitra 2002, str. 71–74.

[2] Bálint V.: *Inžinier a jeho matematická príprava*, In: Zborník 27. konferencie VŠTEZ, Hejnice 2002, str. 7–12.

[3] Bálint V.: *Dematematizácia SVŠT a jej možné dôsledky*, In: Zborník 34. konferencie slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom, november 2002, str. 21–24.

[4] Bálint V.: *Stav vyučovania matematiky na technikách*, In: Sborník příspěvků 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Brno, september 2003, str. 29–30.

[5] Bálint V.: *Zmenili sa pedagogické princípy?* In: Zborník 28. konferencie VŠTEP, Rožňava, 30. 8. – 3. 9. 2004. EDIS, Žilina, 2004, 372 strán, str. 5–12.

[6] Bálint V.: *Kvantita a kvalita*, In: Zborník 37. konferencie slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom, november 2005, str. 63–65.
[7] Bálint V.: *Pár slov o reforme školstva*, In Bečvář J., Bečvářová M., Slavík A. (ed.): Sborník z konference Jak připravit učitele matematiky, Praha, 23. – 25. září 2010. Matfyzpress, Praha, 2010, 334 stran, str. 151–157.
[8] Baštinec J.: *Změny ve znalostech středoškolské matematiky u studentů FEI VUT*, In: XVI. Vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků I., Vyškov 1998, str. 55–59.
[9] Baštinec J.: *Matematika pro sériové bakaláře na FEKT VUT*, In: Sborník 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Brno 2003, str. 31–36.
[10] Bečvář J.: *Stručně o současném stavu učitelství (nejen matematiky)*, In Bečvář J., Bečvářová M., Slavík A. (ed.): Sborník z konference Jak připravit učitele matematiky, Praha, 23. – 25. září 2010. Matfyzpress, Praha, 2010, 334 stran, str. 17–28.
[11] Čepička J.; Míková M.; Tesková L.: *Výuka matematiky na technických fakultách ZČU*, In: Sborník 3. konference o matematice a fyzice na VŠT, Brno 2003, str. 43–47.
[12] Doležalová J.; Kreml P.: *O některých problémech výuky matematických předmětů na VŠB-TU Ostrava*, In: Proc. of 3rd Scientific Colloqium, Praha 2001, str. 192–196.
[13] Doležalová J.; Kreml P.: *První zkušenosti s výukou matematiky ve strukturovaném studiu*, In: Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice 2002, str. 54–59.
[14] Durnová H.: *K čemu je matematika „letem světem“*? In: Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice 2002, str. 70–75.
[15] Fuchs E.: *O výchově učitelů v Čechách (a samozřejmě i na Moravě)*, In Bečvář J., Bečvářová M., Slavík A. (ed.): Sborník z konference Jak připravit učitele matematiky, Praha, 23. – 25. září 2010. Matfyzpress, Praha, 2010, 334 stran, str. 103–110.
[16] Grepl R.: *Boloňská deklarace 1999 a příprava strukturovaného studia na vysokých školách technických v Brně*, In: Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice 2002, str. 86–89.
[17] Krupková V.: *Matematika v bakalářských studijních programech na FEKT VUT v Brně*, In: Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice 2002, str. 125–126.
[18] Malý M.: *Matematika na technické fakultě*, In: Zborník 28. konferencie VŠTEP, Rožňava 2004, str. 227–230.
[19] Piťha P.: *Velká iluze českého školství*, Učitel matematiky 16(2007/08), str. 231–242.
[20] Piťha P.: *Archa matematiky ve vírech liberalistické relativizace*, In Bečvář J., Bečvářová M., Slavík A. (ed.): Sborník z konference Jak připravit učitele matematiky, Praha, 23. – 25. září 2010. Matfyzpress, Praha, 2010, 334 stran, str. 144–148.
[21] Prouza L.: *Integrovaná výuka matematiky ve strukturovaném studiu na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice*, In: Sborník 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Brno 2003, str. 142–146.
[22] SEFI Document 92.1: *A core Curriculum in Mathematics for the European Engineer*, 1992.

Adresa

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky
Fakulta PEDAS, Žilinská univerzita
Univerzitná 1
010 26 Žilina
e-mail: *vojtech.balint@fpedas.uniza.sk*

PRÍBEH ARABSKÝCH MOZAÍK

ANNA BÁLINTOVÁ, ROD. TROJÁČKOVÁ

Abstract: This article is dedicated to Arabic mosaics which are considered to be the top of art in Arabic geometry. Following its history with emphasis on the period from the 16th century to the year 2011, when it attracted worldwide attention on the occasion of granting the Nobel price for chemistry – the discovery of quasicrystals. In certain Arabic mosaics, as well as in quasicrystals, there are methodical motives which are following particular mathematics rules, but are never recurring.

1 Úvod

Arabské mozaiky sú vedcami považované za umelecký vrchol arabskej geometrie. Neperiodické mozaiky arabsko-islamského umenia možno obdivovať v paláci španielskej Alhambry ako aj v iránskej mešite Darb-il Imam. Tieto fascinujúce mozaiky pomohli vedcom pochopiť atómovú štruktúru kvazikryštálov. A práve za objav kvazikryštálu získal v roku 2011 izraelský vedec Daniel Shechtman[1] Nobelovu cenu za chémiu.[2] Nobelov výbor pri udeľovaní prestížneho ocenenia označil kvazikryštály nasledovne: *Fascinujúce mozaiky, ktoré sa nikdy neopakujú, podobné tým z arabského sveta, ale na úrovni atómov.* Výbor naviac zdôraznil, že tento objav bol extrémne kontraverzný. Vedci totiž považovali za nemožné, aby existoval kryštál s neperiodickým usporiadaným motívom atómov. Ak sa pozrieme na Shechtmanov objav kvazikryštálu z matematického hľadiska, tak jeho revolučnosť spočívala v päťčlennej ose symetrie. Podľa dovtedajších poznatkov nemal kryštál s takouto symetriou existovať. Teória totiž pripúšťala kryštály 2, 3, 4 alebo 6 násobne symetrické. To znamená, že pri otočení o patričný zlomok kruhu vznikne rovnaký obrazec. Shechtman navzdory teórii, mal pred sebou difrakčný obrazec, ktorý stačilo otočiť o desatinu kruhu, aby sa dokonale prekryl. A to bolo v rozpore s definíciou kryštálu platnou niekoľko storočí, čo vyvolalo nedôveru ba až zarytý odpor zo strany niektorých vedcov k tomuto prevratnému objavu. Bol to zrejme aj hlavný dôvod, prečo od objavu kvazikryštálu v roku 1982 musel D. Shechtman dlho a vytrvale bojovať za jeho uznanie, korunované v roku 2011 Nobelovou cenou.

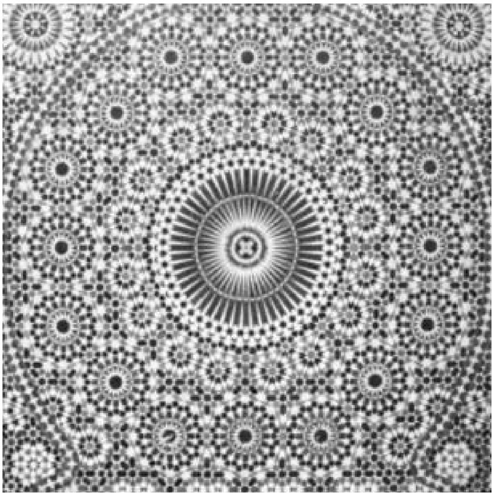
2 Arabské mozaiky a kvazikryštály

Pôvod mozaík je historikmi umiestnený do oblasti v okolí Stredozemného mora. Najstaršie známe mozaiky sa objavujú už v VIII. st. p. n. l., boli vytvorené z okrúhliakov rôznych farieb vložených do cementu. Neskoršie (III. – I. st. p. n. l.) sa k nim pridávajú úlomky kamienkov, kúsky pálenej hliny, mramora a podobne. V podstate každý národ im vpečatil vlastnú identitu prostredníctvom materiálov, tvarov, zoskupení, farieb. Napríklad v Ríme dávali prednosť mramoru a sklovine, Mauri zasa najradšej používali úlomky zo smaltovaných tehličiek. Všeobecne arabskí tvorcovia mozaík propagovali geometrické tvary, ktoré považovali za posvätné. V strede mozaík veľmi často umiestňovali 8 alebo 16 cípu hviezdu.

[1] Daniel Shechtman, (nar. 24. Januára 1941 v Tel Avive), emeritný profesor Izraelského technologického inštitútu Technion v Haife.

[2] Nobelova cena za chémiu za rok 2011sa tešila väčšej pozornosti ako obvykle. Organizácia spojených národov vyhlásila rok 2011 za rok chémie na počesť stého výročia udelenia Nobelovej ceny Marii Sklodowskej Curie.

Vrcholné diela arabských majstrov môžno obdivovať v španielskej Alhambre. Jej palác sa začal stavať už v XII. storočí, ale rozšírený, zveľadený a dokončený do súčasnej podoby bol až v XVI. storočí. Je dekorovaný množstvom mozaík, ktoré sú vo väčšine prípadov vytvorené na základe pravidelných mnohouholníkov a následne aplikovaním základných geometrických transformácií, akými sú posunutie, otáčanie a symetria. Pri podrobnom skúmaní mozaík v Alhambre bolo určených 17 rôznych geometrických transformácií, pomocou ktorých je možné realizovať pokrytie roviny rôznymi motívmi. V prvom rade je to päť základných typov určených posunutím daného motívu alebo otočením o 60°, 90°, 120° a 180° – bez *prevrátenia* základného prvku pokrytia. Ak pripustíme toto prevrátenie získame ďalších dvanásť typov pokrytia, ktoré sú charakterizované rôznym počtom osí symetrií: 0, 1, 2, 3, 4, 6. Takto dostávame spolu hore uvedených 17 rôznych rovinných pokrytí, nazývaných periodické pokrytia roviny. Môžeme ich rozlišovať aj podľa toho, či sa zhodujú so svojím zrkadlovým obrazom alebo nie (prvých päť základných transformácií). Ako si možno ľahko všimnúť, v počte osí symetrií chýba číslo 5, a práve päťčlenná osa symetrie nás obohatí nielen o neperiodické pokrytie roviny, ale zároveň aj o kvazikryštál. Existenciu uvedených 17 transformácií dokázal v roku 1891 aj matematik a kryštalograf Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919).



Obr.1 Neperiodická arabská mozaika[3]

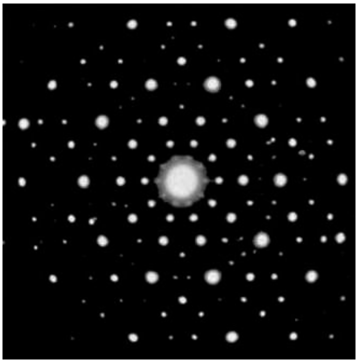
Konštrukcia motívov arabských mozaík začínala jednoduchými geometrickými tvarmi ako sú trojuholník, štvorec, kruh a následne boli postupne aplikované rôzne ďalšie konštrukcie vrátane už spomínaných geometrických transformácií. Finálna kompozícia arabských mozaík často pripomína istým spôsobom labyrint bez konca, čo umocňuje ich povestné magické čaro. Podľahol mu aj holandský všestranný umelec a vedec Maurits Cornelis Escher.[4] Návšteva paláca v Alhambre zásadne ovplyvnila jeho ďalšiu činnosť,

[3] Obr. 1 je prevzatý z [6].
[4] Maurits Cornelis Escher (1898–1972), holandský umelec a vedec známy svojimi kresbami a grafikami.
[5] Obr. 2a je prevzatý z [8], obr. 2b je prevzatý z [7].

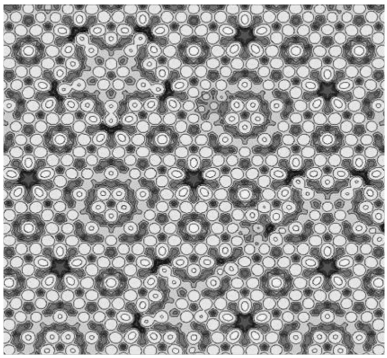
po zbytok svojho života sa venoval hlavne konštrukcii rôznych *teselácií,* nazývaných dodnes *escherovské*. Podrobnejšie sa možno s touto problematikou zoznámiť v článkoch Lucie Ilucovej Csachovej (pozri [1], [2] a [3]). Pripomeňme si teraz pre úplnosť aspoň definíciu teselácie: *Rovinnou teseláciou sa nazýva pokrytie roviny dvojrozmernými ohraničenými útvarmi bez prekrytia* (pozri [3]). Najznámejšou Escherovou prácou spojenou s mozaikami je grafika predstavujúca príbeh jašteričky, ktorá sa odpútala od roviny a vydala sa na cestu do priestoru.

M. C. Escher sám o sebe povedal: *Hoci nemám žiadne vzdelanie v exaktnej vede, často sa mi zdá, že mám viac spoločného s matematikmi ako s mojimi kolegami umelcami.* Napriek jeho pocitu matematika, reakcia na tvorbu M. C. Eschera bola zo strany matematikov rozporuplná. Podrobnejšie sa môžeme o tom dočítať v článku *Escher ako učitel* (pozri [3]).

Venujme teraz svoju pozornosť kvazikryštálom, nakoľko ich spojitosť s arabskými mozaikami je až zarážajúca (pozri [5]). Kvazikryštál, obr. 2a a 2b, je definovaný ako pevná látka, ktorej štruktúrne jednotky (atómy a molekuly) nie sú usporiadané periodicky, ako je tomu u tradičných kryštálov, ale ani nie sú rozmiestnené náhodne ako u amorfných materiálov. Objav novej štruktúry spôsobil, že bolo potrebné predefinovať aj kryštál. Súčasná definícia znie: *Kryštál je akákoľvek pevná látka, ktorej difrakčný diagram je bodový.*



Obr. 2a Motív elektronickej difrakcie kvazikryštálu[5]



Obr. 2b Atomický model kvazikryštálu Ag-Al[5]

Vráťme sa opäť k našej *kráľovne* – matematike s konštatovaním, že už v roku 1202 taliansky matematik Leonardo Pisano Fibonacci predstavil prvý kvaziperiodický rad. Jeho konštrukciou, už niekoľko storočí pred objavom kvazikryštálu, dal odpoveď na otázku: *Je príroda pri stavbe pevných látok obmedzená výlučne len na materiály amorfné a kryštalické? Alebo existuje možnosť usporiadať atómy na dlhú vzdialenosť pravidelne ale neperiodicky?* Túto skutočnosť pripomenuli Jan Fikar a Tomáš Kruml vo svojom príspevku *Fibonacciho králikárna aneb dvacet let od objevu kvazikrystalu* (pozri [4]). Príklady neperiodického rovinného pokrytia predstavili v druhej polovine dvadsiateho storočia aj ďalší matematici. Uveďme niektorých z nich v chronologickom poradí: 1961 –

Wang Hao, 1966 – Robert Berger, 1971 – Raphael M. Robinson, 1974 – Roger Penrose (tzv. Penrosovo pokrytie), 1977 – Robert Ammann, 1996 – Karel Čulík a Jaroslav Opatrný.

3 Záver

Arabské mozaiky predstavujú veľmi zaujímavý, poučný príklad spojenia matematiky a umenia. A v čom je poučenie? Vedci by si mali častejšie uvedomiť, že niektoré základné pravdy môžu byť len domnienky a je veľmi potrebné mať stále otvorenú myseľ novým informáciám, tak ako to zdôraznila Nobelova komisia pri udeľovaní cien v roku 2011.

Literatúra

[1] Ilucová L.: *História pentagonálnych teselácií*, In: Bečvář J., Bečvářová M. (ed): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 57–62.

[2] Ilucová L.: *Pentagonálne teselácie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 55(2010), str. 125–132.

[3] Csachová L.: *Escher ako učitel*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 55(2010), str. 184–190.

[4] Fiker J., Kruml T.: *Fibonacciho králikárna aneb dvacet let objevu kvazikrystal* [online]. [cit. 23. 5. 2015].

http://www.tomason.free.fr/kvazi.html

[5] Lapoint P.: *Le Nobel mosaique* [online]. [cit. 29. 4. 2015].

http://www.sciences-presse.qc.ca/actualite/2011/10/5/nobel-mosaique

[6] *Kvazikryštál* [online]. Posledná revízia 26. júna 2013 [cit. 29. 4. 2015].

http://cs.wikipedia.org/wiki/Kvazikrystal

[7] Wikipedia: *Dan Shechtman* [online]. Posledná revízia 8. apríla 2015 [cit. 23. 5. 2015].

http://fr.wikipedia.org/wiki/Dan_Shechtman

[8] *Prix Nobel de Chimie 2011: la découvert des quasi-cristaux.* [online]. Publikované 5. 6. 2012 [cit. 23. 5. 2015].

http://cultursciences.chimie.ens.fr./content/prix-nobel-de-chimie-2011

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Monastir
Boulevarde de l'Environement
5000 Monastir
Tunisie
email: *abalintova@seznam.cz*

GRAMOVY MATICE A DETERMINANTY

Jindřich Bečvář

Abstract: In the first part of this article, some basic properties of Gram matrices and determinants are described in connections to the Gram-Schmidt ortogonalization process, QR-decomposition, solving overdetermined systems, theory of least squares etc. In the second part, the brief history of these questions, as well as basic information on lives and achievements of J. P. Gram and E. Schmidt are presented.

1 Úvod

Článek je věnován Gramovým maticím a determinantům a jejich souvislostem s ortogonální projekcí, známým Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem, QR-rozkladem, aproximací, přibližným řešením soustav lineárních rovnic, které nemají exaktní řešení, a metodou nejmenších čtverců. Přináší nejdůležitější informace o J. P. Gramovi a E. Schmidtovi, kteří svými pojednáními k rozvoji těchto témat přispěli, a několik ukázek z jejich prací. Pojednává též o výkladu této látky v monografii G. Kowalewského a v článku Y. K. Wonga. Volně navazuje na stať [B1] týkající se pseudoinverzních matic a řešení „neřešitelných“ soustav lineárních rovnic.

2 Gramova matice, Gramův determinant

Nechť V je reálný nebo komplexní prostor se skalárním součinem, tj. vektorový prostor nad polem F reálných, resp. komplexních čísel, na kterém je definován skalární součin. *Gramovou maticí* vektorů $w_1, \ldots, w_m \in V$ nazveme matici

$$G(w_1, \ldots, w_m) = \begin{pmatrix} (w_1|w_1) & (w_1|w_2) & \ldots & (w_1|w_m) \\ (w_2|w_1) & (w_2|w_2) & \ldots & (w_2|w_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (w_m|w_1) & (w_m|w_2) & \ldots & (w_m|w_m) \end{pmatrix},$$

Gramovým determinantem vektorů $w_1, \ldots, w_m$ nazveme determinant této matice. Na místě ij tedy stojí v matici $G(w_1, \ldots, w_m)$ skalární součin i-tého a j-tého vektoru množiny $\{w_1, \ldots, w_m\}$.

Je-li V reálný vektorový prostor, je matice $G(w_1, \ldots, w_m)$ *symetrická*, je-li V komplexní vektorový prostor, je matice $G(w_1, \ldots, w_m)$ *hermitovská.*

Z elementárních vlastností skalárního součinu vyplývá, že pro každé číslo $a \in F$ a každé $j = 1, \ldots, m$ je

$$\det G(w_1, \ldots, aw_j, \ldots, w_m) = |a|^2 \cdot \det G(w_1, \ldots, w_m)$$

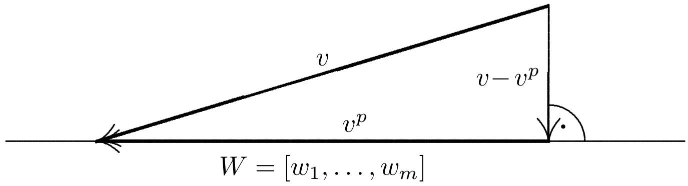
a pro každou permutaci P m-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$ je

$$\det G(w_{P(1)}, \ldots, w_{P(m)}) = \det G(w_1, \ldots, w_m).$$

Gramova matice i Gramův determinant přirozeným způsobem souvisí s pojmem ortogonální projekce.

3 Ortogonální projekce

Nechť $W = [w_1, \dots, w_m]$ je podprostor prostoru V a nechť $v \in V$ je vektor, který v podprostoru W neleží. Hledejme ortogonální projekci v^p vektoru v na podprostor W. Situaci naznačuje následující obrázek.



Vektor v^p je právě jediný vektor podprostoru W, pro který je vektor $v - v^p$ kolmý na podprostor W. Jestliže je $v^p = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$, potom je tato podmínka ekvivalentní se souborem rovností

$$(v - v^p | w_j) = 0, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Po dosazení za v^p a jednoduché úpravě dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned}
(w_1|w_1)a_1 + (w_2|w_1)a_2 + \dots + (w_m|w_1)a_m &= (v|w_1)\ , \\
(w_1|w_2)a_1 + (w_2|w_2)a_2 + \dots + (w_m|w_2)a_m &= (v|w_2)\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(w_1|w_m)a_1 + (w_2|w_m)a_2 + \dots + (w_m|w_m)a_m &= (v|w_m)\ .
\end{aligned}$$

Hledaná m-tice $(a_1, \dots, a_m)$ je tedy řešením soustavy lineárních rovnic, jejíž maticí je matice transponovaná ke Gramově matici[1] vektorů $w_1, \dots, w_m$ a vektor pravých stran je tvořen skalárními součiny vektoru v s vektory $w_1, \dots, w_m$.

Uvědomme si, že vektor $v^p \in W$ je možno vyjádřit právě jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů $w_1, \dots, w_m$ právě tehdy, jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé, resp. právě tehdy, když má výše uvedená soustava rovnic právě jediné řešení, tj. právě tehdy, když je její matice regulární. Došli jsme k následujícímu poznatku:

Gramova matice $G(w_1, \dots, w_m)$ vektorů $w_1, \dots, w_m$ je regulární právě tehdy, když jsou tyto vektory lineárně nezávislé.[2]

V tomto případě je podle Cramerova pravidla pro každé $j = 1, \dots, m$

$$a_j = \frac{\det G_j}{\det G(w_1, \dots, w_m)}\ ,$$

[1] Je-li prostor V reálný, je to přímo Gramova matice $G(w_1, \dots, w_m)$ vektorů $w_1, \dots, w_m$.
[2] Tento fakt se snadno dokáže i přímo.

kde G_j je matice, která z matice $G(w_1,\dots,w_m)^{\mathrm{T}}$ vznikne nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem pravých stran uvažované soustavy rovnic.

Předpokládejme, že $w_1,\dots,w_m$ jsou lineárně nezávislé vektory prostoru V. Podprostor $W=[w_1,\dots,w_m]$ je rovněž prostorem se skalárním součinem (ten je dán zúžením skalárního součinu prostoru V na podprostor W). Skalární součin je v komplexním případě pozitivně definitní hermitovská seskvilineární forma, v reálném případě pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Její maticí vzhledem k bázi $\{w_1,\dots,w_m\}$ je právě Gramova matice $G(w_1,\dots,w_m)$. Přejdeme-li od báze $\{w_1,\dots,w_m\}$ k nějaké ortonormální bázi N podprostoru W (vzhledem k té má skalární součin jednotkovou matici E), je[3]

$$E = B^{\mathrm{T}}\cdot G(w_1,\dots,w_m)\cdot \overline{B},$$

kde B je matice přechodu od báze N k bázi $\{w_1,\dots,w_m\}$. Podle věty o násobení determinantů je

$$1=\det B^{\mathrm{T}}\cdot \det G(w_1,\dots,w_m)\cdot \overline{\det B} = \left|\det B\right|^2\cdot \det G(w_1,\dots,w_m).$$

Odtud ihned vyplývá následující výsledek.

Gramův determinant lineárně nezávislých vektorů je kladný.

Poznamenejme, že když je množina $\{w_1,\dots,w_m\}$ ortogonální bází podprostoru W, je situace jednodušší. Gramova matice vektorů $w_1,\dots,w_m$ je diagonální, na diagonále stojí čtverce norem těchto vektorů. Pro každé $j=1,\dots,m$ je

$$a_j=\frac{(v|w_j)}{||w_j||^2}\,.$$

Koeficientům $a_1,\dots,a_m$ se v tomto případě někdy říká *Fourierovy koeficienty.* Zdůrazněme, že j-tý koeficient závisí jen na vektoru v a j-tém vektoru ortogonální báze $\{w_1,\dots,w_m\}$. Zvětšíme-li podprostor W přidáním nenulového vektoru w_{m+1}, který je kolmý na vektory $w_1,\dots,w_m$, potom ortogonální projekce vektoru v na podporostor $[W,w_{m+1}]$ bude součtem ortogonální projekce vektoru v na podprostor W a vektoru

$$a_{m+1}w_{m+1}=\frac{(v|w_{m+1})}{||w_{m+1}||^2}\cdot w_{m+1}.$$

Na této skutečnosti se zakládá myšlenka nekonečného rozvoje. Pokud má prostor V nekonečnou dimenzi a existuje v něm spočetná ortogonální podmnožina $\{w_1,w_2,\dots\}$ nenulových vektorů, můžeme uvažovat o projekci v^p vektoru v na podprostor $W=[w_1,w_2,\dots]$, tj. o nekonečné řadě

$$v^p=\sum_{j=1}^{\infty}a_jw_j,\quad \text{kde}\quad a_j=\frac{(v|w_j)}{||w_j||^2}\quad \text{pro každé}\quad j=1,2,3,\dots$$

Závažnou otázkou je, jaký je vztah vektoru v a jeho ortogonální projekce v^p na podprostor W pro daný prostor V, daný skalární součin a podprostor W.

[3] Symbolem $\overline{B}$ značíme matici, která je komplexně sdružená s maticí B, tj. na stejných místech těchto matic jsou navzájem komplexně sdružená čísla. V reálném případě je $\overline{B}=B$.

4 Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces

Ortogonální projekci (a zejména její geometrickou představu – viz předchozí obrázek) lze velmi snadno využít ke zdůvodnění tzv. *Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu.* Máme-li množinu $\{v_1, \dots, v_m\}$ vektorů prostoru V, můžeme následujícím postupem sestrojit ortogonální množinu $\{w_1, \dots, w_m\}$ podprostoru $W = [v_1, \dots, v_m]$.

1. Nejprve položíme

$$w_1 = v_1.$$

2. Vektor v_2 kolmo promítneme na podprostor $[w_1]$ a jako druhý vektor vezmeme vektor

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{||w_1||^2} \cdot w_1.$$

3. Vektor v_3 kolmo promítneme na podprostor $[w_1, w_2]$ a jako třetí vektor vezmeme vektor

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3|w_1)}{||w_1||^2} \cdot w_1 - \frac{(v_3|w_2)}{||w_2||^2} \cdot w_2 \quad \text{atd.}$$

m. Nakonec vektor v_m kolmo promítneme na podprostor $[w_1, \dots, w_{m-1}]$ a jako m-tý vektor vezmeme vektor

$$w_m = v_m - \frac{(v_m|w_1)}{||w_1||^2} \cdot w_1 - \dots - \frac{(v_m|w_{m-1})}{||w_{m-1}||^2} \cdot w_{m-1}.$$

Z uvedené konstrukce[4] ihned vyplývá ortogonalita vektorů $\{w_1, \dots, w_m\}$. Rovněž je dobře vidět, že se vektory $v_1, \dots, v_m$ snadno vyjádří jako lineární kombinace vektorů $w_1, \dots, w_m$ a naopak, vektory $w_1, \dots, w_m$ jako lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_m$. Jestliže je tedy $\{v_1, \dots, v_m\}$ bází podprostoru W, je $\{w_1, \dots, w_m\}$ ortogonální bází tohoto podprostoru; pokud tyto vektory normujeme, dostaneme ortonormální bázi podprostoru W.

5 QR-rozklad

Gramův-Schmidtův proces je jednou z cest, jak dospět k tzv. *QR-rozkladu*[5] matice na součin ortogonální a horní trojúhelníkové matice.

Nechť je dána (obecně obdélníková) matice A typu $n \times m$ s lineárně nezávislými sloupci $v_1, v_2, \dots, v_m \in F^n$. Modifikujme výše uvedený Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces takto: v každém kroku budeme vektor w_i normovat, získáme vektor e_i, vektor v_{i+1} budeme promítat na podprostor generovaný ortonormální bází $\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ a vyjádříme jej lineární kombinací těchto vektorů.

1. $w_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{w_1}{||w_1||}.$

---

[4] Poznamenejme, že vyjde-li vektor w_j nulový pro nějaký index j, vynecháváme v dalším výpočtu členy $\frac{(v_k|w_j)}{||w_j||^2} \cdot w_j$ pro $k > j$.

[5] Též *QR-faktorizace*, resp. *QR-dekompozice.*

Je tedy $(v_1|e_1) = (w_1|e_1) = ||w_1||$.

Potom je $v_1 = (v_1|e_1)e_1$.

2. $w_2 = v_2 - (v_2|e_1)e_1, \quad e_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$.

Je tedy $(v_2|e_2) = (w_2|e_2) = ||w_2||$.

Potom je $v_2 = (v_2|e_1)e_1 + ||w_2||e_2 = (v_2|e_1)e_1 + (v_2|e_2)e_2$. Atd.

m. $w_m = v_m - (v_m|e_1)e_1 - \cdots - (v_m|e_{m-1})e_{m-1}, \quad e_m = \frac{w_m}{||w_m||}$.

Je tedy $(v_m|e_m) = (w_m|e_m) = ||w_m||$.

Potom je
$$v_m = (v_m|e_1)e_1 + \cdots + (v_m|e_{m-1})e_{m-1} + ||w_m||e_m =$$
$$= (v_m|e_1)e_1 + \cdots + (v_m|e_m)e_m.$$

Utvoříme-li matici Q z vektorů $e_1, e_2, \ldots, e_m$ jako sloupců, je

$$A = Q \cdot \begin{pmatrix} (v_1|e_1) & (v_2|e_1) & (v_3|e_1) & \ldots & (v_m|e_1) \\ 0 & (v_2|e_2) & (v_3|e_2) & \ldots & (v_m|e_2) \\ 0 & 0 & (v_3|e_3) & \ldots & (v_m|e_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_m|e_m) \end{pmatrix}.$$

Příklad. Uveďme jednoduchý příklad QR-rozkladu, který byl získán výše uvedeným postupem:

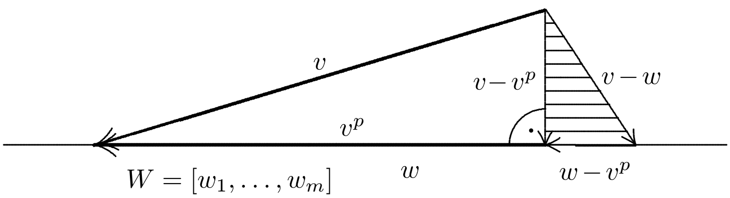
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

6 Aproximace

Ortogonální projekce $v^p \in W$ vektoru $v \in V$ na podprostor $W = [w_1, \ldots, w_m]$ je vektor, který je vektoru v ze všech vektorů podprostoru W „nejbližší" v tomto smyslu:

$$\forall w \in W,\ w \neq v^p \qquad ||v - v^p|| < ||v - w||.$$

K důkazu této skutečnosti stačí nahlédnout následující obrázek a užít Pýthagorovu větu pro vyšrafovaný trojúhelník.



Jsou-li vektory $w_1, \ldots, w_m$ lineárně nezávislé, můžeme pomocí Gramova determinantu zjistit, „o kolik“ se vektory v a v^p liší, tj. vypočítat *normu* (*délku*) vektoru $v - v^p$. Zřejmě je

$$||v - v^p||^2 = (v - v^p \big| v - v^p) = (v - v^p \big| v) = (v|v) - (v^p|v) \ = \ = \ ||v||^2 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\det G_j}{\det G(w_1, \ldots, w_m)} \cdot (w_j|v),$$

takže

$$||v - v^p||^2 \cdot \det G(w_1, \ldots, w_m) = ||v||^2 \cdot \det G(w_1, \ldots, w_m) - \sum_{j=1}^{m} \det G_j \cdot (w_j|v) \ .$$

Rozvineme-li determinant matice $G(v, w_1, \ldots, w_m)^{\mathrm{T}}$ podle prvního řádku, dostaneme rovnost

$$\det G(v, w_1, \ldots, w_m) = (v|v) \cdot \det G(w_1, \ldots, w_m) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \cdot (w_j|v) \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det G_j .$$

Pravé strany předchozích rovností se rovnají, takže

$$||v - v^p||^2 \cdot \det G(w_1, \ldots, w_m) = \det G(v, w_1, \ldots, w_m),$$

neboli

$$||v - v^p||^2 = \frac{\det G(v, w_1, \ldots, w_m)}{\det G(w_1, \ldots, w_m)}.$$

7 Přibližné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující soustavu lineárních rovnic nad polem F.

$$\begin{aligned} w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \cdots + w_{1m}x_m &= v_1, \\ w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \cdots + w_{2m}x_m &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{n1}x_1 + w_{n2}x_2 + \cdots + w_{nm}x_m &= v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Sloupce rozšířené matice této soustavy zapíšeme jako vektory

$$\begin{aligned} w_1 &= (w_{11}, w_{21}, \ldots, w_{n1}), \\ w_2 &= (w_{12}, w_{22}, \ldots, w_{n2}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_m &= (w_{1m}, w_{2m}, \ldots, w_{nm}), \\ v &= (v_1, v_2, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

budeme je považovat za vektory prostoru F^n se standardním skalárním součinem.[6] Definujme podprostor W prostoru F^n rovností $W = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$.

[6] Připomeňme, že standardní skalární součin vektorů $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F^n$ je definován rovností $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ pro $F = \mathbb{R}$, resp. $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ pro $F = \mathbb{C}$.

Víme, že soustava (1) je řešitelná právě tehdy, když je sloupec pravých stran lineární kombinací sloupců matice soustavy (tj. $v \in W$); vektory utvořené z koeficientů všech takových lineárních kombinací jsou právě všechna řešení soustavy (1).

Pokud soustava (1) není řešitelná, není sloupec pravých stran lineární kombinací sloupců matice soustavy (tj. $v \notin W$). Vektor v nahradíme „nejbližším“ vektorem ležícím v podprostoru W. Tímto vektorem, jak již víme, je ortogonální projekce v^p vektoru v na podprostor W. Zajímají nás však koeficienty $a_1, \dots, a_m$ lineární kombinace, kterou je vektor v^p z vektorů $w_1, \dots, w_m$ vyjádřen. Vektor $(a_1, \dots, a_m)$ dává tzv. *přibližné řešení* neřešitelné soustavy (1). Tento vektor, jak jsme již viděli, je řešením soustavy lineárních rovnic, jejíž maticí je matice $G(w_1, \dots, w_m)^{\mathrm{T}}$. Jsou-li vektory $w_1, w_2, \dots, w_m$ lineárně nezávislé, je přibližné řešení jediné.

Příklad. Uvažujme soustavu lineárních rovnic nad polem reálných čísel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2, \\ x & - & y & + & z & = & 1, \\ 2x & & & + & 3z & = & 2. \end{array} \tag{2}$$

Soustava (2) je zjevně neřešitelná. Vyřešíme tedy soustavu lineárních rovnic s Gramovou maticí:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6a_1 & & & + & 9a_3 & = & 7, \\ & & 2a_2 & + & a_3 & = & 1, \\ 9a_1 & + & a_2 & + & 14a_3 & = & 11. \end{array}$$

Jejím řešením je lineární množina $(-\frac{1}{3}, 0, 1) + \big[(3, 1, -2)\big]$, všechny její vektory jsou přibližnými řešeními soustavy (2). Chceme-li najít přibližné řešení s nejmenší normou, musíme zjistit, pro jaké k nabývá funkce

$$\Big(-\frac{1}{3} + 3k\Big)^2 + k^2 + (1 - 2k)^2 = 14k^2 - 6k + 1 + \frac{1}{9}$$

minimální hodnoty. Snadno zjistíme, že to nastane pro $k = \frac{3}{14}$. Přibližné řešení soustavy (2) s nejmenší normou je tedy

$$\frac{1}{42}\big(13, 9, 24\big).$$

Pro výpočet *přibližného řešení s nejmenší normou* můžeme využít *Mooreovu-Penroseovu pseudoinverzní matici* (viz [B1]). K matici A soustavy rovnic (2) je Mooreovou-Penroseovou pseudoinverzní maticí matice

$$A^+ = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 18 & -21 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li touto maticí sloupec pravých stran soustavy (2), získáme výše uvedené přibližné řešení soustavy (2), které má nejmenší normu.

8 Metoda nejmenších čtverců

S výše uvedenou problematikou velmi úzce souvisí základní myšlenka tzv. *metody nejmenších čtverců*. Máme-li například najít koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které figurují v lineární kombinaci

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

přičemž hodnoty proměnných veličin y, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou postupně zjišťovány pozorováními (nebo měřeními), docházíme po k pozorováních, kde k je výrazně větší než n, k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a_1x_{11} + a_2x_{12} + \cdots + a_nx_{1n} &= y_1, \\ a_1x_{21} + a_2x_{22} + \cdots + a_nx_{2n} &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1x_{k1} + a_2x_{k2} + \cdots + a_nx_{kn} &= y_k, \end{aligned} \tag{3}$$

která je pravděpodobně neřešitelná. Sloupec $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ pak není lineární kombinací sloupců matice soustavy (3). Nahradíme jej proto jeho ortogonální projekcí $y^p = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ na podprostor W prostoru F^k, který je generován n sloupci matice soustavy (3). Přitom je

$$\forall w \in W,\ w \neq y^p \qquad ||y - y^p|| < ||y - w||.$$

Píšeme-li $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$, je tato podmínka ekvivalentní s nerovností

$$\sum_{i=1}^{k}(y_i - z_i)^2 < \sum_{i=1}^{k}(y_i - w_i)^2.$$

Proto se hovoří o metodě nejmenších čtverců.

Širší kontext předchozích odstavců lze najít v učebnici [B2], ale i v řadě dalších knih, viz např. [P].

9 Jørgen Pedersen Gram

Jørgen Pedersen Gram, dánský matematik a pojišťovací matematik (aktuár), se narodil 27. června 1850 v Nustrupu (nedaleko Haderslev, vévodství Šlesvické) v rodině farmáře Pedera Jørgensena Grama. V letech 1862 až 1868 navštěvoval střední školu (Ribr Katedralskole), pak studoval na univerzitě v Kodani, kde roku 1873 absolvoval náročné magisterské studium matematiky (na úrovni dnešního Ph.D.). Ještě před koncem studia zveřejnil první práci v časopisu Tidsskrift for Mathematik a roku 1874 publikoval její rozšířenou verzi pod názvem *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne* v časopisu Mathematische Annalen.

Roku 1875 se stal asistentem-výpočtářem v pojišťovací společnosti Hafnia, v níž se postupně dostával na významnější pozice, v letech 1895 až 1910 byl jejím vedoucím úředníkem. V sedmdesátých a osmdesátých letech rovněž pracoval na matematickém modelu pro lesní hospodářství, který stále zdokonaloval, a své výsledky čas od času publikoval (1876, 1879, 1883, 1889). Jeho model lesního hospodářství byl v praxi využíván. Roku 1884 Gram založil vlastní pojišťovací společnost Skjold, jejímž ředitelem byl až do roku 1911. Nadále však pracoval ve společnosti Hafnia.

Aktivity pro pojišťovací společnost i vytváření matematického modelu lesního hospodářství ho vedly zpět k teoretické matematice, zejména k pravděpodobnosti, statistice a numerické analýze. Teoretické poznatky těchto disciplín totiž často při svých činnostech využíval. Byl nejen vynikajícím výpočtářem, ale i tvůrčím matematikem. Jeho odborné zaměření je možno vymezit následujícími hesly: pravděpodobnost, matematická statistika, numerická analýza, teorie čísel, Gama funkce, Dzeta funkce, posloupnosti ortogonálních funkcí, rozvoje funkcí v ortogonální řady, aproximace, metoda nejmenších čtverců.

Za rozsáhlou práci *Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graeense*[7] získal Gram roku 1884 zlatou medaili Dánské akademie věd. O čtyři roky později byl zvolen jejím čestným členem.

V letech 1910 až 1916 byl předsedou Dánské pojišťovací rady. Pravidelně přednášel v Dánské matematické společnosti, v letech 1883 až 1889 byl editorem časopisu Tidsskrift for Mathematik, spolupracoval s časopisem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (referoval o pracích publikovaných v Dánsku). Přestože nikdy nepůsobil na univerzitě, ovlivnil celou generaci dánských matematiků.

Roku 1879 se Gram oženil, jeho ženou se stala Dorthe Marie Sørensen, dcera kováře. Roku 1895 ovdověl, o rok později se podruhé oženil, jeho druhou ženou byla Emma Birgitte Hansen. Zemřel 29. dubna 1916 v Kodani, po úrazu, který mu způsobil neopatrný cyklista. O jeho životě a díle viz [Z], [HM], [H1], [H2] a [Wa].

Jørgen Pedersen Gram získal roku 1879 titul doktora filozofie za práci *Om Räkkeudviklinger, bestemte ved Hjälp af de mindste Kvadraters Methode* [G1], jejíž německou verzi publikoval roku 1883 v časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik pod názvem *Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate* [G2]. Tato práce sehrála důležitou roli v teorii integrálních rovnic. Právě v ní jsou načrtnuty (ještě v nepříliš zjevné formě) pojmy *Gramova matice*, *Gramův determinant* a *ortogonalizační proces.*

Gegeben sei eine Reihe von Argumenten x und zwei derselben entsprechende Reihen von Grössen o_x und ν_x. Diese Grössen werden sämmtlich als reell angenommen, die ν_x ferner positiv. In einer nach bekannten Functionen von x fortschreitenden Reihe mit n Gliedern

$$(1.) \qquad y_x = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

sollen dann die Coefficienten so bestimmt werden, dass die Summe $\sum_x \nu_x (o_x - y_x)^2$ ein Minimum werde.

[7] Det kongelige danske Videnskabernes Selskab **2** (1884), str. 183–308. Práce bývá citována pod názvem *Investigations of the number of primes less than a given number.*

Mit anderen Worten, man soll die Function y so bestimmen, dass, wenn o_x als Beobachtungen, ν_x als zugehörige Gewichte aufgefasst werden, die Quadratsumme der Abweichungen die kleinstmögliche werde.

Die Aufgabe führt auf n Gleichungen von der Form

$$(2.)\qquad \sum_x \nu_x X_i o_x = \sum_x \nu_x X_i y_x \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

aus welchen man durch Einsetzen des Ausdruckes (1.) *für y n Normalgleichungen erhält. Diese können nach dem bekannten Gaussischen Verfahren aufgelöst werden; wir schlagen aber einen anderen Weg ein.*

Bezeichnet man im Allgemeinen durch

$$(3.)\qquad y_x^{(m)} = a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mm}X_m$$

die Function y, welche erhalten wird, wenn man nur die m ersten Glieder der Reihe (1.) *bei der Ausgleichung benutzt, und setzt man ferner der Kürze wegen*

$$(4.)\qquad \sum_x \nu_x X_i o_x = s_i, \qquad \textit{und} \qquad \sum_x \nu_x X_i X_k = p_{ik} = p_{ki},$$

so werden die Normalgleichungen für die Coefficienten von y^m

$$(5.)\qquad \begin{cases} s_1 = a_{m1}p_{11} + a_{m2}p_{12} + \cdots + a_{mm}p_{1m}, \\ s_2 = a_{m1}p_{21} + a_{m2}p_{22} + \cdots + a_{mm}p_{2m}, \\ \dotfill \\ s_m = a_{m1}p_{m1} + a_{m2}p_{m2} + \cdots + a_{mm}p_{mm}. \end{cases}$$

Statt die Function y direct zu bestimmen, suchen wir allgemein die Differenz $y^{(m)} - y^{m-1} = b_{m1}X_1 + b_{m2}X_2 + \cdots + b_{mm}X_m$, wo $b_{mi} = a_{mi} - a_{m-1\,i}$. Für die b erhält man dann $m-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{m1}p_{11} + b_{m2}p_{12} + \ldots + b_{m\,m-1}p_{1\,m-1} + a_{mm}p_{1m} &= 0, \\ b_{m1}p_{21} + b_{m2}p_{22} + \ldots + b_{m\,m-1}p_{2\,m-1} + a_{mm}p_{2m} &= 0, \\ \dotfill \\ b_{m1}p_{m-1\,1} + b_{m2}p_{m-1\,2} + \cdots + b_{m\,m-1}p_{m-1\,m-1} + a_{mm}p_{m-1\,m} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich die b, wenn zuerst a_{mm} aus den Normalgleichungen (5.) *bestimmt worden ist.*

Bezeichnet man mit $P^{(m)}$ die symmetrische Determinante $\sum \pm p_{11}p_{22}\ldots p_{mm}$ und durch $P_{ik}^{(m)}$ die dem Elemente p_{ik} entsprechende Unterdeterminante derselben, so wird erstens

$$a_{mm} = \frac{\sum_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)}}$$

und demnächst

$$\frac{b_{m1}}{P_{m1}^{(m)}} = \frac{b_{m2}}{P_{m2}^{(m)}} = \cdots = \frac{b_{m\,m-1}}{P_{m\,m-1}^{(m)}} = \frac{a_{mm}}{P_{mm}^{(m)}} = \frac{\sum_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)} P^{(m-1)}}\,.$$

Wenn man die m ersten Verhältnisse resp. mit $X_1, X_2, \ldots, X_m$ im Zähler und Nenner multiplicirt und addirt, kommt

$$\frac{y^{(m)} - y^{m-1}}{\sum_i P_{mi}^{(m)} X_i} = \frac{\sum_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)} P^{(m-1)}}\,,$$

oder ganz allgemein

$$(6.)\qquad y^{(m)} - y^{m-1} = \frac{\sum_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m-1)} P^{(m)}} \cdot \sum_i P_{mi}^{(m)} X_i\,.$$

Da ferner $y^{(1)} = a_{11} X_1 = \frac{s_1}{P^{(1)}}$, so wird endlich durch einfache Addition für $y^{(n)}$ die folgende Formel erhalten:

$$(7.)\qquad y^{(n)} = \frac{s_1 \cdot X_1}{P^{(1)}} + \frac{\sum_i P_{2i}^{(2)} s_i \cdot \sum_i P_{2i}^{(2)} X_i}{P^{(1)} P^{(2)}} + \cdots + \frac{\sum_i P_{ni}^{(n)} s_i \cdot \sum_i P_{ni}^{(n)} X_i}{P^{(n-1)} P^{(n)}}.$$

Die Summationen sollen überall auf alle diejenigen Werthe von i erstreckt werden, für welche die Determinanten ihre Bedeutung behalten.

Aus dieser Formel lassen sich die Coefficienten a ohne Schwierigkeit bestimmen.
([G2], str. 42–44)

O Gramově disertaci [G1] referoval v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Wilhelm Lazarus (1825–1890), o Gramově práci [G2] Otto Stolz (1842–1905). Oba referáty přispěly k obecnému povědomí o Gramových výsledcích.

10 Erhard Schmidt

Německý matematik Erhard Schmidt se narodil 13. ledna roku 1876 v Dorpatu (Tartu, Jurjev, nyní Estonsko) v rodině fyziologa Alexandera Schmidta. Studoval na německých univerzitách v Dorpatu, Berlíně a Göttingen. V Berlíně byl jeho učitelem Hermann Amadeus Schwarz (1843–1921), v Göttingen David Hilbert (1862–1943). Roku 1905 získal v Göttingen doktorát. Výsledky jeho disertační práce *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener* byly roku 1907 publikovány v časopisu Mathematische Annalen (viz [S1]). Roku 1906 se Schmidt habilitoval v Bonnu. O dva roky později získal profesorské místo na univerzitě v Curychu, od roku 1910 působil krátce v Erlangen, od roku 1911 ve Vratislavi (Wrocław, Breslau) a pak v letech 1917 až 1950 na univerzitě v Berlíně (v období 1929 až 1930 byl rektorem). Od roku 1946 do roku 1958 byl prvním ředitelem Matematického institutu Akademie věd Německé demokratické republiky.

Erhard Schmidt byl členem (1918) Pruské akademie věd v Berlíně, členem (1927) a předsedou (1927/28 a 1935/36) Deutsche Mathematiker-Vereinigung, členem (1942) Bavorské akademie věd. Roku 1936 byl vedoucím německé delegace na Mezinárodním kongresu matematiků v Oslo. Podílel se na založení časopisu Mathematische Zeitschrift (1918), roku 1948 založil časopis Mathematische Nachrichten a po dvě desetiletí byl jeho hlavním redaktorem.

Roku 1909 se oženil, jeho žena Berta von Bergmann však roku 1916 při narození třetího syna zemřela. Schmidt zemřel 6. prosince 1959 v Berlíně. O jeho životě a díle viz [R], [Di], [N] a [Pi].

Erhard Schmidt stavěl na výsledcích svých učitelů. Pracoval hlavně v teorii funkcí, navazoval na Hilbertovy výsledky o integrálních rovnicích, využíval Schwarzovy metody. Věnoval se rovněž algebře, teorii potenciálu a izoperimetrickému problému. Patřil k těm matematikům, kteří do teorie Hilbertových prostorů vnesli geometrické představy a geometrickou terminologii; funkce, resp. posloupnosti chápal jako body (resp. vektory) prostoru nekonečné dimenze. Jeho práce z let 1907 a 1908 měly velký význam pro rozvoj funkcionální analýzy (ortogonalizační proces, lineární operátory a funkcionály, prostory nekonečné dimenze, prostory funkcí integrovatelných v lebesgueovském smyslu atd.).

Ortogonalizační (přesněji řečeno *ortonormalizační*) proces prezentoval roku 1907 víceméně v dnešní podobě v první části třídílné práce *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* [S1].[8] Popsal jej ve třetím paragrafu *Ersetzung linear unabhängiger Funktionensysteme durch orthogonale.* Uvažoval n lineárně nezávislých spojitých reálných funkcí $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a s jejich pomocí vytvořil ortonormální systém funkcí

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1(y))^2 dy}}\,,$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2(z)\psi_1(z)dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2(y) - \psi_1(y)\int_a^b \varphi_2(z)\psi_1(z)dz\right)^2 dy}}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1}\psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_n(z)\psi_\varrho(z)dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_n(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1}\psi_\varrho(y)\int_a^b \varphi_n(z)\psi_\varrho(z)dz\right)^2 dy}}\,,$$

který generuje stejný prostor funkcí jako výchozí soubor $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ bilden ferner ein normiertes und orthogonales Funktionensystem d. h. genügen den Gleichungen

[8] První část práce [S1] má stejný název jako Schmidtova disertace z roku 1905, z velké části je její mírnou modifikací.

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\psi_\nu(x)dx = 0 \quad oder \quad 1,$$

je nachdem ν und μ verschieden oder gleich sind. ([S1], str. 443)

V poznámce pod čarou Schmidt upozornil na Gramovu práci [G2] z roku 1883, v níž se myšlenka ortogonalizace již objevila:

Im wesentlichen dieselben Formeln sind von J. P. Gram in der Abhandlung „Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate", Crelles Journal Bd. 94, aufgestellt worden. ([S1], str. 442)

V závěrečné kapitole práce [S1] nazvané *Über die Entwicklung willkürlicher Fuktionen nach Systemen vorgeschriebener* (str. 473–476) uvažoval ortonormalizační proces aplikovaný na spočetný systém reálných funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ se spojitými druhými derivacemi na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které pro každé ν je $\varphi_\nu(a) = \varphi_\nu(b) = 0$. Předpokládal, že systém funkcí $\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \ldots$ je *uzavřený*[9] (*abgeschlossenes*), tj. že neexistuje nenulová spojitá funkce $f(x)$, pro kterou by bylo $f(a) = f(b) = 0$ a pro každé ν platila rovnost

$$\int_a^b f(x)\varphi_\nu''(x)\,dx = 0.$$

Mírně modifikovaným ortogonalizačním procesem získal funkce $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots,$

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \varphi_\nu'(z)\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho'(y) \int_a^b \varphi_\nu'(z)\psi_\varrho'(z)\,dz\right)^2 dy}}, \ldots$$

Pak dokázal, že pro každou funkci $g(x)$ se spojitou derivací na intervalu $\langle a, b\rangle$, pro kterou $g(a) = g(b) = 0$, je

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\psi_\nu'(y)\,dy\,,$$

přičemž tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně. V následujícím paragrafu tento výsledek zobecnil: nepředpokládal nulovost funkcí v bodech a, b. Dospěl tak k úvahám o nekonečných rozvojích spojitých funkcí.

Roku 1908 popsal Schmidt ortogonalizační proces daleko abstraktněji v práci *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* [S2]. Nekomplikoval přitom ortogonalizační proces normováním vektorů. V paragrafu *Die Orthogonalisierung* (str. 61–62) konstruoval k daným komplexním funkcím $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ ortogonální systém funkcí (*orthogonales Funktionensystem*)

[9] Tato podmínka velice omezuje prostor funkcí, na které lze výsledek aplikovat.

$$C_1(x) = A_1(x),$$

$$C_2(x) = A_2(x) - \frac{(A_2; \overline{C_1})}{||C_1||^2} \cdot C_1(x),$$

$$C_3(x) = A_3(x) - \frac{(A_3; \overline{C_1})}{||C_1||^2} \cdot C_1(x) - \frac{(A_3; \overline{C_2})}{||C_2||^2} \cdot C_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n(x) = A_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \frac{(A_n; \overline{C_\varrho})}{||C_\varrho||^2} \cdot C_\varrho(x)$$

a ukázal, že funkce $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ generují stejný prostor jako funkce $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ (o nichž tentokrát nepředpokládal, že jsou lineárně nezávislé). V poznámce pod čarou opět odkázal na Gramovu práci [G2] z roku 1883. Uvedl rovněž, že nenulové funkce $C_i(x)$ je možno normovat a že lze vyjít i od spočetného systému funkcí $A_1(x), A_2(x), \ldots$

Unsere Rekursionsformeln (20) und die an sie geknüpften Schlussfolgerungen behalten ihre Gültigkeit, wenn die gegebene Funktionenreihe unendlich ist. Das angegebene Verfahren liefert dann eine orthogonale und normirte Funktionenreihe, welche mit der gegebenen in dem Sinne linear aequivalent ist, dass jede Funktion der ersteren Reihe sich linear homogen mit constanten Coefficienten durch eine endliche Anzahl der Funktionen der zweiten Reihe darstellen lässt und umgekehrt. ([S2], str. 62)

V následujícím paragrafu nazvaném *Ein weiteres Kriterium linearer Abhängigkeit* (str. 62–63) Schmidt definoval Gramův determinant funkcí $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ a dokázal, že je invariantní vzhledem k lineárním transformacím, jejichž determinant je v absolutní hodnotě roven jedné. Termín Gramův determinant nepoužil, ale opět se odvolal na Gramovu práci [G2].

Převodem odpovídající Gramovy matice na diagonální tvar Schmidt odvodil, že Gramův determinant je vždy nezáporný a že funkce $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když je příslušný Gramův determinant kladný.

Die Determinante (21) ist also stets reell und nie negativ. Sie ist gleich Null, wenn die Funktionen $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ linear abhängig sind und grösser als Null, wenn sie linear unabhängig sind. ([S2], str. 63)

S ortogonalizačním procesem a Gramovými determinanty Schmidt pracoval i ve druhé kapitole *Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, která pojednává o homogenní soustavě lineárních rovnic

$$a_{n1}Z_1 + a_{n2}Z_2 + \cdots + a_{nm}Z_m \ \ldots \ \text{ad inf.} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots \ \text{ad inf.})$$

a nehomogenní soustavě lineárních rovnic, která je zapsána obdobně. Gramovy determinanty využil při rozkladu dané funkce na dvě navzájem kolmé složky, z nichž jedna leží v podprostoru generovaném funkcemi $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$, resp. ortogonální bází $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_n(x)$ (str. 67–68); v poznámce pod čarou znovu odkázal na Gramovu práci [G2]. Gramovy determinanty využil i v paragrafu *Auflösung der inhomogenen linearen Gleichungen* (str. 69–71).

O Schmidtově práci [S1] referoval v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Paul Gustav Stäckel (1862–1919), o jeho práci [S2] Ernst Hellinger (1883–1950).

Schmidtovy práce [S1] a [S2] jsou psány téměř dnešním stylem. Ve srovnání s Gramovou statí [G2] jsou jasné a srozumitelné.

11 Gerhard Hermann Waldemar Kowalewski

Na Gramovy a Schmidtovy výsledky reagoval Gerhard Kowalewski (1876–1950)[10] v prvním vydání své rozsáhlé monografie *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten* [K] z roku 1909. V 15. kapitole nazvané *Wronskische und Gramsche Determinanten* věnoval pozornost Gramovým determinantům v souvislosti s lineární závislostí a nezávislostí aritmetických vektorů a spojitých reálných, resp. spojitých komplexních funkcí. Základní výsledky uvedl v paragrafu *Gramsche Kriterium für reelle stetige Funktionen* (str. 321–325).

Wir wissen, daß m *Wertsysteme*

$$\left\{\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \ldots, & x_{mn} \end{array}\right. \tag{1}$$

dann und nur dann linear unabhängig sind, wenn ihre Matrix den Rang m *hat. …*

Die reellen Wertsysteme (1) *sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn*

$$\left\| \begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \ldots & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \ldots & x_{mn} \end{array} \right\|^2 = \left| \begin{array}{llll} (x_1\ x_1) & (x_1\ x_2) & \ldots & (x_1\ x_m) \\ (x_2\ x_1) & (x_2\ x_2) & \ldots & (x_2\ x_m) \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ (x_m\ x_1) & (x_m\ x_2) & \ldots & (x_m\ x_m) \end{array} \right|$$

[10] Kowalewski studoval v Königsbergu (Královec, Kaliningrad), Greifswaldu a Lipsku, kde roku 1898 promoval a o rok později se habilitoval. Jako mimořádný profesor působil od roku 1901 v Greifswaldu a od roku 1904 v Bonnu, jako řádný profesor od roku 1909 na Německé technice v Praze, od roku 1912 na Německé univerzitě v Praze, od roku 1920 na technice v Drážďanech a v letech 1939 až 1945 opět na Německé univerzitě a Německé technice v Praze. Věnoval se hlavně teorii transformačních grup, diferenciální geometrii, teorii aproximací a interpolací, matematické teorii her a historii matematiky. Je autorem více než stovky odborných časopiseckých prací a více než dvaceti učebnic, které vycházely opakovaně a byly hojně využívány na německých univerzitách i technikách.

positiv ist.[11]

Wir wollen diese Determinante die Determinante der inneren Produkte nennen oder die Gramsche Determinante der Wertsysteme (1).

Die Determinante der inneren Produkte von m reellen Wertsystemen ist also positiv, solange die Wertsysteme linear unabhängig sind, und verschwindet, wenn sie linear abhängig sind. ...

Die Determinante der inneren Produkte von m reellen stetigen Funktionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x) \qquad (a \le x \le b) \tag{2}$$

ist positiv, solange die Funktionen linear unabhängig sind, und verschwindet, wenn sie linear abhängig sind.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit der reellen stetigen Funktionen (2) *lautet also*

$$\begin{vmatrix} (f_1\ f_1) & (f_1\ f_2) & \cdots & (f_1\ f_m) \\ (f_2\ f_1) & (f_2\ f_2) & \cdots & (f_2\ f_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_m\ f_1) & (f_m\ f_2) & \cdots & (f_m\ f_m) \end{vmatrix} > 0.$$

Dies ist das Gramsche Kriterium. ([K], str. 321–322)

V důkazu Gramova kritéria Kowalewski využil ortonormalizační proces a od funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ dospěl k funkcím $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$:

Setzen wir

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1\ f_1)}},$$

so wird

$$(\varphi_1\ \varphi_1) = 1.$$

Es läßt sich nun λ so wählen, daß

$$(f_2 + \lambda\,\varphi_1\,,\,\varphi_1) = (f_2\ \varphi_1) + \lambda = 0$$

ist. Man braucht nur

$$\lambda = -\,(f_2\ \varphi_1)$$

zu setzen.

$\widehat{f}_2 = f_2 + \lambda\,\varphi_1$ *kann nicht in dem ganzen Intervall* (a, b) *verschwinden. Sonst wären die Funktionen f linear abhängig. Es ist daher*

$$(\widehat{f}_2\ \ \widehat{f}_2) > 0$$

[11] Symbolem na levé straně předchozí rovnosti je míněn součin dvou matic, které mají v řádcích vektory $x_1, x_2, \ldots, x_m$, přičemž se násobí řádky s řádky. Viz [K], str. 66.

und, wenn wir

$$\varphi_2 = \frac{\widehat{f_2}}{\sqrt{(\widehat{f_2}\ \widehat{f_2})}}$$

setzen,

$$(\varphi_2\ \varphi_2) = 1, \qquad (\varphi_2\ \varphi_1) = 0.$$

Jetzt lassen sich λ, μ *so wählen, daß*

$$(f_3 + \lambda\,\varphi_1 + \mu\,\varphi_2\,,\ \varphi_1) = 0$$

und

$$(f_3 + \lambda\,\varphi_1 + \mu\,\varphi_2\,,\ \varphi_2) = 0$$

wird.

Diese Gleichungen reduzieren sich nämlich wegen

$$(\varphi_1\ \varphi_1) = 1, \qquad (\varphi_1\ \varphi_2) = 0, \qquad (\varphi_2\ \varphi_2) = 1$$

auf

$$(f_3\ \varphi_1) + \lambda = 0, \qquad (f_3\ \varphi_2) + \mu = 0.$$

$\widehat{f_3} = f_3 + \lambda\,\varphi_1 + \mu\,\varphi_2$ *kann nicht durchweg Null sein, da die* f *linear unabhängig sind. Daher ist*

$$(\widehat{f_3}\ \widehat{f_3})\ >\ 0$$

und, wenn man

$$\varphi_3 = \frac{\widehat{f_3}}{\sqrt{(\widehat{f_3}\ \widehat{f_3})}}$$

setzt,

$$(\varphi_3\ \varphi_3) = 1, \qquad (\varphi_3\ \varphi_1) = (\varphi_3\ \varphi_2) = 0.$$

So kann man fortfahren. ([K], str. 323–324)

V následujícím paragrafu *Komponenten einer Funktion in bezug auf* m *linear unabhängige Funktionen* (325–326) Kowalewski opět uvažoval výchozí systém funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ a s ním ekvivalentní sytém $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, který získal ortogonalizačním procesem. Dospěl k rozkladu funkce F na dvě navzájem kolmé složky, opět využil Gramovy determinanty.

Nehmen wir irgend eine Funktion F, *die in* (a, b) *reell und stetig ist, so läßt sie sich in zwei Summanden zerlegen, von denen der eine sich linear durch die* f *ausdrückt, während der andere zu allen* f *orthogonal ist …* ([K], str. 325)

V paragrafu *Wronskische Determinanten* (str. 327–330) uvedl ekvivalentní podmínku pro lineární závislost funkcí, v níž figuruje Wronského determinant, a zdůraznil výhodnost Gramovy metody.

Die Wronskische ist spezieller als die Gramsche Methode, weil sie sich auf Funktionen bezieht, die eine gewisse Anzahl von Malen differenzierbar sind, während die Gramsche Methode nur die Stetigkeit fordert. ([K], str. 330)

V paragrafu *Gramsches Kriterium für komplexe stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen* (330–337) Kowalewski přenesl předchozí výsledky na spojité komplexní funkce. Nejprve však zavedl jejich skalární součin:

Wenn zwei komplexe stetige Funktionen in (a, b) vorliegen, so bezeichnen wir

$$\int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,dx \qquad \textit{mit} \qquad (f\ \overline{g}),$$

wie wenn f und $\overline{g}$ reell wären. ([K], str. 330)

Poté zformuloval Gramovo kritérium pro spojité komplexní funkce, definoval ortogonalitu funkcí rovností $(f\ \overline{g}) = 0$ a v důkazu Gramova kritéria využil ortonormalizační proces.

Připomněl, že výchozí funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je možno vyjádřit lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, které získal ortonormalizačním procesem, a naopak. V následujícím textu se znovu zabýval ortogonální projekcí:

Jede komplexe Funktion F, die in (a, b) stetig ist, läßt sich in zwei Summanden zerlegen, von denen der eine eine lineare Kombination der f und der andere zu allen f orthogonal ist. ([K], str. 333)

Ortogonální projekci funkce F vyjádřil Kowalewski lineární kombinací funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, resp. lineární kombinací funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_m$; příslušnými koeficienty jsou Fourierovy koeficienty, resp. podíly dvou determinantů (viz část 3). Zdůraznil charakteristický znak ortogonální projekce:

Sie ist unter den linearen Kombinationen L der f diejenige, welche das Integral

$$(F - L,\ \overline{F} - \overline{L}) = \int_a^b (F - L)(\overline{F} - \overline{L})\,dx$$

zu einem Minimum macht. ([K], str. 335)

Ortogonalizační proces Kowalewski znovu popsal v paragrafu *Orthogonalisierung linear unabhängiger Vektoren* (str. 423–426), který uvedl větou:

Eine wichtige Rolle in der Schmidtschen Theorie spielt das Orthogonalisierungsverfahren, welches wir jetzt darlegen wollen. ([K], str. 423)

Podstatou ortogonalizace je v tomto paragrafu následující „indukční krok“:

Von den $n + 1$ linear unabhängigen Vektoren

$$u^{(1)},\ u^{(2)},\ \ldots,\ u^{(n)},\ v$$

seien die n ersten paarweise orthogonal. Es sei also

$$\left(u^{(r)}\ u^{(s)}\right) = 0. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n;\ r \neq s)$$

Nach den vorhin gemachten Bemerkung läßt sich die reelle Zahl a_ν so wählen, daß

$$u^{(\nu)} \quad \textit{und} \quad v + a_\nu\, u^{(\nu)}$$

zueinander orthogonal sind, daß also

$$\left(u^{(\nu)},\ v + a_\nu\, u^{(\nu)}\right) = 0$$

ist. Bildet man nun den Vektor

$$v + a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} + \cdots + a_n u^{(n)},$$

so ist er zu jedem der Vektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ orthogonal. … ([K], str. 423–424)

Kowalewski zdůraznil možnost ortogonalizace pro nekonečnou posloupnost funkcí a poznamenal:

Den Übergang von dem Vektorensystem $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ zu $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots$ nennt E. Schmidt den Orthogonalisierungsprozeß. ([K], str. 424)

Při výpočtu koeficientů, které svazují oba systémy vektorů, opět využil Gramovy determinanty. Ty se ostatně objevují v jeho monografii na řadě míst.

V bibliografických poznámkách Kowalewski připomněl Gramovo pojednání [G2], Schmidtovu disertační práci z roku 1905 a článek [S2] (viz [K], str. 543–544). Pozoruhodné je, že se na řadě míst Kowalewského monografie z roku 1909 objevily odkazy na Schmidtovy výsledky z let 1905 a 1908.

Pro časopis Bulletin of the American Mathematical Society sepsal podrobnou recenzi Kowalewského monografie [K] americký matematik Maxime Bôcher (1867–1918), autor známé učebnice *Introduction to Higher Algebra* z roku 1907. Ve své dvacetistránkové stati [Bo] věnoval pozornost jak Gramovým determinantům, tak Kowalewského prezentaci Schmidtových výsledků. Mimo jiné uvedl:

Chapter XV (17 pages) on Wronskian and Gramian Determinants is one of the most novel and timely in the book. ([Bo], str. 126)

Karl Otto Emil Lampe (1840–1918) stručně referoval o Kowalewského monografii [K] v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik pouze na základě Bôcherovy recenze.

Kowalewského monografie [K] byla velmi úspěšná. Nepřispěla však nijak zvlášť k rychlému rozšíření poznatků o Gramových maticích a determinantech, což je překvapivé.

12 Y. K. Wong

Přestože se Gramovy matice a determinanty v souvislosti s ortogonalizačním procesem a ortogonální projekcí objevily roku 1909 na řadě míst Kowalewského monografie *Einführung in die Determinantentheorie* ... [K], termíny *Gramova matice*, *Gramův determinant* a *Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces* se až do poloviny třicátých let příliš neužívaly.[12]

Tyto pojmy a termíny pomohl rozšířit Y. K. Wong svou prací *An application of orthogonalization process to the theory of least squares* [Wo] publikovanou roku 1935.

V její první části, která nese název *Vectors, Inner Products, and Linear Independence* (str. 55–57), uvedl (z dnešního pohledu) zcela elementární poznatky lineární algebry (sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem, skalární součin, lineární závislost a nezávislost atd.), ve druhé části *Gram-Schmidt's Orthogonalization Process* (str. 57–61) podal srozumitelný výklad ortogonalizačního procesu a připojil několik jednoduchých důsledků. Ve třetí části *Algebraic Derivation of the Normal Equations* (str. 61–64) odvodil způsob nalezení přibližného řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic pomocí Gramovy matice. Ve čtvrté části *Matrices and Their Reciprocals* (str. 64–66) a v páté části *Symmetric Matrices of Positive Type* (str. 66–67) vyložil základy maticového počtu (definice matice, sčítání a násobení matic, násobení matice skalárem, inverzní matice, adjungovaná matice, pozitivně definitní symetrická matice). V šesté části *Gramian matrices* (str. 67–69) zavedl pojem Gramovy matice a ukázal některé jejich elementární vlastnosti (viz dále). V posledních dvou částech, *Gauss Method of Substitution* (str. 69–73) a *Gauss's Method of Substitution and its Relation to Gramian Schmidt's Orthogonalization Process* (str. 73–75), využil předchozí poznatky k jinému pohledu na Gaussův eliminační algoritmus (viz dále).

Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci Wong charakterizoval v následující větě, samotný ortogonalizační proces popsal v jejím důkazu. Nejprve zavedl jednoduchou symboliku:

... we shall adopt the notation $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $B_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$, *and* $C_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$ *for* $i = 1, 2, \dots, r$.

[12] Jistými výjimkami jsou následující práce: L. Meder: *Über den Zusammenhang zwischen den Determinanten von Gram und Wronski*, Monatshefte für Mathematik und Physik **21** (1910), str. 336–343, D. R. Curtiss: *Relations between the Gramian, the Wronskian, and a third determinant connected with the problem of linear independence*, Bulletin of the American Mathematical Society **17** (1911), str. 462–467, K. Ogura: *Generalization of Bessel's and Gram's inequalities and the elliptic space of infinitely many dimensions*, The Tôhoku Mathematical Journal **18** (1920), str. 1–22, M. Picone: *Sul determinante di Gram*, Bollettino della Unione matematica Italiana **5** (1926), str. 81–84, H. P. Thielman: *On the invariance of a generalized Gramian under the group of linear functional transformations of the third kind*, Bulletin of the American Mathematical Society **39** (1933), str. 342–343, H. P. Thielman: *On the invariance of a generalized Gramian in a Riemannian function space*, American Journal of Mathematics **56** (1934), str. 438–444.

THEOREM 5. *For every set of vectors* $A_1, \dots, A_r$, *there exists uniquely a set of vectors* $B_1, \dots, B_r$ *such that*

5.1) $(B_t, B_s) = 0 \quad (t \neq s)$.

5.2) *For every* t *satisfying the relation* $1 \leq t \leq r$, *then* A_t *is a linear combination of* $B_1, \dots, B_t$; *and* B_t *is a linear combination of* $A_1, \dots, A_t$.

5.3) $B_1 = A_1$; *and for* $t > 1$, $(B_t - A_t)$ *is a linear combination of* $B_1, \dots, B_{t-1}$, *and is also a linear combination of* $A_1, \dots, A_{t-1}$.

5.4) *If* $t > 1$, *then* $(A_s, B_t) = 0$ *for every* $s < t$.

5.5) $(A_t, B_t) = (B_t, B_t) = (B_t, A_t)$ *for every* t. ([Wo], str. 57)

Gramovu matici Wong charakterizoval v šesté části své práce takto:

THEOREM 13. *Let* $A_1, \dots, A_r$ *be a set of vectors, and let* $B_1, \dots, B_r$ *be the orthogonalized set of vectors. Then the matrix*

$$\zeta(A_1, \dots, A_r) = \begin{pmatrix} (A_1, A_1) & \dots & (A_1, A_r) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ (A_r, A_1) & \dots & (A_r, A_r) \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

has the following properties:

13.1) *symmetry*

13.2) $D[\zeta(A_1, \dots, A_r)] = n(B_1)n(B_2)\cdots n(B_r)$,[13]

13.3) *positiveness.*

A matrix of the form (6.1) *is called a Gramian matrix.* ([Wo], str. 67)

V další větě Wong dokázal ekvivalenci lineární nezávislosti vektorů $A_1, \dots, A_r$, pozitivní definitnosti Gramovy matice těchto vektorů a nenulovosti příslušného Gramova determinantu.

THEOREM 14. *The following three assertions are equivalent:*

14.1) *the set* $A_1, \dots, A_r$ *is linearly independent;*

14.2) *the Gramian matrix* (6.1) *is properly positive;*

14.3) *The determinant of the Gramian matrix* (6.1) *is different from zero.*

([Wo], str. 68)

Gramovy matice Wong využil i na dalších stránkách své práce, například při úpravách matice soustavy lineárních rovnic na stupňovitý tvar pomocí ortogonalizačního procesu (v podstatě se jedná o QR-rozklad).

Zajímavé je, že Wong necitoval ani jednu z Gramových či Schmidtových prací. Přitom svým článkem výrazně přispěl k rozšíření pojmů, ale i termínů *Gramova matice*, *Gramův determinant* a *Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.* Výslovně se

[13] Symbolem D značí determinant, dále je $n(X) = (X, X)$.

odkazoval na výsledky Davida Hilberta a Eliakima Hastingse Moorea (1862–1932) a na klasické učebnice Leonarda Eugena Dicksona (1874–1954), Maxima Bôchera, Dunhama Jacksona (1888–1946) a E. H. Moorea.[14]

13 Závěr

Poznamenejme na závěr, že jistou ortogonalizaci uvažoval již Pierre Simon Laplace (1749–1827), francouzský matematik, fyzik a astronom, v prvním doplňku práce *Théorie analytique des probabilités* [L]. Obdobný postup použil i Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces poutá pozornost i v současné době, zejména v souvislosti s teorií nejmenších čtverců a s nejrůznějšími numerickými metodami (viz např. [S], [H], [LQ], [LL], [WL], [Dr]). Rozlišován je klasický a modifikovaný Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces (viz [F]).

V té či oné podobě se Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces vyskytuje prakticky ve všech učebnicích lineární algebry a patří k základním poznatkům této disciplíny. Gramova matice a Gramův determinant se objevují spíše ve speciálních partiích větších monografií.

Ortogonalizační proces je v německých, ale i jiných učebnicích označován většinou jen jako Schmidtův,[15] v učebnicích vydaných v Sovětském svazu pouze jako ortogonalizační proces (beze jmen).[16] V učebnicích psaných anglicky, italsky apod. je většinou uváděn jako ortogonalizační proces Gramův-Schmidtův.[17]

---

[14] L. E. Dickson: *Modern Algebraic Theories*, Chicago, 1926, L. E. Dickson: *First Course in the Theory of Equations*, University of Michigan Library, 1922, M. Bôcher: *Introduction to higher algebra*, New York, 1907, D. Jackson: *The Theory of Approximation*, AMS, 1930, E. H. Moore: *Vectors, Matrices, and Quaternions*, Class lectures by R. W. Barnard, 1925–1926.

[15] Viz například H. Boseck: *Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965 (viz str. 223), M. Koecher: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Berlin, 1983 (viz str. 157), I. Satake: *Linear Algebra*, Dekker, New York, 1975 (viz str. 115), L. Bican: *Lineární algebra*, SNTL, Praha, 1979 (viz str. 185).

[16] Viz například I. M. Gelfand: *Linejnaja algebra*, 3. vydání, Nauka, Moskva, 1966 (viz str. 39), český překlad: Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953 (viz str. 28), A. G. Kuroš: *Kurs vyššej algebry*, 7. vydání, GIFML, Moskva, 1962 (viz str. 213–214), V. A. Il'in, E. G. Poznjak: *Linejnaja algebra*, Nauka, Moskva, 1974, (viz str. 93), A. N. Rublev: *Linejnaja algebra*, Vyssaja škola, Moskva, 1968, (viz str. 315).

[17] Viz například D. S. Watkins: *Fundamentals of Matrix Computations*, J. Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2010 (viz str. 223), H. Paley, P. M. Weichsel: *Elements of Abstract and Linear ALgebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto, London, Sydney, 1972 (viz str. 466), T. S. Blyth, E. F. Robertson: *Linear Algebra*, Chapman and Hall, London, 1986 (viz str. 75), C. W. Curtis: *Linear Algebra. An Introductory Approach*, Springer, New York, 1974, 1984 (viz str. 124), L. Smith: *Linear Algebra*, Springer, New York, 1978 (viz str. 230), G. Accascina, V. Villani: *Algebra lineare*, ETS Pisa, 1980 (viz str. 206), S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algebra*, Alfa, Bratislava, 1973, 1974 (viz str. 451), G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Prehl'ad modernej algebry*, Alfa, SNTL, Bratislava, Praha, 1979 (viz str. 199). Připomeňme však i německou učebnici W. Klingenberg: *Lineare Algebra und Geometrie*, Springer, Berlin, 1984 (viz str. 106), a českou učebnici L. Motl, M. Zahradník: *Pěstujeme lineární algebru*, UK, Karolinum, 2003 (viz str. 65).

Literatura

[B1] Bečvář J., *Pseudoinverze*, In: Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 35. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2014, str. 87–98.

[B2] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000, další vydání 2002, 2005, 2010, 435 stran.

[Bo] Bôcher M., *Kowalewski's determinants*, Bulletin of the American Mathematical Society **17** (1910), str. 120–140.

[Di] Dinghas A., *Erhard Schmidt (Erinnerungen und Werk)*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **72** (1970), str. 3–17.

[Dr] Drygas H., *On the relationship between the method of least squares and Gram-Schmidt orthogonalization*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica **15** (2011), Nr. 1, str. 3–13.

[F] Farebrother R. W., *Linear Least Squares Computations*, Textbooks and Monographs, 91, Marcel Dekker, Inc., New York etc., 1988, xiii+293 stran.

[G1] Gram J. P., *Om Räkkeudviklinger bestemte ved Hjälp af de mindste Kvadraters Methode*, Höst & Sön, Kjöbenhavn, 1879, 122 stran.

[G2] Gram J. P., *Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **94** (1883), str. 41–73, německá verze práce [G1].

[H1] Hald A., *Nogle danske statistikeres liv og deres vaerker*, Matematisk-Fysiske Meddelelser 51, The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, 2005, 36 stran; práce bývá citována pod názvem *Lives and works of some Danish statisticians.*

[H2] Hald A., *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, New York, 1998, xvii+795 stran.

[H] Hoffman A. E., *The Gram-Schmidt process is not so bad*, Mathematics Magazine **43** (1970), str. 261–263.

[K] Kowalewski G., *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten*, Veit & Comp., Leipzig, 1909, v+550 stran, 2. vydání (přepracované): *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten*, W. de Gruyter & Co., Berlin, 1925, vi+304 stran, 3. vydání: 1942, vii+320 stran, 4. vydání: 1954, vi+348 stran.

[L] Laplace P.-S., *Premier Supplément. Sur l'application du calcul des probabilités à la philosophie naturelle*, In: P.-S. Laplace: *Théorie analytique des probabilités*, Troisième édition, Courcier, Paris, 1820, str. 497–530.

[LQ] Liu Qiaohua, *Modified Gram-Schmidt-based methods for block downdating the Cholesky factorization*, Journal of Computational and Applied Mathematics **235** (2011), str. 1897–1905.

[LL] Li Xianjuan, Liu Qiaohua, *Preconditioners for indefinite least square problems based on incomplete hyperbolic modified Gram-Schmidt*, Communication on Applied Mathematics and Computation **26** (2012), str. 45–52.

[N] Nevanlinna R., *Erhard Schmidt zu seinem 80. Geburtstag*, Mathematische Nachrichten **15** (1956), str. 1–6.

[HM] O'Connor J. J., Robertson E. F., Edmund F., *Jørgen Pedersen Gram*, MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gram.html.

[Pi] Pietsch A., *Erhard Schmidt and his contributions to functional analysis*, Mathematische Nachrichten **283** (2010), str. 6–20.

[P] Poole D., *Linear Algebra. A Modern Introduction*, Thomson Brooks/Cole, Cengage Learning, 2003, 2006, 2011, 768 stran.

[R] Rohrbach H., *Erhard Schmidt. Ein Lebensbild*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **69** (1967), str. 209–224.

[S1] Schmidt E., *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Mathematische Annalen **63** (1907), str. 433–476, jedná se o mírně modifikovanou disertační práci (Göttingen, 1905, 33 stran). *II. Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung*, Mathematische Annalen **64** (1907), str. 161–174, *III. Teil: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen*, Mathematische Annalen **65** (1908), str. 370–399.

[S2] Schmidt E., *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), str. 53–77.

[S] Staib J. H., *An alternative to the Gram-Schmidt process*, Mathematics Magazine **42** (1969), str. 203–205.

[Wa] Walker H. M., *Studies in the History of Statistical Method: With Special Reference to Certain Educational Problems*, The Williams & Wilkins Company, Baillière, Baltimore, London, Baillière, Tindal and Cox, 1929, viii+229 stran.

[WL] Wei Musheng, Liu Qiaohua, *A numerically stable block modified Gram-Schmidt algorithm solving stiff weighted least squares problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **25** (2007), str. 595–619.

[Wo] Wong Y. K., *An application of orthogonalization process to the theory of least squares*, Annals of Mathematical Statistics **6** (1935), str. 53–75.

[Z] Zeuthen H. G., *Jørgen Pedersen Gram*, in Dansk Biografisk Leksikon VIII, Copenhagen, 1936, str. 269–271.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

„AKREDITACE“ MATEMATIKY PŘED 77 LETY

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: The paper briefly outlines key moments from the history of Faculty of Science of German University in Prague, especially from the history of its Mathematical Institute. It pays attention in historical, political and professional content to personal and professional fates of individual mathematicians who spent longer or shorter part of their active lives at the German University in Prague. It recalls the level of teaching mathematics from 1920 until 1939, i.e. in the period of the biggest bloom and boom of German mathematical community in Prague. The main goal of this paper is to give a short analysis of the preserved document titled *Richtlinien für das Studium der Mathematik als Lehrfach an Mittelschulen* (1938) and to introduce some remarks for thought.

1 Přírodovědecká fakulta Německé univerzity v Praze – stručný úvod

Od počátku 20. století se stále více ukazovalo, že filozofické fakulty, na nichž se dosud vyučovaly a studovaly matematika a přírodní vědy, již nedávají dostatečný prostor pro jejich další rozvoj a přestávají poskytovat odpovídající vzdělávání budoucím středoškolským profesorům. Vzhledem k vývoji evropských univerzit a vědeckých institucí bylo nutno vzniklou situaci urychleně řešit i u nás. Proto již na počátku 20. století podávali čeští i němečtí přírodovědci z univerzit v Praze návrhy na vytvoření samostatné přírodovědecké fakulty. Její založení však oddálila první světová válka. Teprve po vzniku Československé republiky proběhla nová jednání, která vyústila v zákonné vládní nařízení č. 392 Sb. ze dne 24. června 1920, jímž byla od školního roku 1920/1921 založena samostatná Přírodovědecká fakulta University Karlovy a samostatná *Naturwissenschaftliche Fakultät der Deutschen Universität in Prag* [Přírodovědecká fakulta Německé univerzity v Praze]. Jejich hlavním úkolem bylo připravovat středoškolské profesory matematiky, přírodních věd a farmaceuty.

Ve dvacátých a třicátých letech 20. století byla Německá univerzita v Praze relativně malou, nicméně významnou vědecko-pedagogickou institucí ve střední Evropě. Po roce 1920 sice došlo k nezanedbatelnému nárůstu počtu jejích studentů, současně však nastala změna v jejich zájmu o zaměření studia. Zatímco před rokem 1918 převažovali právníci, po roce 1920 začali hrát rozhodující úlohu medici. Tento trend mohl souviset s jistým omezením uplatnění německy mluvících absolventů v československé státní správě. Také počty studentů na filozofické a přírodovědecké fakultě narůstaly jen pozvolna, neboť se již dále nerozšiřovala rozsáhlá síť německých středních škol, která byla budována od druhé poloviny 19. století, a tudíž nepřibýval počet systemizovaných míst středoškolských profesorů. Výhled na dobrou kariéru poskytoval především podnikatelský sektor, průmyslová výroba, soukromá lékařská a farmaceutická praxe.

Německá univerzita v Praze začala ve dvacátých letech 20. století přitahovat německy mluvící studenty, kteří dříve mířili do Berlína, Drážďan, Vídně a Budapešti. Jedním z důvodů mohlo být i to, že diplomy z německých, rakouských či maďarských univerzit bylo nutno nostrifikovat, případně doplnit dalšími československými státními zkouškami, pokud jejich nositel chtěl získat v Československu místo ve státní službě. Díky demokratické, multikulturní a nábožensky tolerantní atmosféře meziválečné Prahy se Německá univerzita stala přitažlivou také pro studenty židovského vyznání a demokratického smýšlení z Litvy, Lotyšska, Ukrajiny, Maďarska, Polska a později i Německa. Její popularitu způsobovaly i poměrně nízké školní poplatky, nižší životní náklady v Praze, její dobrá dopravní přístupnost a zejména věhlas některých profesorů (např. L. Berwald, R. Carnap, C. I. Cori, Ph. Frank, H. Hirsch, H. Kelsen, A. Kirpal, A. Lampa, K. Löwner, A. Naegle, G. A. Pick, E. G. Pringsheim, E. Schneeweis, L. Spiegel, F. Spina, K. M. Swoboda, M. Winternitz, W. Wostry).

Ani Německé univerzitě v Praze se nevyhnuly nacionální, náboženské, hospodářské a sociální problémy, které vyvolávala nastupující hospodářská krize, sílící fašismus a místní rozpory mezi liberálními a sociálnědemokratickými skupinami (podporovanými i německy mluvícími multikulturními a židovskými kruhy) a nacionálními a antisemitskými skupinami. Přes různé excesy se antisemitismus na Německé univerzitě v Praze prosazoval pomaleji než na jiných říšsko-německých a rakouských univerzitách. Ve třicátých letech však začaly i mezi pražskými studenty a profesory výrazněji sílit sympatie k nacismu. Přesto se díky podpoře československé vlády podařilo na některá řádně uprázdněná profesorská místa jmenovat odborníky vyhnané z rasových či politických důvodů z Německa. Až do Mnichova pražští profesoři židovského vyznání nemuseli univerzitu opouštět, neboť si zde uchovávali rozhodující většinu liberálně a demokraticky smýšlející pedagogové.

Na počátku zimního semestru 1938/1939 muselo vedení univerzity řešit otázku, jak „naložit“ s vyučujícími a studenty židovského původu. V prosinci 1938 profesorský sbor stanovil pravidlo upravující zkoušky; židovští vyučující mohli zkoušet pouze židovské studenty, árijští pouze árijské, pokud to dovolovalo obsazení stolice, resp. oborů. Situace se však během jara 1939 nadále zhoršovala, neboť v československé společnosti i na Německé univerzitě narůstaly fašizující a protižidovské tendence. Pod silným nátlakem německé politiky a propagandy vláda tehdy ještě samostatného Československa přijala dne 21. ledna 1939 zvláštní usnesení *O příslušnících židovských ve státních službách* omezující jejich zaměstnávání. Dne 27. ledna 1939 vydala nařízení o pobytu imigrantů – všechny takové osoby měly opustit naše území ve lhůtě jednoho až šesti měsíců. Téhož dne rozhodla, že všichni vyučující židovského původu přestanou vykonávat státní službu. Dne 10. února 1939 vyhlásila upravující nařízení o prozkoumání státního občanství imigrantů a současně vydala pokyn, aby úřady zjistily všechny své zaměstnance židovského původu. Starší zaměstnanci měli být urychleně penzionováni, zaměstnanci středního věku měli být posláni na dovolenou s čekatelným a mladší propuštěni. Ze zaměstnanců židovského původu mohli ve státních službách zůstat jen ti nepostradatelní, ale i oni museli být přeloženi na místa, kde nebudou přicházet do kontaktu s veřejností. Německá univerzita v Praze otázku vyloučení židovských kolegů vyřešila velmi iniciativně, samostatně a razantně, neboť na počátku března 1939 vyloučila ze svých řad všechny pedagogy židovského původu.

Dne 2. srpna 1939 se Německá univerzita v Praze stala rozhodnutím A. Hitlera nedílnou součástí říšských německých vysokých škol a výuka na ní probíhala podle říšských zákonů a pravidel až do května roku 1945.[1]

[1] O 20. a 30. letech 20. století na Německé univerzitě v Praze viz např. J. Havránek, Z. Pousta (red.): *Dějiny Univerzity Karlovy IV. 1918–1990*, Univerzita Karlova, Karolinum, Praha, 1998.

2 Personální obsazení výuky matematiky

Při vzniku Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze přešli na tzv. „matematickou sekci“[2] z Filozofické fakulty matematici, astronomové a geofyzici. Prvním řádným profesorem matematiky se stal Georg Alexander Pick (1859–1942), který na univerzitě přednášel již od roku 1883. Pozici prvního profesora matematiky zastával až do roku 1929, kdy byl penzionován. Těžiště Pickovy odborné práce spočívalo především v matematické analýze a geometrii.[3] Místo druhého profesora nebylo obsazeno, neboť Gerhard Hermann Waldemar Kowalewski (1876–1950) krátce před vznikem Přírodovědecké fakulty odešel na drážďanskou techniku.[4] Na Přírodovědeckou fakultu přešli také soukromí docenti a asistenti (L. Berwald a A. Winternitz), převedeny sem byly veškeré matematické přednášky, semináře a prosemináře a matematická knihovna.

V zimním semestru školního roku 1919/1920 zahájil svoji pedagogickou činnost na Německé univerzitě v Praze Ludwig Berwald (1883–1942), který na ní byl roku 1922 jmenován mimořádným a roku 1927 řádným profesorem matematiky. Přednášel až do roku 1939, kdy byl z rasových důvodů svého místa zbaven.[5] Pracoval zejména v diferenciální geometrii, jen několik jeho prací se týká jiných disciplín, většinou algebraických a analytických problémů.

Od počátku třetího desetiletí 20. století narůstal počet studentů matematiky, zvyšoval se počet výběrových přednášek, seminářů a proseminářů a rozšiřovala se jejich tematická pestrost. Na univerzitě působili 2 řádní profesoři matematiky, 1 až 2 mimořádní profesoři, 1 až 2 soukromí docenti, 1 asistent a 2 síly zapůjčené z Německé techniky v Praze na smluvní výuku deskriptivní geometrie a aplikované matematiky. Ve třicátých letech se zvýšil i počet asistentů[6] a docentů[7].

Po Pickově penzionování se roku 1930 stal mimořádným profesorem matematiky Karl Löwner (1893–1968), absolvent pražské německé univerzity. O čtyři roky později byl jmenován řádným profesorem. Přednášel do roku 1939, kdy byl pro svůj židovský

---

[2] Na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze byly přednášky rozděleny do šesti základních sekcí: I. Matematika, astronomie a geofyzika, II. Fyzika a chemie, III. Mineralogie a geologie, VI. Botanika a zoologie, V. Geografie a VI. Přírodní filozofie.

[3] G. A. Pick byl dne 13. července 1942 transportem AAq pod číslem 824 poslán do ghetta v Terezíně. Transport AAq tvořilo celkem 1 000 protektorátních občanů židovského původu, z nichž se konce války dožilo pouze 51 osob. G. A. Pick zemřel v Terezíně již dne 26. července 1942 v nedožitých třiaosmdesáti letech.

[4] G. H. W. Kowalewski se roku 1909 stal řádným profesorem matematiky na Německé technice v Praze, v roce 1912 přešel jako řádný profesor na Německou univerzitu v Praze, kde setrval do roku 1920. Podruhé se na Německou univerzitu, resp. Německou techniku v Praze vrátil na podzim roku 1939 a vyučoval na nich až do května 1945. G. H. W. Kowalewski byl členem NSDAP, v květnu 1945 byl v Praze zatčen a vyšetřován, získal však dobrozdání německých židovských vědců, ruských a francouzských matematiků a nakonec byl propuštěn. V září roku 1946 odešel do Německa a až do roku 1950 přednášel v Regensburgu (Řezno) a Mnichově. Více viz [4].

[5] Dne 26. října 1941 se L. Berwald musel jako číslo 2793/816 dostavit k Veletržnímu paláci a nastoupit do třetího transportu C, kterým bylo z Prahy deportováno 1 000 osob do ghetta v Łodži. Zahynul zde ve věku padesáti devíti let dne 20. dubna 1942. Více viz [4].

[6] O vývoji počtu asistentů viz informace v další části tohoto příspěvku, viz též [4].

[7] Soukromými docenty se ve třicátých letech 20. století stali H. Löwig, O. Varga, M. Pinl a E. Lammel. H. Löwig zahájil výběrové přednášky od letního semestru 1934/1935, O. Varga od zimního semestru 1937/1938, M. Pinl od letního semestru 1937/1938 a E. Lammel od zimního semestru 1938/1939. Více viz [4].

původ zbaven místa.[8] V letech 1917 až 1939 uveřejnil několik inspirativních prací z geometrické teorie funkcí, teorie monotónních maticových funkcí, teorie míry na Hilbertových prostorech a aplikací matematiky v hydrodynamice.

Od roku 1914 až do roku 1934 zastával místo asistenta Matematického ústavu Filozofické, resp. Přírodovědecké fakulty Německé univerzity Arthur Winternitz (1893–1961), který byl po opakovaných snahách profesorského sboru jmenován mimořádným bezplatným profesorem matematiky teprve roku 1931 (byl mu však ponechán asistentský plat). Od zimního semestru 1934/1935 zahájil kariéru mimořádného profesora, kterou však ukončil nástup nacistů.[9]

Roku 1931 přijal místo mimořádného profesora na Německé univerzitě v Praze Rudolf Carnap (1891–1970), významný logik, znalec filozofie a přírodních věd. Od zimního semestru 1931/1932 do zimního semestru 1935/1936 vypisoval výběrové přednášky o logice, systému věd, teorii poznání, vztahu filozofie a přírodních věd, dějinách filozofie a filozofických základech aritmetiky a geometrie.[10]

Ve dvacátých a třicátých letech 20. století působili na Německé univerzitě v Praze také pedagogové z Německé techniky. Výběrové přednášky z matematické analýzy, variačního počtu a aplikované matematiky konal řádný profesor Paul Georg Funk (1886–1969). V lednu roku 1939 mu bylo přednášení zakázáno, neboť byl židovského původu.[11] Základní kurzovní přednášky z deskriptivní geometrie vedl řádný profesor Karl Mack (1882–1943);[12] od letního semestru 1936/1937 výuku vzhledem k Mackovu špatnému zdravotnímu stavu suploval jeho asistent Walter Fröhlich (1902–1942). Rozhodnutím profesorského sboru a Ministerstva školství a národní osvěty ji oficiálně převzal od zimního semestru 1938/1939. V lednu roku 1939 byl však pro svůj židovský původ zbaven místa.[13]

---

[8] K. Löwnerovi se v říjnu 1939 podařilo emigrovat do USA. V letech 1939 až 1944 učil na univerzitě v Louisville, v letech 1944 až 1945 působil na Brown University v Providence, v letech 1945 až 1951 na Syracuse University a v letech 1951 až 1963 na Stanford University. Více viz [4].

[9] V lednu roku 1939 byla Winternitzova pedagogická činnost zastavena, protože byl židovského původu. Na jaře roku 1939 získal britský cestovní pas, neboť měl československé i britské občanství. Vystěhoval se do Velké Británie a od podzimu roku 1939 začal vyučovat na univerzitě v Oxfordu. Více viz [4].

[10] Rudolf Carnap byl oficiálně až do zimního semestru 1938/1939 řádným členem profesorského sboru Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, ač od letního semestru 1935/1936 byl na studijním pobytu, resp. studijní dovolené v USA. V zimě roku 1938 se rozhodl již do Evropy nevracet, zůstal v USA, kde získal místo profesora filozofie na univerzitě v Chicagu. V padesátých a šedesátých letech působil na Princetonu a na University of California v Los Angeles. Více viz [4].

[11] P. G. Funk byl dne 4. února 1945 transportem AE2 pod číslem 682 deportován do ghetta v Terezíně, kde se dočkal osvobození. V roce 1945 odešel do Rakouska. V letech 1945 až 1957 přednášel na vídeňské technice a univerzitě. Zabýval se především variačním počtem, afinní geometrií, diferenciální geometrií ve velkém, Minkowskiho geometrií, teorií kontinua, kvantovou mechanikou a aplikacemi matematiky ve fyzice a technické praxi. Více viz [4].

[12] K. Mack spojil s Prahou celou svou odbornou kariéru, od roku 1916 až do roku 1943 přednášel jako mimořádný, resp. řádný profesor deskriptivní geometrie na Německé technice v Praze. Od roku 1917, po více než třicetiletých snahách profesorů matematiky, se deskriptivní geometrie stala řádným univerzitním předmětem, ne však plnohodnotným, neboť pro ni nebylo systemizováno místo řádného ani mimořádného profesora. Její pravidelnou výuku zajišťoval právě K. Mack, „smluvně najímaný“ pedagog z techniky. Poznamenejme, že K. Mack byl členem NSDAP. Více viz [4].

[13] W. Fröhlich byl dne 21. října 1941 deportován transportem B jako číslo 976 do ghetta v Łodži, kde dne 29. listopadu 1942 zahynul. Více viz [4].

Připomeňme, že od letního semestru 1934/1935 zahájil na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze výběrové přednášky Heinrich Löwig (1904–1995), soukromý docent matematiky. Z rasových důvodů jako židovský míšenec 1. stupně byl ve školním roce 1938/1939 svého práva „venia docendi" zbaven.[14] Od letního semestru 1937/1938 byl soukromým docentem matematiky Maximilian Pinl (1897–1978), který musel roku 1939 jako politicky nespolehlivý své místo opustit.[15]

V zimě roku 1939 na matematické sekci Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze zůstali pouze mladí a nepříliš zkušení matematici Otto Varga (1909–1969)[16] a Ernst Lammel (1908–1961),[17] oba na pozici asistentů a soukromých docentů, a Alfred Eduard Rössler (1903–?),[18] asistent Německé techniky, který se teprve habilitoval a narychlo byl pověřen výukou deskriptivní a projektivní geometrie. Matematický vý-

---

[14] H. Löwig byl od roku 1939 do roku 1943 bez řádného místa, v roce 1944 byl totálně nasazen v kovoprůmyslu. V září roku 1944 byl deportován do německých táborů nucených prací. V letech 1945 až 1948 nemohl v Československu sehnat žádnou práci odpovídající jeho kvalifikaci, neboť byl podle tehdejších zákonů považován za nespolehlivého občana německé národnosti. V roce 1948 se mu podařilo emigrovat do Tasmánie, kde získal místo profesora matematiky na univerzitě v Hobartu. V roce 1957 odešel do kanadské Alberty, kde obdržel místo profesora matematiky na univerzitě v Edmontonu. Věnoval se zejména matematické analýze (diferenční rovnice), funkcionální analýze (teorie dimenze) a obecné algebře (teorie grup a svazů). Více viz [4].

[15] M. Pinl byl na jaře roku 1939 zatčen Gestapem a krátce vězněn. Byl jedním z mála německých matematiků, kteří se veřejně rozešli s nacistickou ideologií, patřil mezi zastánce vědecké spolupráce Němců a Čechů. V letech 1939 až 1944 se musel podílet na výzkumu dynamiky plynů, konstrukci raketových motorů a řízení leteckého provozu. Žil a pracoval v Braunschweigu (Brunswick) pod stálým policejním dozorem; byl vlastně totálně nasazen. V létě roku 1944 se vrátil do Prahy, kterou opustil ve spěchu v květnu 1945 krátce před příchodem Rudé armády a odešel do Německa. V roce 1946 získal místo docenta matematiky na univerzitě v Kolíně nad Rýnem a o dva roky později i místo řádného profesora. V letech 1949 až 1954 přednášel jako hostující profesor na univerzitě v Dacca (Pákistán). V letech 1954 až 1962 vyučoval na univerzitě v Kolíně nad Rýnem a absolvoval několik pobytů v USA (Atlanta) a SSSR (Moskva). Od roku 1962 do roku 1967 pracoval jako hostující profesor na univerzitě v Münsteru. Zabýval se diferenciální geometrií, parciálními diferenciálními rovnicemi, teorií relativity a dynamikou plynů. Více viz [4].

[16] O. Varga se v listopadu 1937 po úspěšném habilitačním řízení stal soukromým docentem matematiky na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze. V letech 1937 až 1941 na ní konal základní i výběrové matematické přednášky. V roce 1940 byl podle říšských zákonů jmenován řádným docentem a přidělen na Přírodovědeckou fakultu Německé univerzity v Praze. V létě roku 1941 se odstěhoval do Popradu, na podzim téhož roku odešel do Kolozsvaru, kde obdržel místo na univerzitě. Roku 1942 přešel na univerzitu do Debrecenu, kde působil jako řádný profesor až do konce svého života. Věnoval se zejména diferenciální geometrii a matematické analýze. Více viz [4].

[17] E. Lammel pracoval na Německé technice v Praze od roku 1928 do roku 1929 jako demonstrátor fyziky, od roku 1929 do roku 1930 jako pomocný asistent matematiky a od roku 1931 do roku 1940 jako řádný asistent matematiky. Roku 1938 se habilitoval na Německé technice v Praze a krátce nato i na Německé univerzitě v Praze. Od roku 1939 do roku 1940 byl asistentem a soukromým docentem na Německé technice v Praze, kde suploval téměř veškerou výuku na katedře „Lehrstuhl für Mathematik II.", která se uvolnila po Funkově nuceném odchodu. Současně v letech 1939 až 1940 jako soukromý docent vypomáhal s přednáškami a semináři na Německé univerzitě v Praze. V létě roku 1940 byl jmenován docentem na obou pražských německých vysokých školách a roku 1943 byl ustanoven mimořádným profesorem matematiky na Německé technice v Praze. V květnu 1945 opustil Prahu a v létě roku 1945 odešel do Jižní Ameriky. Roku 1950 obdržel místo profesora na univerzitě v Tucumanu (Argentina), kde se stal uznávaným matematikem. Věnoval se zejména matematické analýze. Poznamenejme, že E. Lammel byl členem NSDAP. Více viz [4].

[18] A. E. Rössler se roku 1938 habilitoval na Německé technice v Praze a o rok později i na Německé univerzitě v Praze. Od roku 1939 působil jako docent na Německé technice v Praze a na Německé univerzitě v Praze, kde přednášel deskriptivní a projektivní geometrii. V roce 1945 odešel do Německa a na technice v Cáchách získal profesuru matematiky. Věnoval se zejména deskriptivní, projektivní, afinní a diferenciální geometrii. Poznamenejme, že A. E. Rössler byl členem NSDAP. Více viz [4].

zkum, běžná výuka i výchova doktorandů, spolkové aktivity, formální i neformální společenské styky byly takřka paralyzovány.[19]

3 Výuka matematiky

Ve dvacátých letech se v tříletém, ve třicátých letech v čtyřletém cyklu[20] konaly základní kurzovní přednášky, které pokrývaly matematickou analýzu (diferenciální a integrální počet, komplexní funkce komplexní proměnné, obyčejné i parciální diferenciální rovnice, variační počet), geometrii (deskriptivní, projektivní, analytická, diferenciální, integrální, afinní a neeukleidovská), algebru (základy aritmetiky a algebry, transformace, algebraické rovnice) a teorii čísel.[21] Z názvů přednášek vyplývá, že poměrně malá pozornost byla pravděpodobně věnována moderní algebře, logice, teorii množin a topologii. Zcela stranou však zůstávala výuka pravděpodobnosti a statistiky.[22]

Na počátku dvacátých let se průměrný počet studentů zapisujících si „velké kurzovní matematické přednášky" pohyboval mezi 40 až 50, postupně narůstal až na 60. Není proto překvapující, že profesorský sbor usiloval o zřízení třetí profesury, oddělení přednášek pro chemiky a přenesení části „povinné výuky" na mladé soukromé docenty. Tyto snahy se podařilo realizovat ve druhé polovině třicátých let, kdy se počet studentů matematiky na „velkých kurzovních přednáškách" pohyboval mezi 23 až 86 studenty,[23] v průměru jich bylo 70. Ke konci třicátých let vlivem oddělení „elementárních" kurzů a kurzů pro chemiky se počet studentů na „velkých přednáškách" ustálil kolem 45.

Neméně zajímavým vývojem prošla výuka seminářů a proseminářů. Ve dvacátých letech si je zapisovalo 11 až 33 studentů, v průměru kolem 15.[24] Seminář (resp. seminární/proseminární cvičení) byl konán v jedné nebo ve dvou paralelních skupinách, z nichž jedna byla určena pro kandidáty učitelství a začátečníky, druhá pro pokročilé a talentované studenty, kteří se seznamovali i s principy vědecké práce a tvorbou odborných článků.[25] Ve třicátých letech si seminář a proseminář zapisovalo 9 až 31 studentů,[26] v průměru kolem 20. Současně došlo k jasnému oddělení a přesnému vymezení obsahu a cíle semináře a prosemináře a k jednoznačnému principu jejich obsazování vyučujícími. Ve vedení semináře a prosemináře se ve dvouletém cyklu střídali řádní profesoři L. Berwald a K. Löwner. Cílem prosemináře bylo procvičit a upevnit matematické znalosti kandidátů učitelství. Cílem semináře bylo prohloubit a rozšířit znalosti studentů nad rámec „základního" studia, seznámit je s novými matematickými výsledky a připravit je na

---

[19] O historii personálního obsazení výuky matematiky na Německé univerzitě v Praze, životních osudech v širším dobovém kontextu a matematickém díle jednotlivých profesorů, docentů, asistentů a vybraných doktorandů viz [4].

[20] O proměnách základní délky univerzitního studia viz M. Bečvářová: *Zkoušky učitelské způsobilosti (před německou zkušební komisí)*, in J. Bečvář, M. Bečvářová: *35. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. až 26. 8. 2014*, Praha, Matfyzpress, 2014, 273 stran, stránkový rozsah 99–112.

[21] Úplný seznam matematických přednášek, seminářů a proseminářů konaných na Německé univerzitě v Praze v letech 1882 až 1945 je uveden v [4].

[22] Na Německé univerzitě v Praze nebyly tyto obory vyučovány, byly však přednášeny na technice. Více viz [3].

[23] Nejméně (23) jich bylo zapsáno v letním semestru 1933/1934 na přednášce *Differential- und Integralrechnung II.* (L. Berwald), nejvíce (86) v zimním semestru 1932/1933 na přednášce *Elemente der Zahlentheorie* (L. Berwald).

[24] Nejméně (11) jich bylo zapsáno v zimním a letním semestru 1920/1921 a v zimním semestru 1925/1926, nejvíce (33) v zimním semestru 1922/1923.

[25] Nejasné formální rozdělení skupin nebylo možno upřesnit ani studiem katalogů posluchačů. Jediné výjimky byly v zimním a letním semestru školního roku 1923/1924 a 1924/1925.

[26] Nejméně (9) jich bylo zapsáno v letním semestru 1936/1937, nejvíce (31) v zimním semestru 1934/1935.

vědeckou práci. Semináře tedy podstatně více odrážely odborné zájmy jednotlivých pedagogů.[27]

Zcela samostatnou kapitolou bylo studium deskriptivní geometrie.[28] Ve dvacátých letech si ji zapisovalo 7 až 26 studentů,[29] v průměru asi 16. Ve třicátých letech si ji vybíralo 15 až 49 studentů,[30] v průměru kolem 39. Poznamenejme, že si ji zapisovali jednak studenti matematiky, jednak studenti mineralogie, geodézie a chemie.[31]

Ani v našich, ani v zahraničních archivech se nepodařilo dohledat žádné materiály, které by poskytovaly bližší informace o náplni jednotlivých pražských matematických přednáškových kurzů. V seznamech přednášek [2] nebyly uváděny žádné anotace či charakteristiky obsahu předmětů. Neexistovaly žádné povinné sylaby a učebnice,[32] seznamy základní a rozšiřující literatury, soupisy řešených či neřešených příkladů, vzorové prověrky, soubory zkušebních otázek apod. V zápisech profesorského sboru nejsou poznamenány žádné údaje ani u návrhů nových předmětů, ani u výběrových přednášek. Odborná, obsahová a pedagogická úroveň výuky byla plně v kompetenci jednotlivých profesorů a docentů, resp. „odborných sekcí" fakulty. Nebyla vytvořena žádná „nadřízená" komise, která by posuzovala kvalifikaci pedagogů (profesorů či docentů podle počtu je-

---

[27] Ve dvacátých letech 20. století ředitel semináře dostával na nákup pomůcek, literatury a běžnou činnost semináře státní roční dotaci ve výši 1 200,– Kč. Vedoucímu semináře a prosemináře náležela pravidelná roční odměna. S výukou, resp. opravováním seminárních prací vypomáhal jeden asistent, který byl obvykle jmenován na dva školní roky. V letech 1920 až 1934 zastával místo řádného asistenta matematického ústavu A. Winternitz, který byl od roku 1921 soukromým docentem, od roku 1931 „neplaceným" mimořádným profesorem a teprve od roku 1934 řádně honorovaným mimořádným profesorem. V letech 1930 a 1931 L. Berwald a K. Löwner s ohledem na počet posluchačů, kteří si zapisovali seminář a proseminář, žádali o vytvoření nového placeného místa „pomocného vědeckého asistenta", které měl zastávat student vyšších ročníků nebo „doktorand". Po opakovaných urgencích a zdůvodněních profesorského sboru bylo místo zřízeno od školního roku 1931/1932. V letech 1931 až 1934 je zastával H. Löwig, v letech 1934 až 1935 O. Dobsch a v letech 1935 až 1938 O. Varga. Poznamenejme, že v roce 1934 H. Löwig po odchodu A. Winternitze na místo mimořádného profesora požádal o místo řádného asistenta, rozhodnutím Ministerstva školství a národní osvěty je však nezískal, ač byl doporučen profesorským sborem. Zdá se, že místo asistenta zůstalo neobsazeno a jeho práci převzal pomocný asistent, neboť dne 9. prosince 1937 profesorský sbor navrhl, aby O. Varga byl ustanoven na místo bezplatného asistenta matematického ústavu a byl mu ponechán původní plat pomocného asistenta. Více viz [3] a [4].

[28] V letech 1920 až 1939 byl základními dvousemestrálními tříhodinovými přednáškami z deskriptivní geometrie pověřován K. Mack, profesor Německé techniky v Praze. Od letního semestru 1936/1937 jeho výuku suploval jeho asistent W. Fröhlich. V letech 1920/1921 až 1930/1931 byly přednášky vypisovány pod názvem *Kurs für geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie*, od roku 1931/1932 pod názvem *Kurs für darstellende und projektive Geometrie*. Je pravděpodobné, že se jejich obsah víceméně neměnil.

[29] Nejméně (7) jich bylo zapsáno v letním semestru 1925/1926, nejvíce (26) v zimním semestru 1920/1921.

[30] Nejméně (15) jich bylo zapsáno v letním semestru 1930/1931, nejvíce (49) v zimním semestru 1932/1933.

[31] Počty studentů byly vyhledány v katalozích posluchačů. Zahrnuti však byli jen ti, kteří si řádně výuku zapsali a zaplatili školní poplatky, tj. ti, kteří měli právo skládat zkoušky a získat vysvědčení, resp. potvrzení o absolvování výuky. Ti, kteří zápis zrušili (přeškrtnutím perem, modrou nebo červenou „úřední pastelkou") nebo nezaplatili školné, nebyli do souhrnu započítáni. Pokud by byli zahrnuti, počty mohly být přibližně o 5 až 10 vyšší. Poznamenejme, že studenti si mohli zapisovat libovolné přednášky, semináře a cvičení, a to v libovolném pořadí a kombinaci. Mohli však absolvovat buď přednášku se cvičením, nebo pouze přednášku, nebo jen cvičení. Tyto „jemné rozdíly" nebyly ve statistice zohledněny; v zápisech je totiž nelze odlišit. Studenti, kteří si zapisovali v daném semestru alespoň jednu matematickou přednášku nebo seminář, tvořili obvykle 20 až 25 procent všech přírodovědců, neboť patřilo k dobrému nepsanému zvyku, že fyzici, ale i astronomové, geografové, geologové, chemici a biologové absolvovali alespoň dva semestry základních matematických kurzů, resp. speciálních kurzů pro přírodovědce či chemiky. Vlastní matematická komunita příliš velká nebyla, měla obvykle kolem 40 studentů, z nichž hlubšímu studiu matematiky (budoucí středoškolští a vysokoškolští učitelé) se věnovalo maximálně 10 až 15 posluchačů. Více viz [2] a [4].

[32] Povinná náplň přednášek, resp. užívání schválených učebnic bylo na univerzitách v rakouské monarchii zrušeno roku 1848.

jich publikací, zahraničních pobytů apod.), kontrolovala náplň a obsah přednášek, seznamy základní či rozšiřující literatury, průběh zkoušek apod., vyjadřovala se k materiálnímu, prostorovému či technickému vybavení pracoviště. Kontrolní mechanismy byly v rukou univerzity, fakulty, resp. komisí tvořených členy profesorského sboru. Zpochybnění pravomocí a akademických svobod byla velmi citlivou záležitostí a profesorský sbor na ně otevřeně nelibě reagoval. Výše uvedené kontroly (dnes zcela běžné) nebyly vůbec myslitelné; zdá se, že úřady ani nenapadly (alespoň v „matematické sekci" se o nich nepodařilo dohledat žádné doklady).

4 Přepis dokumentu

Při studiu zápisů ze zasedání profesorského sboru Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze v letech 1920/1921 až 1938/1939 se podařilo nalézt ojedinělý dokument, který objasňuje „studijní" plán a povinnosti kandidátů učitelství matematiky na středních školách. Jedná se o nepodepsaný materiál nazvaný *Richtlinien für das Studium der Mathematik als Lehrfach an Mittelschulen*, který byl sepsán dne 27. ledna 1938 jako reakce profesorského sboru, resp. profesorů matematiky na dopis Ministerstva školství a národní osvěty požadující specifikaci studijních podmínek a povinností a obsahu zkoušek v souvislosti s připravovanou školskou reformou.[33] Profesoři matematiky žádosti ministerstva vyhověli. Rozhodně však nelze říci, že by tak činili ochotně a aktivně.[34] Tehdejší „akreditace" celé výuky univerzitní matematiky měla dvě a čtvrt strany (strojopis zkráceného formátu A4). V následujících řádcích uvedeme úplné znění dokumentu:[35]

Der mathematische Vorlesungsplan gibt dem Hörer die Möglichkeit, sich innerhalb seiner ersten vier Studiensemester die für die erste Staatsprüfung erforderlichen Kenntnisse anzueignen und innerhalb von sieben Studiensemestern die Kenntnisse zu erwerben, welche in der zweiten Staatsprüfung verlangt werden.

Zu den einführenden Vorlesungen werden in der Regel Uebungen abgehalten. Es kann den Studierenden nicht dringend genug geraten werden, sich rege und aktiv an diesen zu beteiligen, da die rein aufnehmende Tätigkeit des Besuchs einer Vorlesung nicht hinreicht, um den darin behandelten Gegenstand sich voll zu eigen zu machen.

Neben den Vorlesungen, welche alle Studierenden der Mathematik hören sollen, werden für fortgeschrittenere Hörer Sondervorlesungen gehalten, welche dem Hörer die Möglichkeit geben, sich in Spezialgebieten, für welche er besonderes Interesse hat, tiefer gehende Kenntnisse anzueignen. In der Regel wird das Thema der für die zweite Staats-

---

[33] V zápisu profesorského sboru ze dne 27. ledna 1938 je uvedeno: *Anlässlich der künftigen Neuauflage der Sammlungen der Ges. u. Verordn. für die Universität und für die Prüfungsordnung für Lehramt an Mittelschulen werden eine Reihe von Abänderungsvorschlägen seitens des Dekanates und der Mitglieder des Kollegiums vorgelegt.* ([1], *Protokoll der III. Sitzung des Professorenkollegiums der Naturwissenschaftlichen Fakultät am Donnerstag den 27. Jänner 1938 …*, str. 1)
Reforma nebyla uvedena v život v důsledku nacistické okupace Československa.

[34] V [1] se dochovaly podobné dokumenty týkající se přípravy středoškolských profesorů fyziky – matematiky (2 strany formátu A4; vypracovány byly fyziky) a fyziky – chemie (2 strany formátu A4; vypracovány byly fyziky a chemiky). Obsahují doporučený průběh studia (8 semestrů), tj. seznam přednášek, seminářů, proseminářů a laboratorních cvičení. Naprosto samozřejmou součástí aprobace fyzika – chemie byl požadavek studia základů diferenciálního a integrálního počtu (v rozsahu alespoň 2 semestrů).

[35] Srovnejme citovaný dokument se současnými akreditacemi jednotlivých studijních oborů, fakult a vysokých škol, které obnášejí stohy materiálů o výšce několika desítek centimetrů.

prüfung bestimmten Hausarbeit einer von dem Studierenden gehörten Spezialvorlesung entnommen.

Die Studierenden werden nachdrücklich auch auf die mathematischen Sondervorlesungen an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag aufmerksam gemacht, welche insbesondere Fragen der angewandten Mathematik sowie der Geometrie behandeln.

1. Staatsprüfung.

In den ersten zwei Studiensemestern ist eine Vorlesung über Differential- und Integralrechnung zu hören, innerhalb der vier ersten Studiensemester einführende Vorlesungen über Algebra und analytische Geometrie. Die Mathematikstudierenden, welche nicht darstellende Geometrie als zweites Hauptfach haben, besuchen den viersemestrigen Universitätskursus über darstellende Geometrie und projektive Geometrie. Alle genannten Vorlesungen setzen nur die Kenntnis der Mittelschullehrstoffs voraus.

An die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung schliesst sich ein zweisemestriges Proseminar an, dessen erfolgreicher Besuch Voraussetzung für die Zulassung zur ersten Staatsprüfung ist. Die Aufnahme in das Proseminar erfolgt auf Grund einer Prüfung, welche eine gründliche Kenntnis der Differential- und Integralrechnung erweisen soll. Den Studierenden, welche darstellende Geometrie als zweites Hauptfach haben und ihre ersten vier Studiensemester and der Brünner Technischen Hochschule verbracht haben, kann der Besuch des Proseminars erlassen werden, falls sie ein Zeugnis über den erfolgreichen Besuch von mathematischen Uebungen beibringen. Dieses muss den ausdrücklichen Vermerk tragen, dass es einem Proseminarzeugnisse gleichwertig ist.

2. Staatsprüfung.

Anschliessend an die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung wird ein drei- bis vier-semestriger Kurs über Analysis gehalten, der die Aufgabe hat, den Studierenden einen allgemeinen Ueberblick über die verschiedenen von der Infinitesimalrechnung abzweigenden analytischen Disziplinen insbesondere die Theorie der Differentialgleichungen, die für die Anwendungen besonders wichtigen Kapitel der Theorie der reellen Funktionen, Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (Funktionentheorie), sowie die Variationsrechnung geben.

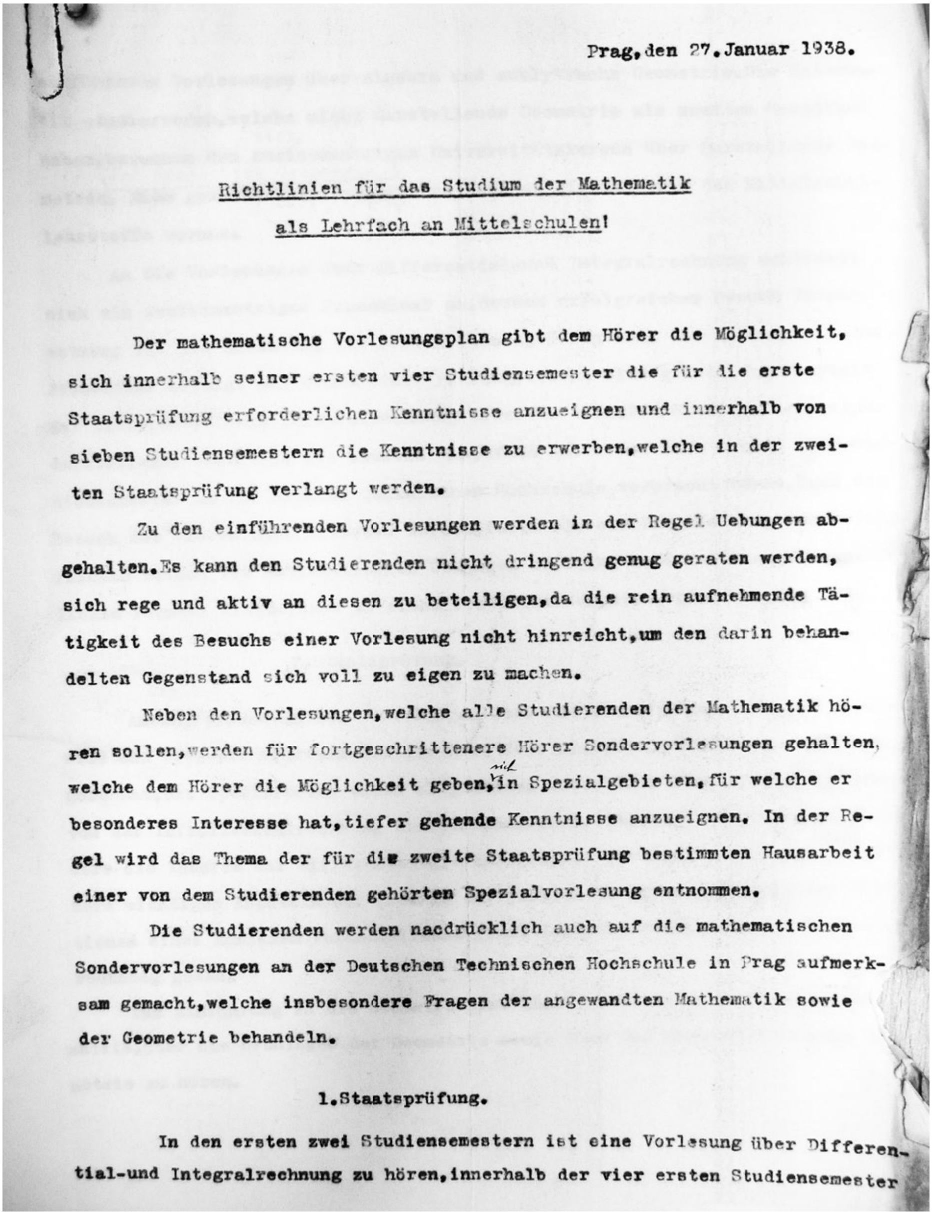
Zur Einführung in die Geometrie ist je eine Vorlesung über Differentialgeometrie, über die Grundlagen der Geometrie sowie über die Nicht-Euklidische Geometrie zu hören.

Ausserdem ist der Besuch einer Vorlesung über Zahlentheorie und einer über höhere Algebra erforderlich.

Voraussetzung für die Ablegung der zweiten Staatsprüfung ist der erfolgreiche Besuch eines mathematischen Seminars in zwei Semestern. Die Aufnahme erfolgt auf Grund des erfolgreichen Besuchs eines Proseminars oder eines gleichwertigen Zeugnisses der Brünner Technischen Hochschule.[36]

[36] Dokument přiložený do složky *Sitzungsprotokoll im Studienjahr 1937/1938* (viz [1]).

První čtyři odstavce popisují délku studia, organizaci státních zkoušek a pravidlo pro započítání studia na technice. Další dva odstavce specifikují požadavky k první státní zkoušce a velmi neurčitě naznačují rozsah požadovaných znalostí. Poslední čtyři odstavce přinášejí obdobné informace o druhé státní zkoušce.



Prag,den 27.Januar 1938.

Richtlinien für das Studium der Mathematik als Lehrfach an Mittelschulen!

Der mathematische Vorlesungsplan gibt dem Hörer die Möglichkeit, sich innerhalb seiner ersten vier Studiensemester die für die erste Staatsprüfung erforderlichen Kenntnisse anzueignen und innerhalb von sieben Studiensemestern die Kenntnisse zu erwerben,welche in der zweiten Staatsprüfung verlangt werden.

Zu den einführenden Vorlesungen werden in der Regel Uebungen abgehalten.Es kann den Studierenden nicht dringend genug geraten werden, sich rege und aktiv an diesen zu beteiligen,da die rein aufnehmende Tätigkeit des Besuchs einer Vorlesung nicht hinreicht,um den darin behandelten Gegenstand sich voll zu eigen zu machen.

Neben den Vorlesungen,welche alle Studierenden der Mathematik hören sollen,werden für fortgeschrittenere Hörer Sondervorlesungen gehalten, welche dem Hörer die Möglichkeit geben,sich in Spezialgebieten,für welche er besonderes Interesse hat,tiefer gehende Kenntnisse anzueignen. In der Regel wird das Thema der für die zweite Staatsprüfung bestimmten Hausarbeit einer von dem Studierenden gehörten Spezialvorlesung entnommen.

Die Studierenden werden nachdrücklich auch auf die mathematischen Sondervorlesungen an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag aufmerksam gemacht,welche insbesondere Fragen der angewandten Mathematik sowie der Geometrie behandeln.

1.Staatsprüfung.

In den ersten zwei Studiensemestern ist eine Vorlesung über Differential-und Integralrechnung zu hören,innerhalb der vier ersten Studiensemester

První stránka dokumentu *Richtlinien für das Studium der Mathematik als Lehrfach an Mittelschulen* (1938)

5 Pár slov závěrem

První i druhá československá republika si vážila kvalitních a odborně fundovaných vysokoškolských pedagogů bez ohledu na jejich národnost, vyznání, sociální původ či politickou příslušnost. Profesorská jmenovací řízení nebyla jednoduchá, místa byla obsazována na základě konkurzu, v němž byla hodnocena odborná úroveň uchazečů, jejich dosavadní vědecké výsledky, pedagogické a organizační schopnosti a zkušenosti.[37] Není divu, že profesorský post byl spojen s relativně dobrým platem a značnou společenskou prestiží.

Děkanát, rektorát, ministerstvo a státní správa nezatěžovaly profesory zbytečnou administrativou, ač stížnosti na její nárůst nalezneme prakticky ve všech dobách v zápisech ze zasedání profesorského sboru, dopisech ministerstvu, osobních vzpomínkách a pamětech. Dávaly pedagogickému sboru důvěru a ponechávaly mu téměř naprostou svobodu ve výuce (co, jak, kdy, v jakém rozsahu a podle čeho vyučovat, zda a jakým způsobem zveřejňovat studijní materiály a požadavky k dílčím či státním zkouškám). To však rozhodně neznamená, že by příprava například budoucích středoškolských profesorů matematiky či matematiků nebyla kvalitní. Dá se říci, že opak je pravdou, jak ukazují domácí i klauzurní práce, protokoly o ústních zkouškách učitelské způsobilosti, resp. protokoly o doktorských zkouškách a vlastní doktorské práce.[38]

Zcela samozřejmá byla svoboda vědeckého bádání a působení na studenty, doktorandy i asistenty.[39] Výzkum (alespoň v matematice) nebyl v tehdejší době svazován návratností vynaložených finančních prostředků, aplikovatelností výsledků, vědecko-výzkumnými plány, tematickými okruhy grantových agentur, výzkumnými záměry a projekty jednotlivých institucí. Přesto (anebo právě proto) na matematické sekci Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze probíhala bádání velmi úspěšně.

Míra této svobody nebyla již nikdy po roce 1939. Nesouviselo to jen s válečnými událostmi a následnými politickými převraty, ale pravděpodobně s celkovou proměnou naší společnosti (všeobecný nárůst nedůvěry a kontroly, bujení administrativy a jejího aparátu, likvidace židovské komunity za války, odsun německé komunity z poválečného Československa, rozbití téměř všech struktur československé společnosti po roce 1948, změna pohledu společnosti na vysokoškolské pedagogy, resp. učitele vůbec, narůstající masifikace vyššího vzdělávání a s ní spojený přirozený a nutný úpadek vzdělanosti, úbytek skutečných odborně zdatných a morálně pevných pedagogů).

---

[37] Konkurz byl vícestupňový – zpráva konkurzní komise tvořené nejméně třemi zvolenými členy profesorského sboru, hlasování celého profesorského sboru (vyžadovalo se obvykle 2/3 kladných hlasů), výběr tzv. terna (trojice nejúspěšnějších kandidátů), prozkoumání všech materiálů „terna“ na ministerstvu školství, doporučení nejlepšího kandidáta prezidentovi a následné prezidentské jmenování. Podobně náročné bylo i habilitační řízení, které přinášelo post soukromého docenta, neposkytovalo však „definitivu“ a dostatečné hmotné zajištění. O něco snadnější bylo konkurzní řízení na místo asistenta, kterého si vybíral příslušný profesor, jeho volbu doporučoval profesorský sbor a schvalovalo ministerstvo (prověřovalo odbornost na základě hodnocení profesorského sboru, od poloviny 30. letech prošetřovalo i loajalitu k Československu a zjišťovalo případnou aktivitu ve fašistických stranách).

[38] Více viz [4], kde jsou samostatné kapitoly o doktorátech z matematiky z let 1882 až 1945, resp. o zkouškách učitelské způsobilosti z matematiky v kombinaci s jiným aprobačním předmětem, které se konaly před německou zkušební komisí v letech 1882 až 1945.

[39] Pevně formulovány byly jen požadavky na minimální délku studia, požadavky k první a druhé státní zkoušce (u matematiky byl stanoven jen všeobecný rámec základních znalostí studentů).

Literatura

[1] *Sitzungsprotokoll in den Studienjahren 1937/1938*, kartón Protokoly profesorského kolegia 1932–1938, fond Přírodovědecká fakulta Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[2] *Naturwissenschaftlichen Fakultät der Deutschen Universität in Prag* (1920/1921 až 1938/1939), fond Přírodovědecká fakulta Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[3] *Ordnung der Vorlesungen an der Deutschen Universität in Prag im Wintersemester 1920/21*, ..., *im Wintersemester 1938/39*, Prag, 1920, ..., 1938.

[4] Bečvářová M.: *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882 až 1945* (připraveno do tisku).

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

KRUHOVÁ INVERZE V NEWTONOVĚ OPTICE

PAVEL BOHÁČ

Abstract: The foundation of the modern *circular geometry* is widely connected with the famous Swiss geometer Jakob Steiner, who allegedly discovered the *circle inversion* around 1824, although it has not been mentioned in his published works. In this paper we show that practically the same planar mapping has been used more than hundred years before Steiner as seen in the Opticks by Isaac Newton.

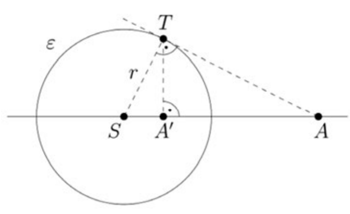
1 Úvod

Zobrazení *kruhové inverze*, jakožto základní kámen *kruhové geometrie*, představuje jeden z nejcennějších nástrojů planimetrie vůbec. Není však zcela jednoduché, a snad ani možné, dopátrat se jednoznačné odpovědi na otázku, komu soudobá geometrie vděčí za její objev. Prvopočátky kruhové inverze lze vypátrat už v díle starořeckého geometra a astronoma Apollónia z Pergy (cca 262 př. n. l. až cca 190 př. n. l.).[1] Jeho práce však upadla v zapomnění, většina publikací (např. [1], [2], [3]) tak v této souvislosti zmiňuje až jméno slavného švýcarského geometra Jakoba Steinera (1796–1863), který měl kruhovou inverzi objevit kolem roku 1824. Ačkoliv v jeho uveřejněných textech není toto zobrazení explicitně uvedeno, zdá se být bez pochyby, že princip kruhové inverze znal a využíval při objevování a dokazovaní rozličných výsledků projektivní geometrie ([2]). Mnohé prameny (např. [2] i [3]) ovšem druhým dechem dodávají, že kruhovou inverzi objevilo nezávisle na sobě více geometrů, např. Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), Giusto Bellavitis (1803–1880), Luigi Cremona (1830–1903) i jiní.

V tomto článku si neklademe za cíl vnést světlo do otázky prvotního autorství objevu kruhové inverze. Namísto toho ukážeme, že prakticky totožné zobrazení bylo ještě před svým znovuzrozením v 19. století využíváno v geometrické optice, kde dodnes sehrává klíčovou roli při vysvětlení funkce i těch nejjednodušších optických přístrojů, ačkoliv patrně žádná běžně dostupná publikace, kam až znalost autora sahá, na tuto skutečnost neupozorňuje. Naše tvrzení o využití kruhové inverze doložíme v části 4 českým překladem pasáže z Newtonovy Optiky, ve které je dotyčné zobrazení elegantně popsáno.

2 Kruhová inverze

Uveďme nejprve moderní definici kruhové inverze na *rozšířené* (*Möbiově*) *rovině*, tedy rovině doplněné o jeden nevlastní bod P_∞ ([1]). Uvažujme jeden (vlastní) bod S roviny a libovolné reálné číslo $r > 0$. Zobrazení, které bodu S přiřadí nevlastní bod P_∞ a naopak nevlastnímu bodu P_∞ bod S a které každý bod A roviny různý od S i P_∞ zobrazí na bod A' polopřímky SA tak, že platí



Obr. 1: Zobrazení bodu *A* kruhovou inverzí

$$|SA| \cdot |SA'| = r^2, \tag{1}$$

se nazývá kruhová inverze se středem S a koeficientem r.

[1] *Kónika* [Kuželosečky], Kniha šestá, Tvrzení 13 a 14.

Na obr. 1 je naznačen běžný postup konstrukce bodu A' pro známou polohu bodu A při kruhové inverzi se středem S a koeficientem $r > 0$, jenž hraje roli poloměru *samodružné* kružnice ε se středem S.[2] Správnost nastíněného postupu lze ověřit využitím Eukleidovy věty o odvěsně ST trojúhelníku SAT, případně přímo pomocí podobnosti vyznačených trojúhelníků SAT, STA', podle které

$$\frac{|SA|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SA'|} \qquad \text{neboli} \qquad |SA| \cdot |SA'| = |ST|^2 = r^2.$$

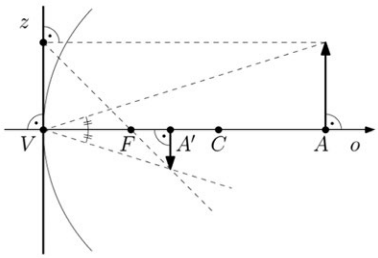
Dodejme, že takto zavedené bijektivní zobrazení zřejmě převádí vnitřek samodružné kružnice na její vnějšek a naopak. Méně triviální, avšak zásadní vlastností kruhové inverze je, že kružnice a přímky (tzv. *zobecněné kružnice*) zobrazuje opět na kružnice a přímky[3], jedná se tak o speciální případ *kruhového zobrazení*.

3 Kruhová inverze v optice

Za jednu ze základních a snad nejznámějších rovnic klasické geometrické optiky lze považovat tzv. *zobrazovací rovnici kulového zrcadla*, případně *tenké čočky*, též *Descartesovu* či *Gaussovu* (zobrazovací) *rovnici*, obvykle psanou v podobě

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \text{neboli} \qquad f = \frac{aa'}{a+a'}. \tag{2}$$

V našem článku ji budeme uvažovat pro *duté kulové zrcadlo* (obr. 2), kdy totiž právě v uvedeném tvaru (v reálné situaci pouze přibližně) udává závislost mezi vzdáleností $a > 0$ zobrazovaného (bodového) předmětu A od vrcholu V zrcadla umístěného na optickou osu o *před zrcadlem* s obrazovou vzdáleností a' jeho obrazu A' při známé ohniskové vzdálenosti f ohniska F od vrcholu V. Vzdálenost a' je kladná pro (skutečný, tedy reálný[4]) obraz vzniklý před zrcadlem a záporná pro (myšlený, nereálný, zdánlivý) obraz vzniklý za zrcadlem. Ohnisková vzdálenost f je polovinou poloměru $c > 0$ kulové plochy tvořící odrazivý povrch zrcadla, tedy $f = \frac{c}{2}$, viz např. [4].



Obr. 2: Optické zobrazení bodu A dutým kulovým zrcadlem

Na obr. 2 je nastíněna obvyklá *paprsková konstrukce* zobrazení bodového předmětu A dutým kulovým zrcadlem, jejíž přesný popis ani správnost zde nebudeme ověřovat (obojí lze nalézt např. v [5]). Za povšimnutí snad stojí, že konstrukční roli od daného kulového zrcadla (na rozdíl od běžného školského postupu) přejímá přímka z, pro niž se pak výsledek řídí právě rovnicemi (2).

Souvislost rovnic (2) se zavedenou kruhovou inverzí pochopíme, když je upravíme do podoby, jež se v současných učebnicích optiky uvádí jen zcela výjimečně.

---

[2] Doplňme, že body A a A' vystupují v definici kruhové inverze symetricky, je proto lhostejné, který z nich považujeme za obraz a který za vzor při daném zobrazení. Tuto vlastnost má každé zobrazení, které složeno samo se sebou dává *identitu* a které pak nazýváme *involutorní*.

[3] Na přímku se zobrazí jedině zobecněná kružnice procházející středem S.

[4] Tj. takový, který je možné zobrazit na stínítko.

Označme $d = |a - f|$ a $d' = |a' - f|$ (nenulové a konečné) vzdálenosti vzoru A a obrazu A' od ohniska F zrcadla v tomto pořadí a počítejme[5]

$$d \cdot d' = (a - f) \cdot (a' - f) = aa' - af - a'f + f^2,$$

odkud dosazením za součin aa' ze druhé rovnice uvedené v (2) dostaneme

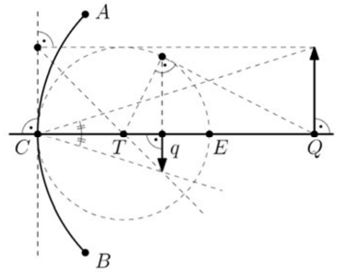
$$d \cdot d' = f(a + a') - f(a + a') + f^2, \qquad \text{tedy konečně} \qquad d \cdot d' = f^2. \tag{3}$$

Poslední rovnice bývá v literatuře uváděna jako *Newtonova* (ohnisková) *zobrazovací rovnice* (kulového zrcadla, resp. tenké čočky). Porovnáním s rovnicí (1) se ukazuje, že zobrazení kulovým zrcadlem (resp. model zobrazení daný rovnicemi (2)) realizuje kruhovou inverzi (ve středovém řezu dotyčné sféry) se středem v ohnisku F zrcadla a koeficientem rovným ohniskové vzdálenosti f zrcadla (tudíž odpovídající samodružná kružnice má dvakrát menší poloměr než je poloměr c zrcadla). Uvědomme si, že zobrazení nekonečně vzdáleného bodu do ohniska a naopak lze chápat jako limitní důsledek jak rovnic (2), tak i ekvivalentní rovnice (3). Jediným rozdílem optického zobrazení a kruhové inverze tak je, že zobrazované objekty se pochopitelně umisťují vždy před zrcadlo.

4 Kruhová inverze v Newtonově Optice

Rovnice (3) nese jméno proslulého anglického fyzika, matematika a filosofa Isaaca Newtona (1643–1727), jednoho ze dvou tvůrců *kalkulu*, jenž je mnohými považován za největšího fyzika, jaký kdy žil. Isaac Newton za svého života publikoval dvě zcela zásadní vědecké práce, první jsou slavné *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [Matematické základy přírodní filosofie] (1687) psané latinsky a druhou potom *Opticks* [Optika] (1704) ([6]) publikovaná nejprve anglicky. Právě druhá zmíněná monografie obsahuje ve své úvodní části i pozoruhodnou slovní formulaci zobrazovací rovnice (3) jako součást komentáře k šestému axiomu. Tuto formulaci nyní uvedeme v doslovném českém překladu. Má podobu následující věty:

Nechť ACB je odrazivý povrch libovolné sféry, jejímž středem je E. Rozpulte libovolný její poloměr (řekněme EC) bodem T, a pokud na tomto poloměru[6] po téže straně vůči bodu T vezmete body Q a q, tak, že TQ, TE a Tq jsou spojitě úměrné[7] a bod Q je ohniskem[8] dopadajících paprsků, bod q musí být ohniskem těch odražených (obr. 3).



Obr. 3: K Newtonově slovní formulaci rovnice pro zobrazení dutým kulovým zrcadlem

Klíčový vztah *spojité úměrnosti* jistých tří veličin[9] bychom dnes popsali tak, že tři délky vyjmenovaných

[5] Obě čísla $a - f$ i $a' - f$ jsou buď současně kladná, nebo záporná, jak bude zřejmé z postupu výpočtu součinu $d \cdot d'$. Lze v něm tedy absolutní hodnoty nahradit kulatými závorkami. Tato skutečnost rovněž značí, že zobrazovaný předmět A i jeho obraz A' se vždy nacházejí na téže straně od ohniska F dutého kulového zrcadla.
[6] Zde ve významu přímky procházející středem dotyčné sféry.
[7] V originále „continual Proportionals".
[8] V originále použité „focus" však neodkazuje na ohnisko zrcadla, jímž je zde bod T. Význam termínu podle výkladu, který přeložené pasáži předchází, odpovídá bodu, z něhož se paprsky rozbíhají, *zdroj* resp. vzor, případně se k němu sbíhají, a je proto možné zde pozorovat ostrý, *fokusovaný*, obraz.
[9] S konceptem spojitě úměrných veličin se lze mimo Eukleidovy *Stoicheia* [Základy] setkat jen vzácně.

úseček tvoří v uvedeném pořadí tři po sobě jdoucí členy jisté geometrické posloupnosti, jinými slovy, že délka prostřední úsečky TE je rovna geometrickému průměru délek úseček TQ a Tq, tedy

$$|TE| = \sqrt{|TQ| \cdot |Tq|} \qquad \text{neboli} \qquad (f^2 =)|TE|^2 = |TQ| \cdot |Tq|,$$

což je dříve zmíněná Newtonova zobrazovací rovnice. Dodejme, že přiložený obrázek je vcelku podobný tomu, jakým i Newton ilustroval svůj text. V naší verzi je však na rozdíl od originálu vyznačena nejen standardní paprsková konstrukce, ale i „tečnová" konstrukce obrazu při kruhové inverzi. Takto doplněný obrázek dává tušit, že obě konstrukce vedou ke stejnému výsledku.

5 Závěr

V tomto článku jsme prokázali, že historie zobrazení kruhové inverze je ještě o něco spletitější, než napovídá citovaná literatura. Nic se však nemění na tom, že počátky moderní kruhové geometrie spadají do první poloviny 19. století, neboť zobrazení používané v optice, byť takřka totožné s kruhovou inverzí, slouží tam ke zcela jinému a veskrze fyzikálnímu účelu. I přesto se autor tohoto příspěvku domnívá, že by si vyšetřovaná souvislost elementární geometrické optiky se základním zobrazením kruhové geometrie zasloužila nejen v učebnicích přinejmenším poznámku pod čarou.

Literatura

[1] Coxeter H. S. M., Greitzer S. L.: *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Inc., Washington, D.C., 1996, str. 108–114.

[2] Patterson B. C.: *The Origins of the Geometric Principle of Inversion*, Isis 19(1933), str. 154–180.

[3] Emch A.: *The discovery of inversion,* Bulletin of the American Mathematical Society 20(1914), str. 412–415.

[4] Halliday D., Resnick R., Walker J. (překlad Musilová J., Dub P., Obdržálek J. a kol.): *Fyzika*, VUTIUM a PROMETHEUS, Brno, 2006, str. 937–938.

[5] Boháč P.: *Co je harmonického na harmonické čtveřici?*, Rozhledy matematicko-fyzikální 89(2014), č. 4, str. 1–13.

[6] Newton I.: *Opticks: Or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light*, Royal Society Printers, Londýn, 1704, str. 7–8.

Adresa

RNDr. Pavel Boháč
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 267/2
611 37 Brno
e-mail: *pavel.bohac@mail.muni.cz*

METODA WSPÓŁRZĘDNYCH W GEOMETRII RZUTOWEJ

DANUTA CIESIELSKA, ZDZISŁAW POGODA

Abstract: First, we briefly present the most important facts about the history of projective geometry and its analytical methods. Then we analyse the contents of some polish textbooks published in the XIX century for the use of projective methods. We pay special attention to the lithographed textbooks by F. Mertens (see [10]) and W. Zajączkowski (see [14], [15]).

1 Wprowadzenie

Geometria rzutowa jako samodzielna dziedzina naukowa wykrystalizowała się w pierwszej połowie XIX wieku. Jednak pierwsze twierdzenia, które można zaliczyć do geometrii rzutowej pojawiły się już w starożytności. W znanym dziele Pappusa *Synagoge* z IV wieku naszej ery znajdujemy twierdzenie – nazwane później jego imieniem – które stało się jednym z fundamentalnych faktów geometrii rzutowej. Nie ma precyzyjnych informacji o wcześniejszych twierdzeniach podobnego typu, choć starożytni Grecy interesowali się teorią perspektywy i optyką. Praktycznie wszystkie informacje na ten temat pochodzą z drugiej ręki; nie zachowały się żadne źródła dotyczące teorii perspektywy czy optyki z tamtych czasów. Komentatorzy twierdzą jednak, że Euklides i Apoloniusz interesowali się tymi problemami. Trzeba było czekać tysiąc lat, aby zaczęto się dokładniej przyglądać teorii perspektywy, która stała się później źródłem twierdzeń geometrii rzutowej. Najpierw problemami perspektywy zainteresowali się artyści. Pierwszy z poprawną perspektywą fresk wykonał około 1420 roku Filippo Brunelleschi (1377–1446), a pierwsze teoretyczne podstawy opisał Leon Battista Alberti (1404–1472) w dziele *Della pittura* z 1436 roku (por. [1]). Istotny wkład mieli także Albrecht Dürer (1471–1528) i Leonardo da Vinci. Ten ostatni jest autorem pierwszego rysunku anamorficznego, czyli, co stało się jasne znacznie później, wykorzystania rzutowania ogólniejszego niż perspektywa. Artystą, który dał formalne podstawy teorii anamorfizmów**,** był Jean François Niceron (1613–1646). Jego *La Perspective Curieuse* (por. [11]) opublikowana w 1638 roku była pierwszą książką, w której poruszono temat tworzenia obrazów anamorficznych. Rok później ukazuje się *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* Girarda Desarguesa (1591–1661) (por. [1]), gdzie znajdujemy już elementy geometrii rzutowej z fundamentalnym twierdzeniem noszącym dziś jego imię. Desargues rozważa punkty w nieskończoności i prostą w nieskończoności, choć niektóry historycy uważają, że prosta w nieskończoności pojawia się znacznie później, dopiero w 1822 roku formalnie wprowadzona przez Ponceleta. Desargues jest pierwszym, który traktuje parabolę, hiperbolę i elipsę jako obrazy tego samego obiektu w przekształceniach nazywanych obecnie rzutowymi; rozróżnia je w zależności od liczby punktów w nieskończoności. Należy zwrócić uwagę, że idea punktu w nieskończoności pojawia się u Keplera (1571–1630) w rozprawie z 1604 roku *Astronomiae pars optica.* (por. [1]). Dzieło to ma w tytule *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, czyli *Dopełnienia do Witelona*. Kepler wyraźnie darzył szacunkiem Witelona (1230–1280), jednego z pierwszych matematyków związanych z Polską, który wyraźnie zaznaczył się w europejskiej nauce jako autor dzieła *Perspectivorum libri decem*. Kepler i Desargues zakładali, że proste równoległe mają wspólny punkt w nieskończoności, a proste w takiej sytuacji przypominają okręgi – z obu stron zmierzają do tego samego punktu w nieskończoności. Do obu uczonych dołączył Blaise Pascal, który w 1640 roku rozpowszechnił plakat z twierdzeniem o sześciokącie wpisanym w stożkową. *Essay pour les coniques* został wydrukowany w 50 egzemplarzach i miał być rozdany zainteresowanym uczonym.

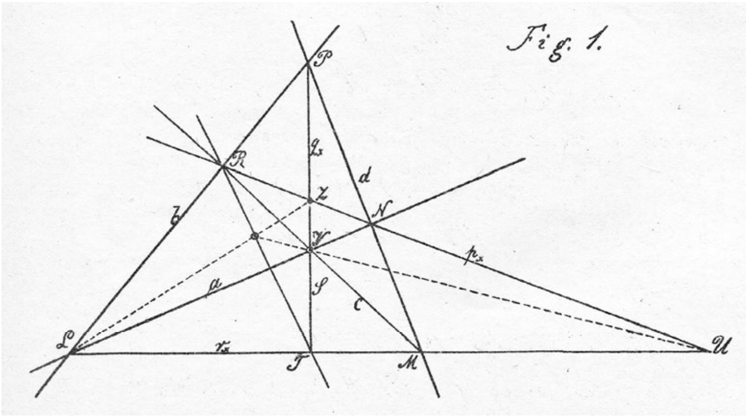
Pod koniec trzydziestych lat XVII wieku matematycy francuscy René Descartes oraz Pierre de Fermat niezależnie zaproponowali zastosowanie metod analitycznych do opisu obiektów algebraicznych. Ich rozważania dotyczyły przede wszystkim tych krzywych, które zyskały zapis algebraiczny. Metoda ta przyczyniła się do ogromnego postępu w badaniu krzywych, a na szczególną uwagę zasługują tu wyniki Isaaca Newtona oraz Leonharda Eulera. Zastosowanie metody do opisu fizycznych i mechanicznych zagadnień dały podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Metoda analityczna zaczęła szybko odnosić sukcesy; metody rzutowe nie zyskały uznania. Trzeba było czekać blisko 200 lat, aby przypomniano sobie o wynikach matematyków siedemnastowiecznych. Niemałe zasługi miał Gaspard Monge (1746–1818), ale tak naprawdę geometrię rzutową rozwijali jego uczniowie: Victor Poncelet (1788–1867), Charles Brianchon (1783–1864), Michel Chasles (1793–1880), Joseph Gergonne (1771–1859), Lazare Carnot (1753–1823). Dołączyli do nich August Ferdinand Möbius (1790–1868) i Julius Plücker (1801–1868), którzy wprowadzili do geometrii rzutowej metodę analityczną oraz Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867). Möbius, którego nazwisko kojarzone jest przede wszystkim z jednostronną wstęgą, jest autorem wielu oryginalnych prac i książek. Do najsłynniejszych należy *Der barycentrische Calcül* (1827). Można tam znaleźć między innymi współrzędne barycentryczne i współrzędne jednorodne. To dzięki metodzie współrzędnych krzywe algebraiczne zostały opisane za pomocą jednorodnego wielomianu. Julius Plücker zaproponował podobne rozwiązanie do opisu położenia prostych w przestrzeni. Karl von Staudt w dziele *Geometrie der Lage* (1847) zaprezentował pierwszą aksjomatykę geometrii rzutowej, tam również po raz pierwszy została użyta metoda czworokąta zupełnego do uzyskania punktu harmonicznego z danymi trzema współliniowymi punktami. Staudt zauważył także, że uzyskana w ten sposób konfiguracja punktów i prostych jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.

Wprowadzone współrzędne oraz znane już metody obliczania wyznaczników pozwoliły na skuteczne zastosowanie metod algebraicznych zarówno w opisie obiektów geometrii rzutowej, jak i dowodzenia twierdzeń. W szczególności twierdzenie Bézouta o liczbie punktów wspólnych dwóch krzywych zyskało przejrzystą formę w wersji rzutowej. Przeniesienie problemów związanych z obiektami opisanymi równaniami algebraicznymi z przestrzeni afinicznej do rzutowej, dokonane przez wprowadzenie współrzędnych jednorodnych, znakomicie upraszcza wiele problemów klasyfikacyjnych.

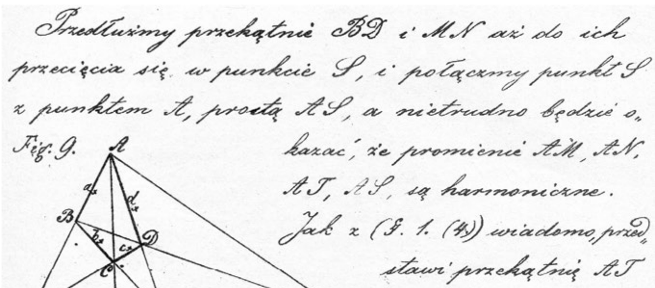
2 Polskie akcenty

2.1 Kraków i Mertens

Matematycy polscy nie prowadzili intensywnych badań w zakresie geometrii rzutowej. W XIX wieku nie powstały oryginalne prace z tej dziedziny. Tematyka rzutowa pojawia się przede wszystkim w podręcznikach oraz litografowanych notatkach z wykładów zwykle zatytułowanych ‘geometria analityczna’. Na uwagę zasługują tu opracowania wykładów Franciszka Mertensa (1847–1927) – o wykładzie wspomniano w pracy [3]. Mertens kojarzony jest głownie z analizą i analityczną teorią liczb. Pracując jednak na Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 1865–1884 prowadził różnorodne wykłady w tym wykład z geometrii analitycznej. Wykłady te zostały opublikowane w wersji litograficznej w 1882 roku[1]; w notatkach brak informacji o jakichkolwiek źródłach, z których korzystał Mertens. Napisane są jasnym zwięzłym językiem i z punktu widzenia matematyka pierwszej dekady XXI wieku są klasyczne z pewnymi akcentami nowoczesności. Natomiast w czasach, w których powstały, należały do bardzo nowoczesnych. Elementy geometrii rzutowej pojawiają się już w rozdziale czwartymi praktycznie są obecne do końca, czyli do rozdziału XII włącznie. Oto tytuły rozdziałów z *Wykładów* Mertensa: I *Geometrya analit: w płaszczyźnie,* II *O wyznacznikach i ich zastosowaniu do rozwiązania m równań z n niewiadomymi*, III *Linie algebraiczne pierwszego rzędu,* IV *Zastosowania geometryczne – Podział harmoniczny*,



Rysunek 1 Podział harmoniczny (czwórka harmoniczna punktów)



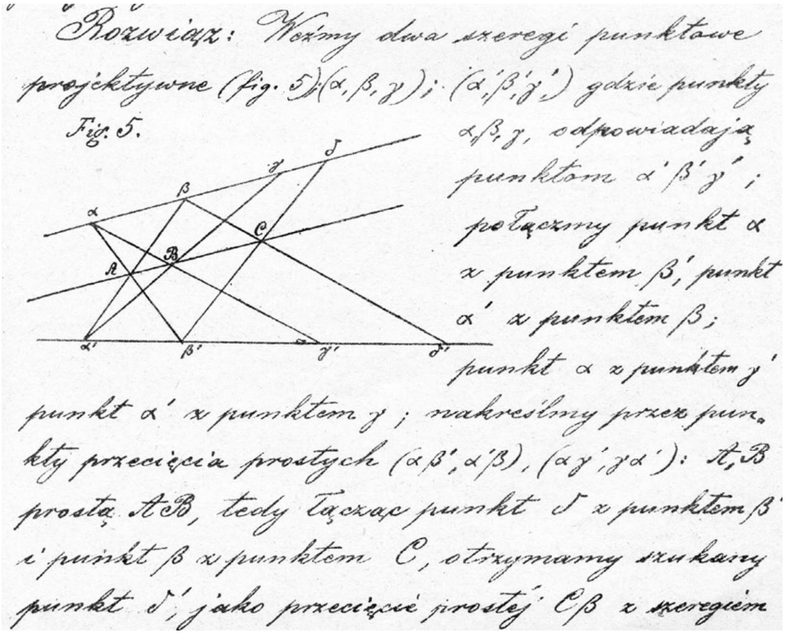
Przedłużmy przekątnie BD i MN aż do ich przecięcia się w punkcie S, i połączmy punkt S z punktem A, prostą AS, a nietrudno będzie o-
Fig. 9.
kazać, że promienie AM, AN, AT, AS, są harmoniczne.
Jak z (§. 1. (4)) wiadomo, przed-
stawi przekątnię AT jako linię należącą równocześnie do dwóch wiązek $(a, d,)$ i $(b, c,)$ rów-
nanie:

(1.) $p_x = Aa_x + Dd_x = -Bb_x - Cc_x$

Rysunek 2 Czworobok zupełny

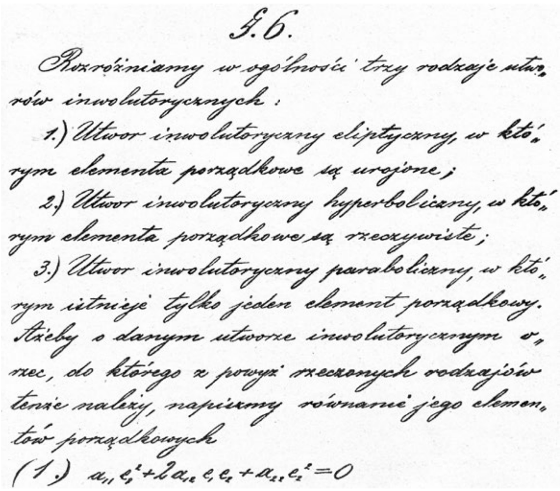
[1] Notatki pochodzą z Biblioteki c. k. Seminarium Matematycznego w Krakowie, podręcznik nosi numer Biblioteki Instytutu Matematyki UJ 216/234.

V *O własnościach projektywnych utworów zasadniczych jednego rozmiaru,*



Rozwiąz: Weźmy dwa szeregi punktowe projektywne (fig. 5) (α, β, γ) i (α', β', γ') gdzie punkty α, β, γ, odpowiadają punktom α' β' γ'; połączmy punkt α z punktem β', punkt α' z punktem β; punkt α z punktem γ' punkt α' z punktem γ; nakreślmy przez pun_kty przecięcia prostych (αβ', α'β), (αγ', γα'): A, B prostą AB, tedy łącząc punkt δ z punktem β' i punkt β z punktem C, otrzymamy szukany punkt δ', jako przecięcie prostej Cβ z szeregiem

Rysunek 3 Twierdzenie Pappusa



§.6.

Rozróżniamy w ogólności trzy rodzaje utwo_rów inwolutorycznych:

1.) Utwor inwolutoryczny eliptyczny, w któ_rym elementa porządkowe są urojone;

2.) Utwor inwolutoryczny hyperboliczny, w któ_rym elementa porządkowe są rzeczywiste;

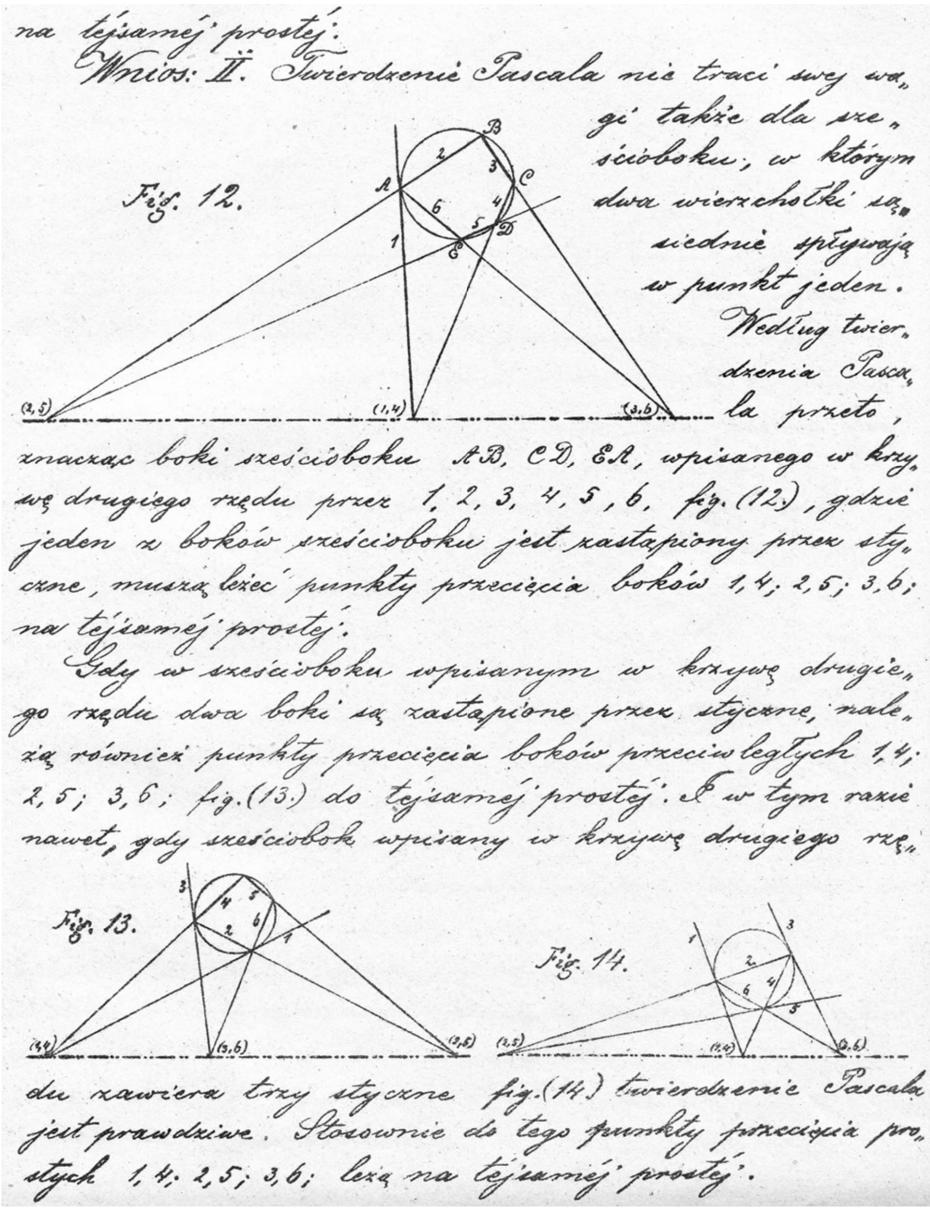
3.) Utwor inwolutoryczny paraboliczny, w któ_rym istnieje tylko jeden element porządkowy.

Ażeby o danym utworze inwolutorycznym o_rzec, do którego z powyż rzeczonych rodzajów tenże należy, napiszmy równanie jego elemen_tów porządkowych

(1.) $a_{11}e_1^2+2a_{12}e_1e_2+a_{22}e_2^2=0$

Rysunek 4 Klasyfikacja utworów inwolutywnych

VI *O kolinearnem powinowactwie dwóch systemów płaskich*, VII *Powinowactwo odwrotne dwóch systemów płaskich; system biegunowy płaski*, VIII *Formy kwadratowe*, IX *Jeszcze kilka słów o systemie biegunowym płaskim*, X *Roztrząśnienie najogólniejszego* *zrównania drugiego rzędu, jako zrównania, elipsy, hiperboli, lub paraboli*, XI *O niektórych własności krzywych drugiego rzędu*, XII *Utwory powstałe przez przecięcie dwóch wiązek projektywnych nieperspektywnych, i przez wzajemne rzucenie na siebie dwóch szeregów punktowych projektywnych nieperspektywnych. – Szereg punktowy drugiego rzędu. – Wiązka promieniowa drugiego rzędu.*



na tejsamej prostej.

Wnios: II. Twierdzenie Pascala nie traci swej wagi także dla sześcioboku, w którym dwa wierzchołki sąsiednie spływają w punkt jeden.

Fig. 12.

Według twierdzenia Pascala przeto, znacząc boki sześcioboku AB, CD, EA, wpisanego w krzywą drugiego rzędu przez 1, 2, 3, 4, 5, 6, fig. (12.), gdzie jeden z boków sześcioboku jest zastąpiony przez styczne, muszą leżeć punkty przecięcia boków 1,4; 2,5; 3,6; na tejsamej prostej.

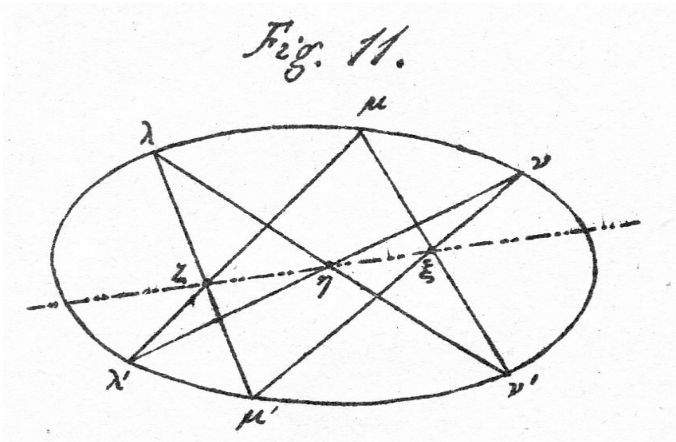
Gdy w sześcioboku wpisanym w krzywą drugiego rzędu dwa boki są zastąpione przez styczne, należą również punkty przecięcia boków przeciwległych 1,4; 2,5; 3,6; fig. (13.) do tejsamej prostej. I w tym razie nawet, gdy sześciobok wpisany w krzywą drugiego rzę-

Fig. 13.

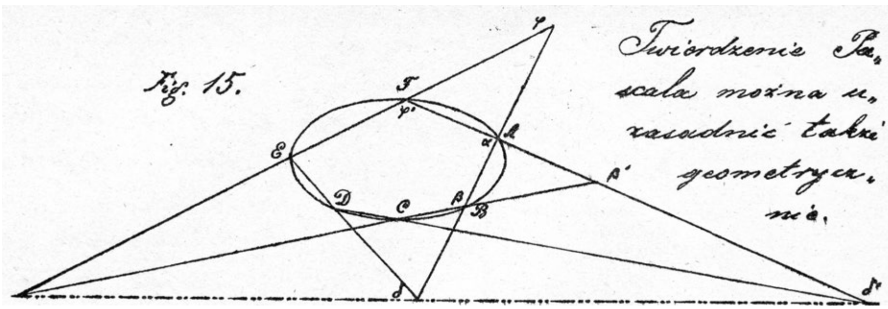
Fig. 14.

du zawiera trzy styczne fig. (14.) twierdzenie Pascala jest prawdziwe. Stosownie do tego punkty przecięcia prostych 1,4; 2,5; 3,6; leżą na tejsamej prostej.

Rysunek 5 Twierdzenia Pascala, wersje



Rysunek 6 Twierdzenia Pascala, fragment



Rysunek 7 Twierdzenie Pascala II

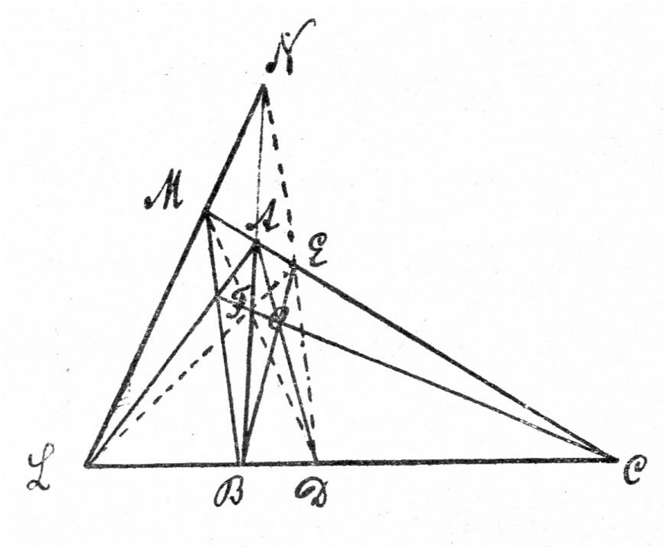
Mertens dowodzi, używając metody współrzędnych oraz wykonując obliczenia odpowiednich wyznaczników, wszystkie standardowe twierdzenia geometrii rzutowej i, jak widać z opisu tytułów rozdziałów, wykład ma charakter rzutowy.

2.2 Lwów i Zajączkowski

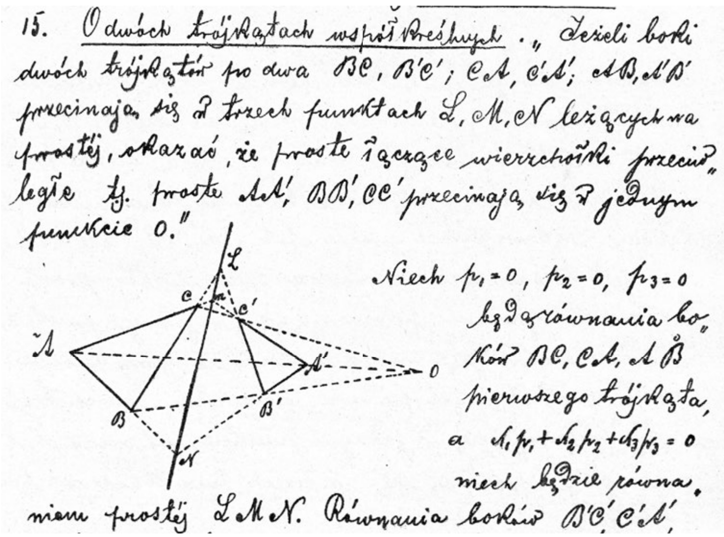
Wykład Władysława Zajączkowskiego z geometrii analitycznej oraz sporządzone na jego podstawie notatki zostały opisane w pracy [2]. Teraz postaramy się porównać wykład ten z opisanym powyżej wykładem Mertensa. Na pierwszy rzut oka w notatkach do wykładu Władysława Zajączkowskiego (por. [14] i [15]) metody rzutowe nie są wyeksponowane. Wczytując się jednak w tekst[2] dostrzegamy również wpływ geometrii rzutowej. Zobaczmy, jak wyglądają tytuły poszczególnych rozdziałów części pierwszej podręcznika: I *Współrzędne punktu*, II *Miejsce geometryczne równania. Równanie miejsca*

[2] Notatki wydano w formie dwóch zeszytów. Dostępne nam zeszyty pochodzą ze zbiorów Władysława Kretkowskiego i noszą numery K 963/I oraz K 963/II.

geometrycznego. III *O płaszczyźnie i o linii prostej na płaszczyźnie.* IV *O płaszczyźnie (Ciąg dalszy).*



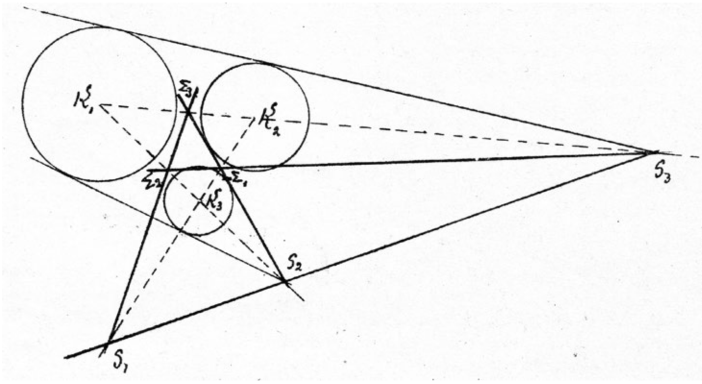
Rysunek 8 Twierdzenie Desarguesa, fragment


15. O dwóch trójkątach współkreślnych. „Jeżeli boki dwóch trójkątów po dwa BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B' przecinają się w trzech punktach L, M, N leżących na prostej, okazać, że proste łączące wierzchołki przeciwległe t.j. proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie O."

Niech $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$ będą równania boków BC, CA, AB pierwszego trójkąta, a $\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\lambda_3 p_3=0$ niech będzie równaniem prostej LMN. Równania boków B'C', C'A',

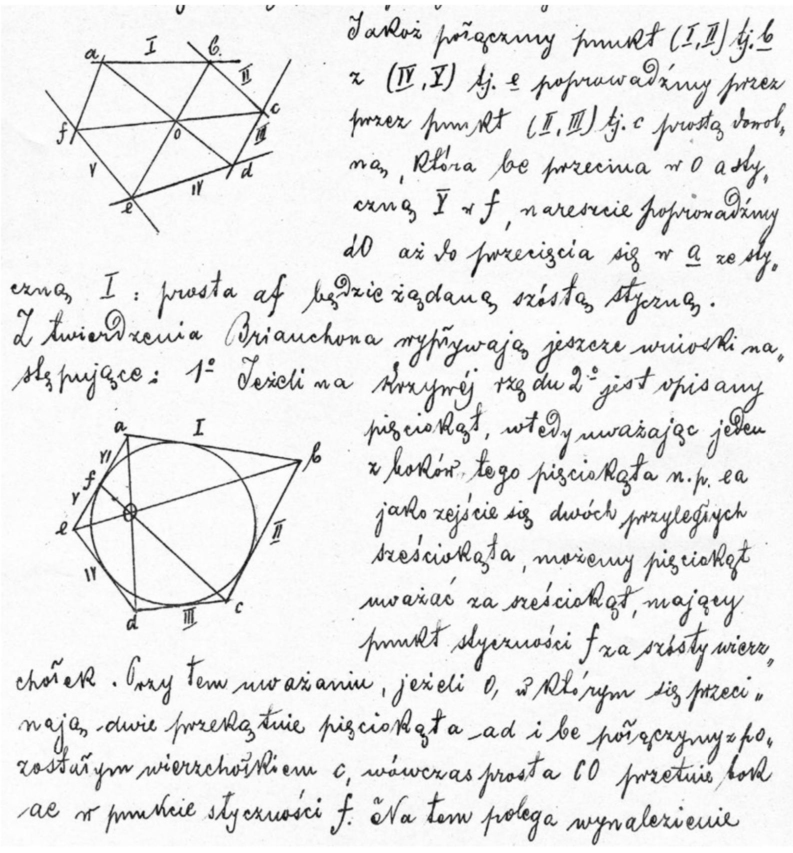
Rysunek 9 Twierdzenie Desarguesa

V *O punkcie. Równanie punktu.*
IX *O średnicach sprzężonych krzywych rzędu drugiego.*



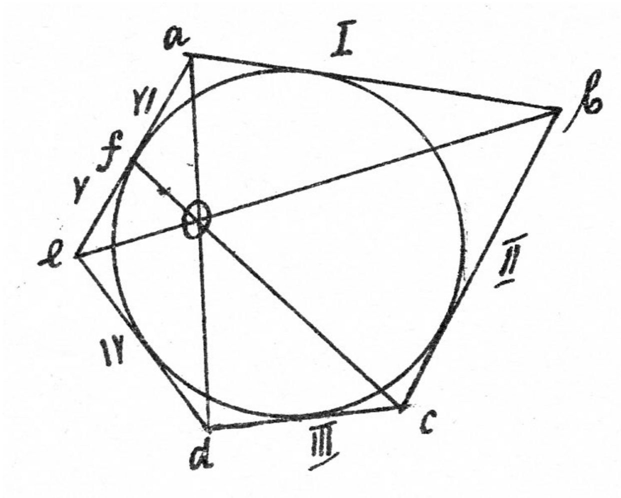
Rysunek 10 Osie potęgowe i środki jednokładności

X *Równania krzywych rzędu drugiego we współrzędnych trójkątnych.*

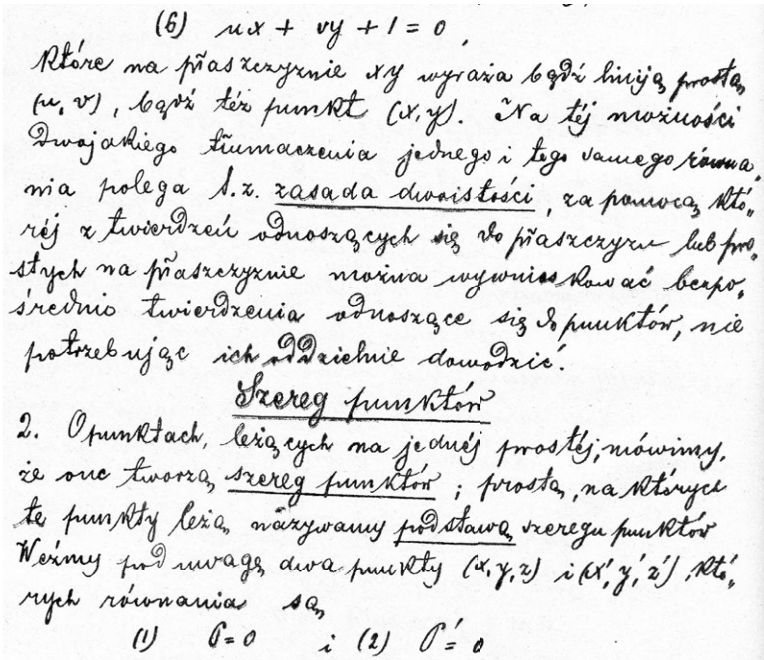


Jakoż połączmy punkt (I, II) tj. b z (IV, V) tj. e poprowadźmy przez przez punkt (II, III) tj. c prostą dowolną, która be przecina w O a sty. czną V w f, nareszcie poprowadźmy dO aż do przecięcia się w a ze styczną I: prosta af będzie żądaną szóstą styczną.
Z twierdzenia Brianchona wypływają jeszcze wnioski następujące: 1° Jeżeli na krzywej rzędu 2° jest opisany pięciokąt, wtedy uważając jeden z boków tego pięciokąta n.p. ea jako zejście się dwóch przyległych sześciokąta, możemy pięciokąt uważać za sześciokąt, mający punkt styczności f za szósty wierzchołek. Przy tem uważaniu, jeżeli O, w którym się przecinają dwie przekątnie pięciokąta ad i be połączymy z pozostałym wierzchołkiem c, wówczas prosta cO przetnie bok ae w punkcie styczności f. Na tem polega wynalezienie

Rysunek 11 Twierdzenie Brianchona



Rysunek 12 Twierdzenie Brianchona – fragment



(6) $ux + vy + 1 = 0$,

które na płaszczyźnie xy wyraża bądź linię prostą (u, v), bądź też punkt (x, y). Na tej możności dwojakiego tłumaczenia jednego i tego samego równania polega t.z. <u>zasada dwoistości</u>, za pomocą której z twierdzeń odnoszących się do płaszczyzn lub prostych na płaszczyźnie można wywnioskować bezpośrednio twierdzenia odnoszące się do punktów, nie potrzebując ich oddzielnie dowodzić.

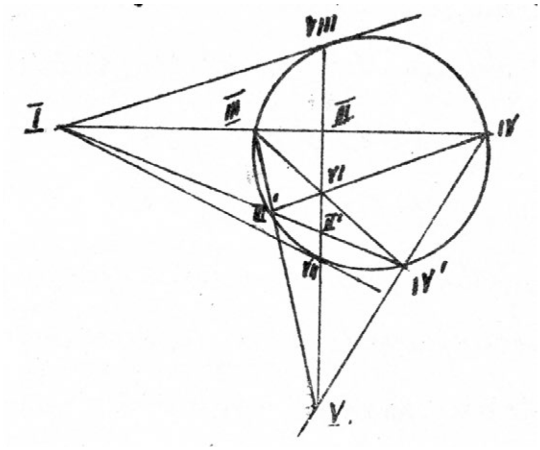
<u>Szereg punktów</u>

2. O punktach, leżących na jednej prostej, mówimy, że one tworzą <u>szereg punktów</u>; prostą, na której te punkty leżą, nazywamy <u>podstawą</u> szeregu punktów. Weźmy pod uwagę dwa punkty (x, y, z) i (x', y', z'), których równania są

(1) $P = 0$ i (2) $P' = 0$

Rysunek 13 Zasada dwoistości

VI *O linii prostej. Równania linii prostej.* VII *O liniach krzywych rzędu drugiego.* VIII *O stycznych linii krzywych rzędu 2.*



Rysunek 14 Biegun i biegunowa

XI *O powierzchniach rzędu drugiego.* XII *O inszych własnościach powierzchni rzędu drugiego.*

Gdy zagłębimy się w poszczególne rozdziały, zauważymy natychmiast elementy geometrii rzutowej. I tak w rozdziale czwartym o niewiele mówiącym tytule „O płaszczyźnie" już sam podtytuł „Współrzędne czworościenne w przestrzeni, a trójkątne na płaszczyźnie" wprowadza nas w teorię współrzędnych jednorodnych, które są już konsekwentnie wykorzystywane dalej. W rozdziale piątym pojawia się zasada dwoistości. W rozdziale ósmym spotykamy pojęcie bieguna i biegunowej. W wykładzie znajdujemy wszystkie klasyczne twierdzenia geometrii rzutowej. Każdy rozdział kończy się ćwiczeniami, czego nie ma u Mertensa. Część druga wykładu Zajączkowskiego poświęcona jest teorii krzywych algebraicznych W dwóch rozdziałach autor przedstawia różne własności krzywych algebraicznych oraz ich zastosowania, między innymi do konstrukcji geometrycznych. Warto zwrócić uwagę na fakt opublikowania przez Zajączkowskiego w 1884 roku w Warszawie książek: zatytułowanej *Gieometryja analityczna* (por. [16]), mającej ścisły związek z prowadzonymi przez niego wykładami oraz *Zasady algebry wyższéj* (por. [13]), w które również stosowane są metody współrzędnych rzutowych.

3 Uwagi końcowe

Pierwszy podręcznik z geometrii rzutowej w języku polskim pojawił się 1902 roku (por. [9]). Była to *Geometrya rzutowa tworów pierwiastkowych* Alfonsa Lewenberga. Nie ma w nim jednak metod analitycznych. Autor przedstawia wykład geometrii syntetycznej. Metody analityczne geometrii rzutowej znajdujemy w podręcznikach geometrii analitycznej. Chcieliśmy zwrócić uwagę na fakt, iż metody rzutowe były obecne w polskich podręcznikach, zanim pojawił się podręcznik poświęcony specjalnie geometrii rzutowej. Czytelnik miał okazję zapoznać się z podstawowymi faktami tej dziedziny w ujęciu przede wszystkim analitycznym. Wykład Mertensa ma charakter zdecydowanie rzutowy. Zajączkowski sporo miejsca poświęca krzywym algebraicznym, a druga część wykładu dotyczy geometrii przestrzennej. W niniejszym artykule nie można było, ze względu na ograniczenia ilościowe, dokonać pełnej i drobiazgowej analizy podręczników pod kątem wykorzystania analitycznych metod rzutowych. Bardziej szczegółowa analiza, również innych podręczników, zostanie przedstawiona w kolejnych opracowaniach.

Literatura

[1] Alberti L. B.: *Della pittura* (*De pictura)*. Florentiae, 1435.

[2] Ciesielska D.: *Geometria analityczna według W. Zajączkowskiego*, [w:] J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, 187–194.

[3] Ciesielska D., Domoradzki S.: *Mathematical Lectures at the Jagiellonian Univeristy in the years 1860–1945*, [w:] Binder Ch. (ed.): XI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2012, Österreichisches Gesellschaft für Wissenschafts-geschichte, 43–51.

[4] Desargues G.: *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*, Publication par voie d'impression à cinquante exemplaires, source René Taton, Paris, 1639, ss. 36.

[5] Juszkiewicz A. P.: *Historia Matematyki*, Tomy I–III, PWN, Warszawa, 1975.

[6] Katz V. J.: *A History of Mathematics: An Introduction* (2nd ed.), Addison Wesley Longman, Reading, Mass., 1998.

[7] Kepler J.: *Astronomiae pars optica. Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, apud Claudium Marnium & haeredes Ioannis Aubrii, Francofurti, 1604, ss. 449.

[8] Kline M.: *Projective geometry*, [w:] James R. Newman: The World of Mathematics, Georg Allen and Unwind, London, 1956.

[9] Lewenberg A.: *Geometrya rzutowa tworów pierwiastkowych*, Drukarnia Sikorskiego, Warszawa, 1902.

[10] Mertens F.: *Wykład geometryi analitycznej*. Towarzystwo matematyczno-przyrodnicze uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 1882.

[11] Nicéron J. F.: *La Perspective Curieuse*, Pierre Billaine ed., Parigi, 1638, ss. 52.

[12] Stillwell J.: *Mathematics and Its History* (3rd ed.), Springer, New York, 2010.

[13] Zajączkowski W.: *Zasady algebry wyższéj*, Drukarnia Noskowskiego, Biblioteka matematyczno-fizyczna, Warszawa, 1884.

[14] Zajączkowski W.: *Wykład Geometryi Analitycznèj*. Część I. Wydawca nieznany. Lwów, 1881.

[15] Zajączkowski W.: *Wykład Geometryi Analitycznèj*, Część II. Wydawca nieznany. Lwów, 1882.

[16] Zajączkowski W.: *Geometryja analityczna*, Drukarnia Noskowskiego, Biblioteka matematyczno-fizyczna, Warszawa, 1884.

Adresa

Danuta Ciesielska, Ph.D.
Institute of Mathematics
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2,
30-084 Kraków, Poland
e-mail: *smciesie@cyfronet.krakow.pl*

Zdzisław Pogoda, Ph.D.
Institute of Mathematics
Jagiellonian University
Łojasiewicza 6,
30-348 Kraków, Poland
e-mail: *zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl*

Zdzisław Pogoda, Ph.D.
Instytut Pedagogiczny
Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej
w Nowym Sączu
Chruślicka 6
33-300 Nowy Sącz, Poland
e-mail: *Tomek.P13a@gmail.com*

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI A MRAVNÍ ZÁLEŽITOSTI DLE JAKOBA BERNOULLIHO

HELENA DURNOVÁ

Abstract: Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi* (1713) is a key work in the history of probability theory. This contribution points out some aspects of the fourth part of his book, which is devoted to applications of probability theory that Bernoulli had explained in the previous three sections.

1 Úvodem: některé práce o historii teorie pravděpodobnosti

Většinou se uvádí, že teorie pravděpodobnosti se zrodila na základě výměny dopisů mezi Blaisem Pascalem (1623–1662) a Pierrem de Fermatem (1607/1608–1665).[1] Tímto obdobím začíná také klasická kniha o historii teorie pravděpodobnosti z pera Isaaca Todhuntera (viz [8]) z roku 1865. O rozšíření a prohloubení Todhunterova díla se poměrně nedávno zasloužil dánský matematik Anders Hald (viz [4]), který podotýká, že první poznámky, které nám svým stylem připomínají dnešní teorii pravděpodobnosti, se začaly objevovat v dílech italských matematiků již během 15. a 16. století a týkaly se především úlohy o rozdělení sázky mezi hráče hazardní hry v případě, že partie z nějakého důvodu nemohly být dohrány. Tomuto problému se věnovali Luca Pacioli (1445–1517), Niccolò Fontana (1499–1557), zvaný Tartaglia, a Gero-lamo Cardano (1501–1576). Posledně jmenovaný strávil hazardními hrami nezanedbatelné množství času a právě od něj pochází následující citát, který ukazuje, že k otázkám mravním neměla teorie pravděpodobnosti nikdy daleko:

> *Základním principem veškerých hazardních her je jednoduše rovnost podmínek, což se týká například protihráčů, peněz, situace, krabice s kostkami a samotných kostek. Pokud se v nějaké míře odchýlíte od rovnosti ve prospěch protihráčů, jste pošetilý, pokud ve prospěch svůj, jste nespravedlivý.* ([4], str. 33)

Úlohami o rozdělení sázky se před Jakobem Bernoullim zabývali zejména již zmínění Blaise Pascal a Pierre de Fermat, a také Christiaan Huygens (1629–1695) v knize *De ratiociniis in ludo aleae* (*O výpočtech v hazardní hře*) publikované roku 1657 (viz [6]). Bernoulli dosavadní poznatky ve své knize shrnul a navíc ve čtvrté části svého díla, které je věnován tento krátký příspěvek, nabídl způsob, jak je prakticky aplikovat.

2 Jakob Bernoulli (1654–1705): stručný životopis[2]

Jakob Bernoulli spolu se svým mladším bratrem Johanem (1667–1748) patří k první generaci matematiků z rodu Bernoulliů. Známé jsou zejména jeho výsledky v oblasti matematické analýzy a spolu s bratrem Johanem je považován za zakladatele variačního

[1] Podle přesvědčivého výkladu německého historika matematiky Klause Barnera (viz [2]) se Fermat narodil v roce 1607 nebo 1608. Více informací včetně odkazů na četné Barnerovy publikace na toto téma, najdou čtenáři také v německé verzi Wikipedie (heslo Pierre de Fermat). Vzhledem k tomu, že pro tento článek není Fermatovo datum narození podstatné, bližší informace zde neuvádím, podobně jako neuvádím zdroje pro všeobecně známé údaje o letech narození jednotlivých matematiků.

[2] V této části čerpám zejména z poznámek k německému vydání *Ars Conjectandi* z roku 1899 (viz [1]).

počtu. Díky svým vědeckým úspěchům, z nichž v tomto příspěvku připomeneme jeho dílo v teorii pravděpodobnosti, se v roce 1699 stal členem pařížské Akademie věd.

Jakob Bernoulli se začal otázkami z teorie pravděpodobnosti zabývat již v letech 1679 až 1685, přičemž vydání *Ars Conjectandi* bylo oznámeno v *Histoire del'Académie des sciences de Paris* v roce 1705 a v *Journal de Scavans* v roce 1706 (viz [1, str. 141]). Dílo však zůstalo nevydáno celých osm let po smrti autora, neboť jak Jakobův bratr Johan, tak jeho synovec Nikolas se k vydání díla neměli. Nikolas se odvolával na své dosud nevelké zkušenosti a z toho plynoucí nedostatečnou erudici, kterou by k vydání takového díla potřeboval. Navíc sám vydal práci, v níž ukázal využití počtu pravděpodobnosti v otázkách práva. Nakonec se však v roce 1713 odhodlal téměř dokončené dílo svého strýce vydat.

3 Ars Conjectandi – Umění odhadu (1713)

Ian Hacking (viz [3]) tvrdí, že název díla Jakoba Bernoulliho zřejmě odkazuje na starší dílo o logice, *Ars Cogitandi*. Podle jeho interpretace je zjevné, že umění odhadu (*ars conjectandi*) nastupuje tam, kde umění myslet (*ars cogitandi*) končí (viz [3, str. 145]). Bernoulliho *Ars Conjectandi* je rozděleno na pět částí, z nichž poslední je přílohou k výkladu předchozích čtyř kapitol. První část obsahuje komentovaný výklad díla Christiaana Huygense a do češtiny ji z latiny přeložil Karel Mačák (viz [6]). Sestává z Huygensových tvrzení a Bernoulliho poznámek, které tvoří přibližně třetinu této části spisku. Jejím tématem je především otázka dělení sázky při nedokončených partiích hazardních her. Druhý díl Bernoulliho díla zpracovala ve své diplomové práci Pavla Klusáčková (viz [5]). Z dnešního hlediska je pozoruhodné, že obsahuje kombinatorické kategorie permutace, kombinace a variace jak s opakováním i bez opakování bez větších odchylek od dnešní klasifikace, ač jsou uvedeny pod jinými názvy. Ve třetím díle Bernoulli ukazuje použití vzorců z dílu předchozího na příkladech různých hazardních her. Tyto příklady na sebe částečně navazují a problém představuje právě použití různých her, jejichž pravidla jsou dnešnímu běžnému čtenáři málo známá. Čtvrtý díl je věnován užití dříve vyložené teorie a podrobněji se mu věnuji v samostatném oddíle. Relativně samostatnou přílohu k *Ars Conjectandi* představuje poměrně dlouhý dopis příteli, jehož délka odpovídá délce čtvrté kapitoly a v němž se Bernoulli zabývá využitím teorie pravděpodobnosti při tenise.

3.1 Ars Conjectandi, díl 4: užití vyložené teorie

Celý název tohoto dílu zní *Užití dříve vyložené nauky ve vztazích občanských, mravních a hospodářských.* Je rozdělen do pěti kapitol:

I. Úvodní poznámky o jistotě, pravděpodobnosti, nutnosti a náhodnosti věcí [jevů].
II. Jistota a domněnka. Umění odhadu. Důvody pro důkaz domněnky. Některé k tomu příslušné věty.
III. Různé druhy dokazování; odhad jejich váhy pro výpočet pravděpodobnosti jevů.
IV. O dvou způsobech, jimiž lze určit počet případů. Co se dá odvodit od způsobu, jímž bylo pozorování vedeno. Hlavní problémy s tím spojené a další záležitosti.
V. Řešení předchozího problému.

Významný podíl zaujímá v této části filosofický rozbor situace. Čtvrtá část *Ars Conjectandi* začíná rozborem významu pojmů souvisejících s pravděpodobností. Zde najdeme Bernoulliho definici pravděpodobnosti: „Pravděpodobnost je stupeň jistoty a liší se od úplné jistoty tak, jako se část liší od celku.“ (viz též [7], str. 133) Přitom ze dvou jevů je pravděpodobnější ten, jehož pravděpodobnost je určena větším dílem jistoty.[3] Jako *možné* lze podle Bernoulliho označit takové jevy, jejichž pravděpodobnost je (řečeno dnešním slovníkem) nenulová.

Morálně jisté jsou dle Bernoulliho takové jevy, jejichž pravděpodobnost se blíží jistotě, zatímco jako *morálně nemožné* označujeme ty jevy, jejichž pravděpodobnost je rovna tomu, co jevu morálně jistému chybí do jistoty, tedy například: je-li morálně jistý jev, jehož pravděpodobnost je 0,999, pak jako morálně nemožný označujeme jev, jehož pravděpodobnost je 0,001. Volbu čísla 0,999, potažmo 0,001, Bernoulli nezdůvodňuje.

U *jevů nutných* lze rozlišit více druhů. Nutnost jejich nastoupení může být fyzikální (hoření, zatmění Měsíce), hypotetická (jako důsledek nějakého jevu musí nastat jiný), či dohodnutá (pokud se hráči dohodnou, že padne-li jednomu z nich šestka, vyhrává, pak musí vyhrát, pokud mu šestka padne).

Náhodné je to, co nemusí být dnes ani v budoucnu a co nemuselo být ani v minulosti. V tomto smyslu, podotýká Bernoulli, není počasí náhodné, neboť závisí na dějích v atmosféře. Z tohoto pohledu není počasí o nic více náhodné než to, zda nastane či nenastane zatmění Měsíce. Je tedy vidět, že to, co se nám jako náhodné jeví, ve skutečností vůbec náhodné není.

Štěstí a smůla, to jsou podle Bernoulliho pojmy, které vyjadřují to dobré nebo špatné, co se nám stane, ale pouze v určitých případech. O štěstí hovoříme v případě, že je vysoce nepravděpodobné, že se nám stane dobrá věc, zatímco o smůle mluvíme, je-li vysoce nepravděpodobné, že se nám stane špatná věc.

Ve druhé kapitole tohoto dílu Bernoulli vysvětluje, kdy a jak lze pravděpodobnost určit. Zejména nelze určit pravděpodobnost jevů, o nichž s jistotou víme, zda nastanou či nenastanou. Bernoulli uvádí jako příklad zatmění Měsíce: není možné, aby astronom řekl, že během nějakého úplňku během roku nastane či nenastane zatmění, protože ví (a tedy nedomnívá se), během kterého úplňku k zatmění Měsíce dojde. K určení pravděpodobnosti pak nestačí jen jeden způsob důkazu; navíc musíme vzít v úvahu nejen ty skutečnosti, které hovoří ve prospěch naší domněnky, nýbrž také skutečnosti, které hovoří proti naší domněnce. K důkazu všeobecných věcí lze použít všeobecné důvody, avšak k vyslovení domněnky o individuálních skutečnostech je potřeba předložit důvody individuální. U věcí pochybných a nejistých je pak potřeba počkat, až se více rozjasní. Někdy však, říká Bernoulli, je třeba konat; tehdy vybíráme to, co je vhodnější a bezpečnější.

V této souvislosti je zajímavé sledovat, jak se Bernoulli vyrovnává s pojmem pravděpodobnosti. Je třeba mít na paměti, že právě *Ars Conjectandi* je jedním z prvních pokusů pravděpodobnost exaktně popsat. Proto také uvádí Bernoulli příklady ze života: můžeme-li si vybrat, zda vyskočíme z hořícího domu ze střechy domu či z okna v prvním patře, co si vybereme? Jak podotýká Bernoulli, ani jedno není bez rizika, ale výskok z prvního patra se jeví na první pohled jako výhodnější. Není tedy překvapující, že dále Bernoulli v souvislosti s výpočty pravděpodobnosti varuje před přeceňováním jednotlivých vlivů.

[3] Zde Bernoulli podotýká, že jako pravděpodobné v běžné řeči označujeme jevy, jejichž pravděpodobnost je výrazně větší než jedna polovina, zatímco jako nepravděpodobné označujeme ty jevy, jejichž pravděpodobnost je naopak výrazně menší než jedna polovina.

Podle Bernoulliho je navíc důležité si uvědomit, že lidské činy nelze hodnotit pouze podle úspěšnosti, neboť to, co se jevilo jako pošetilé, může vyústit v úspěch a naopak.

Ve třetí kapitole Bernoulli rozebírá možné způsoby dokazování, a to na základě slovního rozboru konkrétních situací. Začíná také propojovat váhu jednotlivých důkazů a četnost jejich výskytu s celkovou pravděpodobností. V tom pokračuje také v kapitole čtvrté a páté, čímž se dostává k formulaci zákona velkých čísel, který byl klíčový k tomu, aby bylo možné dát výsledky četných pozorování do souvislosti s očekávanou pravděpodobností.

4 Závěr

Klasická práce Jakoba Bernoulliho, historie matematiky pomáhá při výuce osvětlit některé základní pojmy a přispívá k jejich lepšímu pochopení. Čtvrtá část Bernoulliho *Ars Conjectandi* umožní dnešnímu čtenáři nahlédnout do úvah o povaze pravděpodobnosti a snad i osvětlit, v čem se uvažování v ostatních oblastech matematiky liší od uvažování v teorii pravděpodobnosti.

Literatura

[1] Bernoulli J.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi)*, Wilhelm Englemann, Leipzig, 1899.

[2] Barner K.: *Das Leben Fermats*, In: Michael Toepell (ed.): *Mathematik im Wandel 4*, Franzbecker, Hildesheim, 2009, str. 101–114.

[3] Hacking I.: *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[4] Hald A.: *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2003.

[5] Klusáčková P.: *Počátky kombinatoriky v díle J. Bernoulliho* Ars Conjectandi (diplomová práce, vedoucí Pavel Šišma), Přírodovědecká fakulta MU, Brno, 2003.

[6] Mačák K.: *Počátky teorie pravděpodobnosti*, Prometheus, Praha, 1997.

[7] Saxl I.: *Filosofické interpretace pravděpodobnosti*, In: Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků. III.*, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004. str. 132–155.

[8] Todhunter I.: *A History of Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, MacMillan and Co., Cambridge and London, 1865.

Adresa

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Masarykova univerzita v Brně
Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: *hdurnova@ped.muni.cz*

FERMATOVA METODA MAXIM A MINIM

ANNA KALOUSOVÁ

Abstract: In the 17th century, the problems related to differential and integral calculus (such as properties of the tangent and the center of gravity, or the rectification and quadrature of curve) were studied by the then leading mathematicians. They used some methods that preceeded the methods of Newton and Leibniz. One of the most important mathematicians of that epoch, Pierre de Fermat, is considered to be a co-founder of analytic geometry, differential and integral calculus, number theory and probability theory. In this paper, we describe Fermat's method of maxima and minima.

1 Úvod

V 17. století se mnoho velkých matematiků zajímalo o úlohy, které dnes řešíme užitím diferenciálního a integrálního počtu, jako je třeba konstrukce tečny ke křivce, hledání těžiště obrazce nebo tělesa, délka křivky, obsah plochy ohraničené nějakými křivkami apod. Užívali metody, z nichž mnohé už dnes neznáme, ale které byly důležité právě pro vytvoření diferenciálního a integrálního počtu.

Pierre de Fermat patřil k největším matematikům této doby, i když vystudoval právo a ne matematiku. Ta pro něj byla jen zábavou. Přesto vytvářel nebo spoluvytvářel řadu nových matematických oborů (analytická geometrie, teorie pravděpodobnosti, teorie čísel, …). Metodu maxim a minim používal nejen k nalezení maxim či minim algebraických výrazů, ale také např. ke konstrukci tečen ke křivkám, k výpočtu těžiště parabolického konoidu a k hledání inflexních bodů křivky.

2 Pierre de Fermat

2.1 Život

Pierre de Fermat se narodil v Beaumont-de-Lomagne (département Tarn-et-Garonne), jeho otcem byl Dominique Fermat, zámožný obchodník s kůžemi. Totožnost matky stejně jako přesné datum narození Pierra de Fermata neznáme. Dominique Fermat byl totiž dvakrát ženat, nejprve s Françoise Cazeneuve (alespoň do roku 1603), poté s Claire de Long (oženil se před rokem 1607), a v obou manželstvích se narodili synové pokřtění Pierre. Jeden z nich (pravděpodobně ten starší) v dětském věku zemřel.

Fermat studoval právo v Toulouse, potom v Orléans, kde v roce 1631 získal titul bakaláře občanského práva. Mezitím žil určitý čas v Bordeaux, kde se stýkal s vědci a právníky z okruhu Jeana d'Espagneta, presidenta *Parlement de Bordeaux* a přítele Françoise Vièta, a jeho syna Étienna, s nímž ho pojil zájem o matematiku. Seznámil se zde také s matematikem Jeanem de Beaugrandem. V roce 1631 se usadil v Toulouse, kde si koupil úřad soudního rady; od té doby se psal de Fermat. V tomtéž roce se oženil se svou vzdálenou sestřenicí Louisou de Long, měli 7 dětí. V zaměstnání prošel obvyklým postupem, působil nejprve v občanskoprávním senátu, poté ve vyšetřovacím, trestním a nakonec byl jmenován do velkého senátu (*Grande Chambre*). V roce 1642 se stal také členem ediktového senátu (*Chambre de l'Édit*[1]) sídlícího v Castres. Tři dny před smrtí zde vynesl poslední rozsudek. Zemřel 12. ledna 1655.

2.2 Vědecká práce

Fermat byl velmi vzdělaný, ovládal šest jazyků (francouzštinu, okcitánštinu[2], španělštinu, italštinu, latinu a řečtinu), psal latinské básně, zajímal se o filologii, o fyziku a hlavně miloval matematiku. Je známý především díky své *Velké* (někdy nazývané *Poslední*) *větě*, jejíž důkaz trápil matematiky několik století. Díky své profesi byl finančně dostatečně zajištěn, matematika byla zábavou, které se věnoval ve volných chvílích. Své výsledky téměř nikdy nepublikoval, psal je jen jako poznámky na okraji stránek knih, které četl, nebo v dopisech významným matematikům (Marin Mersenne, Gilles Personne de Roberval, Jean de Beaugrand, Étienne Pascal, později i Blaise Pascal, René Descartes, Pierre de Carcavi, John Wallis, Christiaan Huygens, ...), ve kterých je nabádal, aby vyřešili problém, jehož řešení on už znal. O jeho matematickém vzdělání nejsou zprávy, během svého pobytu v Bordeaux však určitě do hloubky studoval dílo Françoise Vièta (1540–1603).

Po Fermatově smrti vydal roku 1670 jeho syn Samuel Diophantovu *Aritmetiku* doplněnou otcovými poznámkami a v roce 1679 sérii článků a výběr z korespondence pod názvem *Varia opera mathematica*. V roce 1843 bylo rozhodnuto, že budou vykoupeny všechny Fermatovy rukopisy, které se podaří dohledat, a bude vydáno kompletní Fermatovo dílo. Ale i to se zkomplikovalo, některé získané rukopisy byly prodány soukromým sběratelům. Nakonec se v roce 1881 Paul Tannery a Charles Henry pustili do vyhledávání Fermatových rukopisů; ty, které se jim podařilo shromáždit, vydali v letech 1891–1912. V třetím díle připojili i překlady latinsky psaných Fermatových děl do francouzštiny.

Oblast Fermatových matematických zájmů byla velmi široká. Velký vliv na něj měl François Viète, od něhož převzal nejen značení, ale také myšlenku, že lze pomocí algebry řešit problémy z geometrie. V roce 1636, když se pokoušel rekonstruovat ztracený Apolloniův spis *Plane loci*, vytvořil systém analytické geometrie podobný tomu, který představil René Descartes (1596–1650) v *Geometrii* vydané v roce 1637. V roce 1654 se na Fermata obrátil Blaise Pascal (1623–1662) s problémem, jak rozdělit výhru mezi hráče, když hra musela být předčasně ukončena. Diskusí o tomto problému položili základy teorii pravděpodobnosti. Fermat se zabýval také teorií čísel, ale v této oblasti zůstal ve svém zkoumání osamocen. Pro jeho současníky toto téma nebylo zajímavé. Možná právě proto jsou dnes s Fermatovým jménem spojeny právě pojmy z teorie čísel (*Fermatova čísla*, *Malá Fermatova věta*, *Velká Fermatova věta*, ...). Nemohl opominout ani velké téma oné doby, tedy otázky související s diferenciálním počtem, k jejichž řešení používal metodu maxim a minim.

---

[1] Tyto senáty existovaly ve Francii v 17. století. Sestávaly ze stejného počtu katolíků a reformovaných. Jejich úkolem bylo dbát na dodržování práv hugenotů, která jim zaručoval Edikt nantský (vydaný roku 1598 Jindřichem IV.). *Chambres de l'Édit* byly zrušeny v roce 1669 Ludvíkem XIV.

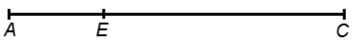
[2] Okcitánština (francouzsky *occitan*, resp. *langue d'oc*) je románský jazyk používaný v jižní Francii a přilehlých územích ve Španělsku, Monaku a Itálii. Ve středověku se v jižní Francii používalo slovo *oc* pro vyjádření *ano*, zatímco ve Francii severní se používalo slovo *oil* (později se změnilo na dnes používané *oui*). Z toho pocházelo označení těchto jazyků *langue d'oc*, resp. *langue d'oil*. Okcitánie (tedy oblast, ve které se hovořilo okcitánsky) byla k francouzskému království připojena ve 13. století po křížové výpravě proti albigenským (katarům). Dnes se jeden z regionů na jihu Francie jmenuje Languedoc-Roussillon.

3 Metoda maxim a minim

3.1 Představení metody

Fermat ve [2] vysvětluje svou metodu takto: Nechť a je nějaká neznámá, která má jednu, dvě či tři dimense. Vyjádří se množství v a (dnes bychom řekli, že máme funkci proměnné a), které maximalizujeme nebo minimalizujeme pomocí výrazů, které mohou být libovolného stupně. Nahradíme proměnnou a výrazem $a + e$ (neříká, jestli je e kladné nebo záporné), dosadíme a získaný výraz prohlásíme za *adekvální* předchozímu. Fermat nevysvětluje, co tento pojem znamená, jen se odvolává na Diofanta, který jej také použil. Většinou se interpretuje jako *dočasná rovnost*. Dnes bychom pravděpodobně řekli, že se rovnají limity těchto výrazů pro e jdoucí k nule. Z obou stran (adekvality) odstraníme společné výrazy. Všechny výrazy na obou stranách (adekvality) teď obsahují e v různých mocninách. Vydělíme je e nebo mocninou e tak, aby se v některých výrazech už e nevyskytovalo. Odstraníme ty výrazy, které stále ještě obsahují e. Řešením poslední rovnice získáme hodnotu neznámé a, která dává maximum nebo minimum.

Následuje příklad. Nechť je přímka (míněno úsečka) AC rozdělena v bodě E tak, aby součin $|AE|\times|EC|$ byl maximální. Položme $|AC|=b$ a označme a délku jedné z částí. Délka druhé pak bude $b-a$ a součin obou částí, jehož maximum hledáme, bude $ba-a^2$.



Nechť je nyní délka první části rovna $a+e$, délka druhé potom bude $b-a-e$ a součin obou částí $ba-a^2+be-2ae-e^2$. To musí být adekvální předchozímu (tj. $ba-a^2$). Když odstraníme společné výrazy (tedy $ba-a^2$), máme be adekvální $2ae+e^2$. Po vydělení e získáme b adekvální $2a+e$. Odstraníme e a vyjde b adekvální $2a$. Součin bude maximální, jestliže $a=\dfrac{b}{2}$. Fermat na závěr dodává, že nelze najít obecnější metodu[3]. Podobným způsobem hledá v [4] bod B na úsečce AC takový, že je maximální součin $|AB|^2\times|BC|$.

3.2 Nalezení tečny ke křivce

Fermat používá metodu maxim a minim též k nalezení tečen k různým křivkám. V [2] popisuje postup, jak nalézt tečnu k parabole. Podobným způsobem konstruuje také tečnu k elipse v [4] a ke kisoidě, Nikomédově konchoidě a cykloidě v [6].

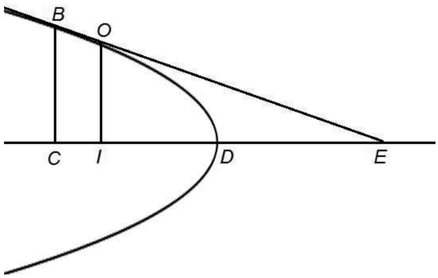
Popíšeme zde konstrukci tečny k parabole. Mějme parabolu s vrcholem D, na ní bod B, kterým vedeme tečnu. Ta nechť protíná osu paraboly v bodě E. Z bodu B spustíme kolmici k ose paraboly, průsečík označíme C. Na úsečce BE zvolíme v blízkém okolí bodu B libovolně[4] bod O, z něj opět spustíme kolmici k ose paraboly, průsečík s osou označíme I. Z definice paraboly je zřejmé, že $|CD|=|BC|^2$. Protože bod O leží vně paraboly, zřejmě platí $|DI|<|OI|^2$, a tedy $\dfrac{|CD|}{|DI|}>\dfrac{|BC|^2}{|OI|^2}$. Z podobnosti trojúhelníků BCE

---

[3] *Il est impossible de donner une méthode plus générale.* Podobná vyjádření najdeme u Fermata častěji. To je možná jeden z důvodů, proč Descartes později napsal: *Monsieur Fermat est Gascon, moi pas.* (Pan Fermat je Gaskoněc, já ne.) Označením Gaskoněc chtěl vyjádřit, že Fermat je chvastoun.

[4] Fermat píše: *Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O …* Neklade tedy podmínku na blízkost bodů B a O ani na polohu bodu O na úsečce BE. Pokud by bod O ležel na opačné polopřímce, úvahy by byly podobné, jen bychom museli položit $|CI| = -e$. Požadavek na blízkost bodů B a OFermat mlčky předpokládá.

a OIE plyne, že $\frac{|BC|^2}{|OI|^2} = \frac{|CE|^2}{|IE|^2}$, a dosazením do předchozí nerovnosti získáme $\frac{|CD|}{|DI|} > \frac{|CE|^2}{|IE|^2}$. Položme $|CD| = d$, $|CE| = a$ a $|CI| = e$. Potom $|DI| = d - e$, $|IE| = a - e$



a když dosadíme do předchozí nerovnice, je $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Obě strany nerovnice vynásobíme společným jmenovatelem a získáme $da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e$. Nyní položíme obě strany nerovnosti sobě adekvální, odstraníme společné výrazy (tedy da^2) a vydělíme e. Získáme $de + a^2$ adekvální $2da$. Odstraníme výraz s e (tedy de) a zbude nám $a^2 = 2da$, neboli $a = 2d$ (případ, že $a = 0$, Fermat ani nezmiňuje). Vzdálenost průsečíku tečny s osou paraboly (bod E) od bodu C je tedy dvojnásobkem vzdálenosti bodu C od vrcholu paraboly D. Tečna k parabole je určena bodem dotyku B a bodem E.

3.3 Další použití metody maxim a minim

V [3] Fermat používá metodu maxim a minim k nalezení těžiště parabolického konoidu. V [5] hledá kužel s maximálním povrchem, který je vepsaný do dané koule. Podobnou úlohu, totiž nalezení válce s maximálním povrchem, který je vepsaný do dané koule, řeší v [7]. V [6] používá tuto metodu k určení inflexního bodu (podle Fermata bodu, kde se „mění zakřivení"[5]) křivky. Tvrdí, že tečna k dané křivce v tomto bodě svírá se svislou osou (kartézského souřadného systému, v obvyklém značení je to osa y) nejmenší úhel ze všech tečen vedených body nad, resp. pod inflexním bodem[6] (tedy v jistém okolí inflexního bodu). Toto je zřejmě pravda (pro diferencovatelné funkce), když se rostoucí funkce v inflexním bodě mění (s rostoucím x) z konvexní na konkávní, resp. když se klesající funkce v tomto bodě mění z konkávní na konvexní. Příkladem může být funkce $y = \sin x$. V opačném případě (např. $y = x^3$) je naopak (pokud uvažujeme ostrý úhel) tento úhel maximální. Fermat sám ukazuje jen způsob hledání inflexního bodu u klesající funkce, která se mění z konkávní na konvexní. Uvádí, že nepopisuje všechny případy, jenom ukazuje způsob hledání inflexního bodu.[7]

4 Spory kolem metody maxim a minim

Když byla v roce 1637 vydána Descartesova *Geometrie*, vyjádřil Fermat údiv nad tím, že v ní není nic o metodě maxim a minim. Oznámil bez důkazu pravidlo pro řešení problémů touto metodou (viz [2]). Descartes byl zasažen na citlivém místě. Uplatnil Fermatovo pravidlo na hledání nejdelší úsečky ze všech, které vedou z pevně zvoleného bodu do bodu na křivce v části, která je konvexní vzhledem k tomu pevnému bodu, a dostal absurdní výsledek. Z toho vyvodil, že Fermatova metoda je nepřesná. Fermata se

---

[5] Fermat píše: *Soit la courbe AHFG dont la courbure change par exemple au point H …*

[6] A pokračuje: *Menez la tangente HB, l'ordonnée HC; l'angle HBC sera le minimum entre tous ceux que la tangente fait avec l'axe ACD, qu'elle soit au-dessous ou au-desus du point H, comme il est facile de le démontrer.*

[7] *Nous ne poursuivons pas tous les cas, nous indiquons seulement le mode de recherche, les formes des courbes variant indéfiniment.*

zastal Roberval, který odpověděl, že se nejedná o maximum ve smyslu, jak je používá Fermat. Vzplanula válka slov, ve které měl své zastánce jak Fermat, tak Descartes. Spor později popsal např. Jean-Marie Duhamel (1797–1872) v [1].

Fermat na Descartesovy výhrady reagoval tím, že znovu (a přesněji) popsal svou metodu v [8]. Tentokrát nepoužívá pojem adekvality a píše, že na metodu, jak hledat minimum a maximum, přišel při studiu Vièta díla. Minima a maxima jsou totiž jedinečná[8] (v následujícím smyslu). Nechť (spojitá) funkce f nabývá v bodě a svého maxima M. Rovnice $f(x) = M$ má v určitém okolí bodu a jediné řešení, totiž a. Pro hodnotu Z „o málo“ menší než M je rovnice $f(x) = Z$ „dvojznačná“ (*ambiguë)*, neboť existují body $b < a$ a $c < a$, ve kterých $f(b) = f(c) = Z$.

Následuje příklad uvedený v 3.1. Jak rozdělit úsečku AC v bodě E tak, aby součin $|AE| \times |EC|$ byl maximální? Připomeňme, že jsme položili $|AC| = b$ a $|AE| = a$, součin je tedy $ba - a^2$. Maximum je rovno $\frac{b^2}{4}$ a nastává pro $a = \frac{b}{2}$. Když chceme úsečku AC rozdělit v bodě E tak, aby součin byl roven kladnému Z, které je menší než $\frac{b^2}{4}$, dostáváme na úsečce AC dva různé body, které splňují tuto podmínku. Označme a, resp. e vzdálenosti těchto bodů od bodu A. Platí, že $ba - a^2 = Z = be - e^2$, tedy $ba - be = a^2 - e^2$, a po vydělení $a - e$ získáme $b = a + e$ (připomeňme, že $a \neq e$). Zvolíme-li hodnotu větší než Z (ale menší než $\frac{b^2}{4}$), budou se čísla a a e lišit méně než v předchozím případě. Čím větší bude hodnota součinu, tím menší bude rozdíl $a - e$, až pro maximum bude nulový (protože maximum je jedinečné), tedy $a = e = \frac{b}{2}$.

V dalším příkladu hledáme na úsečce AC bod E tak, aby součin $|AE|^2 \times |EC|$ byl maximální. Položíme-li $|AE| = a$, $|AC| = b$, maximalizujeme výraz $a^2(b - a) = a^2b - a^3$. Podobně jako v předchozím případě platí, že pro hodnotu menší, než je ta maximální, existují na úsečce AC dva body, ve kterých je $a^2b - a^3$ rovno této hodnotě. Vzdálenosti těchto bodů od bodu A zase označíme a a e. Platí $a^2b - a^3 = e^2b - e^3$, a tedy $a^2b - e^2b = a^3 - e^3$. Po vydělení $a - e$ získáme $ab + eb = a^2 + ae + e^2$. Položíme $a = e$ (maximum je jedinečné) a získáme $2ba = 3a^2$, neboli $2b = 3a$.

Protože a i e jsou neznámé hodnoty, nic nebrání tomu, abychom vzdálenost druhého bodu od A označili $a + e$ namísto e, tím bude rozdíl vzdáleností (kterým je třeba dělit) roven e. Vše je ukázáno na příkladu maximalizace výrazu $b^2a - a^3$. Pro kladné číslo menší, než je maximum, existují čísla a a $a + e$, pro které je výraz $b^2a - a^3$ (lépe $b^2x - x^3$) roven tomuto číslu. Platí tedy, že $b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3ae^2 = b^2a - a^3$. Odstraněním stejných výrazů ($b^2a - a^3$) z obou stran rovnosti získáme $b^2e = e^3 + 3a^2e + 3ae^2$. Každý člen nyní obsahuje nějakou mocninu čísla e. Tímto číslem vydělíme obě strany rovnosti. Máme $b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae$. Abychom našli maximum (které je jedinečné), polo-

---

[8] *Les maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens, …*

žíme $e = 0$. Získáme $b^2 = 3a^2$, odkud můžeme vyjádřit a. Tím je vlastně zdůvodněn postup popisovaný dříve. Navíc není třeba používat trochu nejasný a pochyby vzbuzující pojem adekvality.

5 Závěr

I v pozdější době si někteří matematici kladli otázku, jak moc si Fermat uvědomoval, co vlastně jeho metoda znamená. Jeho postup se nápadně podobá tomu, co používáme dnes. Stačí si představit, že všude napíšeme limitu pro e jdoucí k nule. Někteří dospěli k názoru, že Fermat vynalezl diferenciální počet dříve než Newton a Leibniz, jiní usoudili, že tak daleko Fermat nedospěl. Tato metoda však jistě přispěla k rozvoji úvah o nekonečně malých veličinách, úvah, které k vytvoření diferenciálního počtu vedly.

Literatura

[1] Duhamel J.-M.: *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat, et sur les methods des tangents de Fermat et Descartes*, Extrait de tome XXXII des Mémoires de l'Académie des Sciences, Gauthier-Villars, Paris, 1864.

[2] Fermat P. de: *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 121–123.

[3] Fermat P. de: *Centre de gravité du conoide parabolique*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 124–126.

[4] Fermat P. de: *Sur la même méthode*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 126–130.

[5] Fermat P. de: *Appendice à la méthode du maximum et minimum*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 136–140.

[6] Fermat P. de: *Sur la même méthode*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 140–147.

[7] Fermat P. de: *Problème envoyé au R. P. Mersenne*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 148–149.

[8] Fermat P. de: *Méthode du maximum et minimum*, Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome III. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, str. 131–136.

Adresa

RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky FEL ČVUT
Technická 2
166 27 Praha 6
e-mail: *kalous@math.feld.cvut.cz*

MIKULÁŠ KUSÁNSKÝ A KVADRATURA KRUHU

LIBOR KOUDELA

Abstract: Nicholas of Cusa often used mathematics to approach rationally the domain of transcendental principles. He also wrote several purely mathematical works devoted mostly to the solution of the old-standing problem of quadrature of the circle in terms of the doctrine of *coincidentia oppositorum* (coincidence of opposites). His attempts to square the circle were criticized by Regiomontanus, who used thorough numerical calculations to disprove Cusanus' results. The Regiomontanus-Cusanus controversy illustrates a profound change in mathematical thought of the late Middle Ages.

1 Úvod

V roce 1533 vyšla v Norimberku kniha *De triangulis omnimodis* [5], která představuje mezník v historii trigonometrie. Její autor Johannes Müller z Königsbergu (1436–1476), známější později jako Regiomontanus, ji napsal již v roce 1464. Norimberské vydání připravil německý polyhistor Johannes Schöner (1477–1547), který k uvedené knize připojil obsáhlý dodatek tvořený některými dalšími spisy z Regiomontanovy pozůstalosti. Tento apendix tvoří čtyři kratší matematické spisy Mikuláše Kusánského (1401–1464) a jejich kritika sepsaná Regiomontanem, která sestává z několika oddělených částí lišících se formou.

Mikuláš Kusánský ve svých filosoficko-teologických dílech používal matematické představy jako prostředek vyššího poznání. Intelektuální imaginace a meditace o proměně geometrických objektů v nekonečnu umožňují podle Kusána překonávat omezení světa vnímaného smysly. S tím je spojena představa splývání protikladů (*coincidentia oppositorum*), překlenování rozdílu mezi jevy, jež jsou na materiální úrovni neslučitelné. Typickým příkladem je meditace o proměně oblouku kružnice v přímku (tedy minimalizace křivosti) při neomezeném zvětšování poloměru, popisovaná v prvním Kusánově významném filosofickém spise *De docta ignorantia* z roku 1440.

Kusánus je rovněž autorem několika čistě matematických spisů, věnovaných převážně pokusům o vyřešení kvadratury kruhu aplikováním výše uvedených myšlenek.[1] Tyto spisy byly napsány v období 1445–1459. Některé z nich se dostaly do rukou Georga von Peuerbacha (1423–1461), významného vídeňského matematika a astronoma, od něhož přešly do vlastnictví jeho žáka Regiomontana. Ten, patrně na Peuerbachovu žádost, později věnoval značné úsilí ověření platnosti Kusánových závěrů [6, str. 76]. V relativně krátkém období na přelomu června a července 1464 je podrobil důkladnému rozboru, jehož závěry pak byly spolu s Kusánovými texty připojeny k Schönerovu vydání Regiomontanova stěžejního díla *De triangulis omnimodis*.

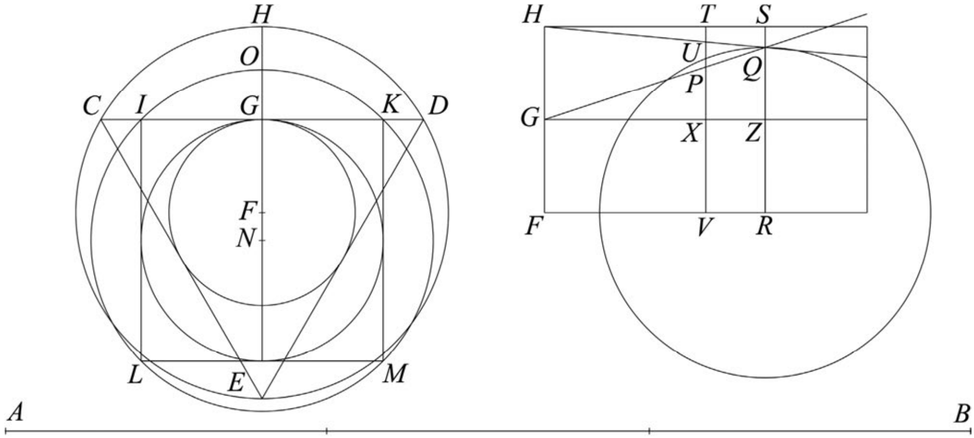
[1] Německý překlad Kusánových matematických spisů s komentářem J. E. Hofmanna vyšel roku 1952 (viz [4]). V české literatuře věnoval Kusánovu matematickému dílu pozornost Jiří Fiala, který se v článku [3] zabýval Kusánovým přístupem k řešení kvadratury kruhu v širším kontextu.

Příloha obsahuje následující Kusánovy texty: *Quadratura circuli* (str. 5–9, napsaná patrně v období 1451–52), *Dialogus de circuli quadratura* (str. 10–12, z roku 1457, má formu dialogu mezi Mikulášem Kusánským a Paolem Toscanellim), k němu je přiložena Toscanelliho odpověď *Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum Cardinalem* (str. 13–14), po níž následuje Kusánova reakce *Declaratio rectilineationis curvae* (str. 14–15) a nakonec nedatované *De una recti curvique mensura* (str. 16–21, napsané zřejmě 1457).

2 Kusánovy pokusy o provedení kvadratury kruhu

2.1 Arkufikace úsečky v *Quadratura circuli*

Již od starověku bylo známo, že sestrojit čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh (tedy provést kvadraturu kruhu), znamená totéž jako sestrojit úsečku, která má stejnou délku jako daná kružnice (tedy kružnici rektifikovat). V prvním z uvedených spisů popisuje Kusánus úlohu, která je v jistém smyslu obrácená k problému rektifikace: jde o nalezení kružnice, jež má stejnou délku jako daná úsečka (Cantor [1, str. 192] nazývá takovou úlohu *arkufikací* úsečky).



Obr. 1. Konstrukce kružnice stejné délky, jako má daná úsečka *AB*

Základní myšlenka spočívá v tom, že kruh a trojúhelník tvoří v jistém smyslu extrémy. Uvažujeme-li posloupnost pravidelných *n*-úhelníků se stejným obvodem, stojí trojúhelník na jejím počátku ($n = 3$), zatímco kruh chápaný jako mnohoúhelník s nekonečným počtem vrcholů na jejím konci. Rozdíl poloměrů opsané a vepsané kružnice je v případě trojúhelníku největší a součet nejmenší; v případě kruhu obě kružnice splývají a rozdíl jejich poloměrů je roven nule, zatímco jejich součet je největší. V Kusánově pojetí se limitní přechod od pravidelného *n*-úhelníka k izoperimetrickému kruhu realizuje jednoduchou geometrickou konstrukcí.

Sestrojíme rovnostranný trojúhelník *CDE*, jehož obvod bude rovný délce dané úsečky *AB* (obr. 1).[2] Na úsečce *CD* vyznačíme body *I* a *K* tak, aby $|IK| = (1/4)\ |AB|$ a aby úsečky

[2] Používám většinou stejné značení bodů, jaké je v původním textu, pouze malá písmena nahrazuji v souladu se současnými konvencemi velkými. K odlišnému značení se uchyluji tehdy, když jsou v původním textu duplicitní symboly nebo jsou body označovány dvojicemi písmen.

CD a *IK* měly společný střed. Úsečka *IK* nechť je stranou čtverce *IKML*. Kružnice opsaná tomuto čtverci bude mít poloměr *NO* a kružnice vepsaná poloměr *NG*. Kružnice vepsaná trojúhelníku *CDE* bude mít poloměr *FG* a kružnice opsaná poloměr *FH*, přičemž bod *G* bude středem úsečky *FH*. Body *F*, *G*, *H*, které jsou zopakovány na obr. 1 vpravo, vedeme kolmice na úsečku *FH*. Sestrojíme úsečku *TV* a na ní body *P* a *U* tak, aby úsečky *TV* a *FH* byly rovnoběžné, aby body *T*, *V* ležely na sestrojených kolmicích a aby délka *VP* byla rovna poloměru kružnice vepsané čtverci (či jinému pravidelnému *n*-úhelníku) a délka *VU* poloměru kružnice opsané.

Z bodu *G* vedeme (polo)přímku procházející bodem *P* a z bodu *H* (polo)přímku procházející bodem *U*; jejich průsečík označíme *Q*. Bodem *Q* vedeme rovnoběžně s *FH* úsečku *SR*, jejíž střed je Z, přičemž *S* leží na *HT* a *R* na *FV*. Kružnice se středem *R* procházející bodem *Q* pak bude mít podle Kusána délku rovnou délce dané úsečky *AB*.

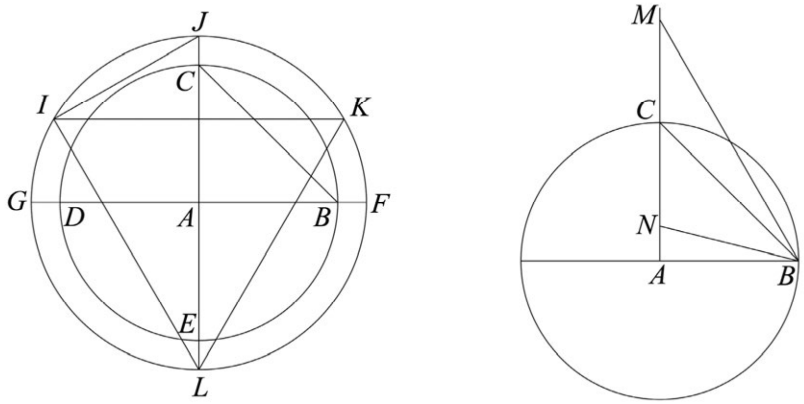
Označíme-li poloměr kružnice vepsané a kružnice opsané pravidelnému *n*-úhelníku symboly r_n, resp. R_n, a poloměr hledaného izoperimetrického kruhu *r*, spočívá hlavní nesnáz Kusánova postupu v předpokladu, že

$$\frac{r - r_n}{R_3 - r} = \frac{r_n - r_3}{R_3 - r_n}.$$

Pro $n = 4$, což odpovídá výše uvedené konstrukci, vychází hodnota $\pi \approx 3{,}15149$; s rostoucím *n* by se výsledek více blížil skutečné hodnotě.

2.2 Rektifikace kružnice v *Dialogus de circuli quadratura*

V textu *Dialogus de circuli quadratura* je výklad metody kvadratury kruhu prezentován ve formě dialogu mezi kardinálem sv. Petra Mikulášem [Kusánským], biskupem brixenským, a Paolem [Toscanellim], lékařem florentským. V textu je rozvedena metoda popsaná ve starším Kusánově spise *De mathematicis complementis*; na Paolovu žádost o bližší vysvětlení kvadratury kruhu přináší Mikuláš následující konstrukci.



Obr. 2. Rektifikace kružnice *BCDE*

Kolem bodu *A* opíšeme kružnici procházející body *B*, *C*, *D*, *E*, přičemž úsečky *BD* a *CE* jsou navzájem kolmé. Sestrojíme dále tětivu *BC* a kolem bodu *A* opíšeme další kružnici, jejíž průměr je roven součtu poloměru první kružnice a délky tětivy BC, tedy $|FG| = |AB| + |BC|$. Druhé kružnici vepíšeme rovnostranný trojúhelník IKL. Mikuláš tvrdí, že obvod trojúhelníka IKL je roven délce kružnice $BCDE$.

Podle Hofmanna [4, str. 240] není dialog úplnou fikcí, ale reflektuje skutečné námitky, které proti uvedenému řešení vznesl Toscanelli. V textu Mikuláš zřejmě naznačuje důkaz pomocí *reductio ad absurdum*, když tvrdí, že nahradíme-li bod C bodem N ležícím pod ním (obr. 2 vpravo), dostaneme hodnotu menší než hledaný průměr, zatímco bod M ležící nad bodem C vede na hodnotu větší, takže abychom dostali průměr větší kružnice, musíme k AB připojit skutečně tětivu BC, což však, jak dokázal později Regiomontanus, neodpovídá skutečnosti.

3 Regiomontanova kritika

Regiomontanova reakce na Kusánovy postupy má částečně rovněž formu dialogu, který se odehrává mezi Aristofilem, žákem a stoupencem Kusánovým, a Kritiem, jeho učitelem. Aristofilos v úvodu dialogu přináší nadšeně zprávu o vyřešení prastarého problému kvadratury kruhu. Chvíli nechává Kritia hádat, komu se podařilo úlohu vyřešit. Posléze Aristofilos prozrazuje, že jde o Mikuláše Kusánského, a popisuje výše uvedenou Kusánovu metodu (viz obr. 2).

Kritias si nejprve vyjasňuje provedení celé konstrukce. Je-li dán kruh $BCDE$ a jeho poloměr AB, pak je známa i tětiva BC,[3] neboť $|BC|^2 = 2|AB|^2$ (podle Pythagorovy věty; Kritias/Regiomontanus odkazuje na její znění v tvrzení 47 první knihy Eukleidových *Základů*).

Tím je určen i průměr větší kružnice $FJGL$, která je opsána trojúhelníku IKL. Rovněž jeho strana IL je tím pádem známa, neboť $|JL|^2 = (4/3)|IL|^2$. (Kritias na tomto místě demonstruje svou početní zběhlost: Vezmeme-li tětivu IJ, která je stranou pravidelného šestiúhelníka vepsaného větší kružnici, je podle tvrzení 15 čtvrté knihy *Základů* zřejmě $2|IJ| = |JL|$ a odtud $|JL|^2 = 4|IJ|^2$. Úhel $\angle LIJ$ je pravý, takže $|IJ|^2 + |IL|^2 = |JL|^2$. Je tedy $|IL|^2 = 3|IJ|^2$ a $|IJ|^2 + |IL|^2 = |JL|^2 = (4/3)|IL|^2$.) Vezmeme-li pak úsečku, jejíž délka je rovna trojnásobku délky úsečky IL, budeme mít, platí-li Kusánův závěr, úsečku rovnou délce kružnice $BCDE$. Známe-li délku obvodu kruhu, je snadné přejít ke čtverci stejného obsahu: nejprve na základě tvrzení I Archimédovy knihy *Měření kruhu* sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s jednou odvěsnou rovnou obvodu kruhu a druhou rovnou jeho poloměru. Pomocí tvrzení 14 druhé knihy *Základů* pak snadno přeměníme tento trojúhelník na čtverec a kvadratura kruhu bude dokončena.

Pak však dialog dospěje k zásadní otázce, zda Kusánovo tvrzení je pravdivé. Kritias se nejprve zdráhá dát jasnou odpověď, uznává výjimečnost Kusánovy osobnosti a jeho hluboké znalosti filosofie. Aristofilos připouští, že ani on sám neví, jak uvedené tvrzení dokázat. Kritias poté přistupuje k vysvětlení, jak je možné při ověřování platnosti postupovat nejen v tomto, ale i v dalších podobných případech. Jeho postup je založen na numerickém ověření a opírá se o tvrzení III spisu *Měření kruhu*, které stanovuje meze pro

[3] Regiomontanův dialog je doplněn novým obrázkem s odlišným značením. Zde zachovávám značení z obr. 2, neboť popsaná metoda je stejná jako v Kusánově textu.

poměr obvodu kruhu a jeho průměru na $3\frac{10}{71}$ a $3\frac{1}{7}$. Stejné meze platí pro poměr poloviny obvodu a poloměru. Zvolíme-li $|AB| = 497$ (jednotek délky), bude délka půlkružnice větší než 1561 a celá kružnice bude mít délku větší než 3122.

Nyní je $|AB|^2 = 247\,009$ a $|BC|^2 = 494\,018$. Toto číslo není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, spokojíme se proto s tím, že $|BC| < 703$. Pak je $|AB| + |BC| < 1200$, a tedy $|JL|^2 = 1\,440\,000$. Odebereme-li z této hodnoty její jednu čtvrtinu, dostaneme odhad druhé mocniny strany *IL*, tj. $|IL|^2 = 1\,080\,000$ a $|IL| < 1040$. Obvod uvažovaného rovnostranného trojúhelníka tedy nemůže být větší než $3 \times 1040 = 3120$. Avšak kružnice *BCDE*, jak bylo řečeno, je delší než 3122, a není tedy rovna obvodu trojúhelníku *IKL*.

Aristofilos jen váhavě připouští platnost Kritiovy argumentace, nechce věřit, že by se osobnost Kusánova formátu mohla mýlit.

> Aristofilos: *Troufáš si tedy popírat tento* [Kusánův] *závěr?*
> Kritias: *Vpravdě netroufám, spíše cítím povinnost.*

Na tomto místě Kritias svůj vlastní podíl snižuje a do popředí staví autoritu starých.

> Kritias: ... *žádní staří geometři a aritmetikové, jejichž jsem já novodobým mluvčím, nevyslovují takový druh závěrů. A tedy ne mně, ale jim přisuď to, co nazveš třeba nelítostnou debatou nad cizí myšlenkou, anebo třeba sladkým pátráním po jakékoli pravdě.* [5, str. 27]

Po dialogu následuje text, který tvoří teoretický základ Regiomontanova postupu. Jde o třináct úvodních tvrzení (*preambulae*), které mají samostatný význam. Jedenáct z nich se týká vlastností veličin určených pomocí mezí (příkladem jsou Archimédovy meze pro poměr obvodu kruhu a jeho průměru). Dvanáctá *preambula* uvádí zásadní koncepční východisko:

Přicházejíce blíže k prvotnímu předmětu našeho zkoumání, tvrdíme jistě, že kružnice je stejného druhu jako každá jiná linie, a mezi žádnými liniemi, ať přímými či různě zakřivenými, není specifického rozdílu. [5, str. 37]

Regiomontanus opírá své přesvědčení o kinematické pojetí. Linie je generována pohybem bodu, jehož dráha může být přímá nebo zakřivená. Stejně tak plocha je generována pohybem linie a těleso pohybem plochy. V komentáři k možnosti porovnávat délky se Regiomontanus dovolává jednak Archiméda, který na různých místech svého díla porovnává délky úseček a oblouků, a jednak Ptolemaia (s odkazem na *Almagest* VI, 7). Má-li se vůbec hovořit o poměru dvou veličin (jako je obvod a průměr kruhu), musí jít o veličiny stejného druhu. Jako původce převládajícího přesvědčení o nemožnosti porovnávat rovné a křivé linie uvádí Regiomontanus Aristotela (s odkazem na *Kategorie*[4]) a jeho skepsi k možnosti provést kvadraturu kruhu. Avšak tato nemožnost podle Regiomontana nikterak nevyplývá z toho, že by rovné a křivé čáry byly různého druhu.

---

[4] O kvadratuře kruhu pojednává část VII, 7b.

Poslední (třinácté) tvrzení této části textu opakuje meze poměru obvodu kruhu k jeho průměru stanovené Archimédem. Regiomontanův komentář obsahuje obhajobu numerické metody a oprávněnosti porovnávat délky úseček pomocí číselných poměrů. Z toho, že poměr ani jeho povahu (souměřitelnost či nesouměřitelnost délek) neznáme, nemůžeme vyvozovat, že poměr vůbec neexistuje. K jeho vyjádření můžeme používat dvojice mezí, což lze aplikovat obecně. Regiomontanus zde předjímá budoucí přístup k řešení problému rektifikace i dalších problémů i analytické zkoumání geometrických úloh. Zbývající část textu je pak věnována důkladnému numerickému ověřování dalších Kusánových výsledků, vycházejícímu z výše uvedených principů.

4 Závěr

Přesvědčení o nemožnosti porovnávat délky rovných a zakřivených linií, jehož kořeny nacházel Regiomontanus u Aristotela, přetrvávalo v matematice do jisté míry až do 17. století, kdy byly provedeny první úspěšné rektifikace. Historie kvadratury kruhu v období, které následovalo, je především historií postupného zpřesňování numerických aproximací čísla π, při němž důležitou roli hrálo užití konvergentních číselných řad. Kusánův imaginativní přístup k řešení geometrických úloh obsahuje prvky, které jsou matematice cizí. Regiomontanus usiluje o očištění matematiky, o návrat k jasnosti starověké geometrie, a je v tomto smyslu skutečným dědicem antické matematiky. De Bernart [2, str. 66] v této souvislosti vyzdvihuje Regiomontanův rigorózní přístup a jeho pevné me-todologické ukotvení.

Literatura

[1] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Zweiter Band*, 2. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig, 1900.

[2] De Bernart L.: *Numerus quodammodo infinitus: per un approccio storico-teorico al dilemma matematico nella filosofia di Giordano Bruno*, Ed. di Storia e Letter., 2002.

[3] Fiala J.: *Kusánovy krásné kvadratury*, Akta Fakulty filozofické Západočeské univerzity v Plzni, 2007, č. 3, str. 31–46.

[4] Kues Nikolaus von: *Die mathematischen Schriften. Übersetzt von Josepha Hofmann mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann*, Felix Meiner Verlag, 1952.

[5] Regiomontanus: *Johannis de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque ... acceserunt huc in calce pleraque D. Nicolai Cusani de quadratura circuli ... itemque J. de Monteregio eadem de re eleuktika hactenus a nomine publicata*, Petreius, Norimbergae, 1533.

[6] Zinner E.: *Regiomontanus: His Life and Work*, Elsevier, 1990.

Adresa

Mgr. Libor Koudela, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod
Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice
Studentská 84
532 10 Pardubice
e-mail: *libor.koudela@upce.cz*

BENOIT MANDELBROT A JEHO FRAKTÁLNA GEOMETRIA

KATARÍNA MÉSZÁROSOVÁ

Abstract: In the 70's of the 20th century Benoit Mandelbrot presented his new view on the world. Mandelbrot's unusual ability of geometrical imagination has allowed him to solve mathematical problems with a non-traditional geometric approach. He has formulated the basics of the fractal geometry. The fast development of the computer industry has immediately allowed the dynamic breakthrough in the fractal geometry, especially its large applications in the different areas of science, technology and arts.

1 Úvod

Z čoho pramenila úžasná Mandelbrotova schopnosť vidieť v rôznorodých oblastiach spoločné rysy a zákonitosti, ktoré nikto iný nevidel a čakali na svoje znovuzrodenie takmer celé storočie? V tomto článku zameriame našu pozornosť na korene, z ktorých vyrastala osobnosť Benoita Mandelbrota. Spomenieme najdôležitejšie osobnosti a okolnosti, ktoré formovali jeho nezvyčajnú tvorivosť, z ktorej čerpal v celom svojom plodnom vedeckom živote. Hlavným zdrojom informácií bude Mandelbrotova autobiografia *Fraktalista. Rebelem ve vědě* [1] (*The Fractalist. Memoir of a Scientific Maverick*). Benoit Mandelbrot zomrel v roku 2010 tesne pred poslednou revíziou autobiografie. Knihu vydala jeho manželka Aliette Mandelbrotová v roku 2012.

2 Benoit B. Mandelbrot: Fraktalista. Rebelem ve vědě

Označenie rebel nosím s hrdosťou. Žil som ako individualista a ako individualista zamýšľam aj zomrieť. Rebelantom som začal byť vo chvíli, keď som sa stal dospelým. Na osamelú dráhu ma nasmerovalo moje rozhodnutie v mladosti. ([1], str. 93)

Môže geometria splniť to, čo sľubuje grécky koreň tohto slova – pravdivo merať celú Zem so všetkou jej nespútanou prírodou? ([1], str. 9) Táto otázka bola mottom Mandelbrotovej mnohoročnej práce na *prvej teórii drsnosti, ktorá sa neskôr stala jednou zo zložiek krásy.* ([1], str. 9) Dnes môžeme povedať, že odpoveď je áno a je skrytá v Mandelbrotovom celoživotnom diele, ktoré nazval fraktálna geometria.

2.1 Detstvo v Poľsku

Benoit B. Mandelbrot sa narodil 20. 11. 1924 vo Varšave. V jeho rodine, ktorá pochádzala z Litvy, sa miešali židovské a ruské tradície. *Väčšina dedičného majetku mojich predkov pozostávala zo zbierky veľmi ohmataných kníh. Našou rodinnou tradíciou bolo nedbať na hmotný majetok a uctievať namiesto toho diela mysli.* ([1], str. 19) Benoit Mandelbrot vyrastal v prostredí, ktoré sa dalo označiť za príbytok matematiky. Na rodinnej večeri vo Varšave v roku 1930 boli aj významní matematici: Arnaud Denjoy a Paul Montel. Čestným hosťom na rodinnej večeri bol Jacques Hadamard, *pravdepodobne najväčší francúzsky matematik tej doby.* ([1], str. 23) Benoit ho považoval za svojho duchovného praotca. Benoitov otec bol od svojho brata Szolema o 16 rokov starší. Aby pomohol svojim súrodencom, musel opustiť štúdiá a ísť do učenia. Obetavo živil rodinu rôznym obchodovaním, ale jeho nenaplnenou túžbou bolo stať sa vynálezcom, no získal len jeden patent. Benoitova matka bola zubárka, spomína na ňu: *V dobe keď sa ešte anestézia bežne nepoužívala, bola zubárova povesť najviac závislá na rýchlosti trhania* *zubov a ja sa dobre pamätám na matkinu silnú pravačku a vypracovaný biceps.* ([1], str. 28)

Strýc Loterman vyučoval Benoita Mandelbrota doma, až kým nenastúpil do 3. ročníka v škole. Benoit spomína: *Mať láskavého učiteľa bolo báječné, ale strýkova neskúsenosť spolu s absenciou akejkoľvek organizácie a vyučovacích metód ma poznamenali na celý život. Pohŕdal mechanickým učením, dokonca aj abecedou a násobilkou, oboje mi do dnes robia problémy. Rozprával mi príbehy z antiky a cvičil môj mozog k nezávislosti a tvorivosti. Neustále sme hrali šach. Jeho domácnosť, rovnako ako otcova, bola plná máp, ja som ich študoval a zapamätával som si ich. Kto vie, možno mi šach a mapy vypestovali intuíciu, ktorá sa neskôr, keď už som bol vedcom, stala mojím najdôležitejším nástrojom. Strýcove vyučovanie bolo prvou fázou môjho zvláštneho vzdelávania, ktoré katastrofy 20. storočia postrkovali sem a tam a vyvolávali striedanie krátkych normálnych období s obdobiami chaosu. ... Medzery v mojom vzdelávaní našťastie neboli nakoniec také osudné, ako by sa dalo očakávať.* ([1], str. 39)

Vo svojich spomienkach Mandelbrot často podrobne opisuje aj politickú a hospodársku atmosféru, spomína: *Moji racionálni a rázni rodičia pozorne sledovali udalosti v Nemecku a v Rusku a dospeli k názoru, že naše vyhliadky v Poľsku sú chmúrne. Poľsko nebola zem, ktorú moji rodičia chceli pre svojich synov.* ([1], str. 46 a 48) Benoit mal o rok mladšieho brata Leóna. Benoitov strýko Szolem bol uznávaným matematikom vo Francúzsku. V roku 1931 nasledoval Benoitov otec Szolema do Paríža a o 5 rokov za ním prišla aj jeho rodina. Nikto neovplyvnil životnú a vedeckú dráhu Benoita Mandelbrota tak významne ako jeho strýko Szolem. Po emigrácii Mandelbrotovcov do Francúzska sa Benoitova matka musela vzdať svojej zubárskej praxe.

2.2 Mladosť vo Francúzsku

Po príchode do Francúzska nastúpili Benoit aj León do miestnej základnej chlapčenskej školy. Neskôr študoval Benoit na parížskom lýceu a v čase vojny na lýceu v Tulle, kde sa Mandelbrotovci skrývali kvôli bezpečnosti. Mandelbrot na toto obdobie spomína: *Dôležitejšia ako škola bola pre mňa knižnica. Ako neformálna knižnica slúžilo tiež katolícke kníhkupectvo. ... Do ruky sa mi dostalo aj niekoľko zastaraných kníh o matematike. V každej z nich žiarilo množstvo ilustrácií rôznych geometrických tvarov, čo neskoršie učebnice z princípu vynechávali. Z týchto starých kníh som si v hlave zostavil celú plejádu tvarov, čo mi potom nesmierne pomohlo v zime roku 1944, keď som sa pripravoval na veľmi ťažké skúšky z matematiky na Lyceé du Parc v Lyone.* ([1], str. 70)

Vyššia stredná škola *college* (študenti medzi 12 a 18 rokom) končila bakalárskou skúškou, ktorá bola formálne prijímacou skúškou do univerzitného systému. Benoit Mandelbrot ju absolvoval ako prvý v histórii školy s vyznamenaním – *summa cum laude. Jeden z dôsledkov mojej brilantne zloženej skúšky prišiel okamžite a jednoznačne: zvýšila sa naša šanca na prežitie. Bolo to nové eso v ruke a záležalo len na tom, ako nám pomôže v zapadnutom Tulle.* ([1], str. 71)

Počas okupácie v rokoch 1940–42 bol život Mandelbrotovcov stále nebezpečnejší. Väčšina židovských rodín v Tulle sa držala pospolu, ale Mandelbrotovci, verní inštinktu konať ináč ako ostatní, sa rozhodli, že bude najlepšie sa rozdeliť: synovia pôjdu spolu a rodičia inam. V tom čase sa objavil človek „Anjel“, pravdepodobne rabín, ktorého Benoitov otec presvedčoval, aby pomohol jeho staršiemu synovi, lebo je veľmi nadaný. Benoit a León sa ukrývali ako učni u nástrojára v Périgueux v blízkosti Tulle. Neskôr našli útočisko v Lyceé du Parc v Lyone. Tam vyučoval profesor matematiky pán Coisard. Benoit spomína: *Na tabuľu vždy napísal veľmi dlhú úlohu, formulovanú jazykom algebry alebo analytickej geometrie, zostavenú tak, aby na jej riešenie boli potrebné absurdne zložité výpočty. Môj vnútorný hlas tú úlohu preformuloval do jazyka geometrie. Opieral* *som sa o zastarané učebnice v ktorých bolo vždy oveľa viac obrázkov ako v knihách súčasných. V nich som sa zoznámil s rozsiahlym súborom veľmi špecializovaných geometrických útvarov všetkého druhu. Dokázal som ich okamžite rozpoznať, aj vtedy keď sa obliekali do analytického hávu, ktorý bol cudzí tak mne ako aj, myslím, ich vlastnej podstate. Začal som vždy rýchlym náčrtkom. ... Požadovaná algebra sa dala vždy doplniť neskôr. Beznádejne ťažké problémy integrálneho počtu sa tak dali redukovať na známe tvary, vďaka ktorým bolo riešenie jednoduché.* ([1], str. 82) Bolo to v zime roku 1944 keď Benoit Mandelbrot stretáva lásku svojho rozumu – geometriu. Zistil, že jeho talent myslieť prostredníctvom geometrických tvarov je prenikavý a spoľahlivý. V roku 1973 sa Mandelbrot stretol so svojím bývalým profesorom Coisardom a on mu prezradil, ako sa márne snažil po večeroch a víkendoch vyhľadať takú úlohu, ktorá sa nedá na počkanie „geometrizovať". Nepodarilo sa mu to.

Odkiaľ sa vo mne také nadanie vzalo? Nedajú sa oddeliť gény od výchovy, ale určité náznaky existujú. Szolem žil dvojaký život – matematika vo všedný deň a maliara v nedeľu. Ja miešam matematiku a výtvarné umenie každý deň. Môj talent pre tvary dozrel vďaka všetkým komplikáciám, ktoré poznamenali moje detstvo a mladosť, a keby som sa vtedy naučil rutinne zaobchádzať so vzorcami, mohlo by to môj dar poškodiť. … Doba strávená na lýceu v Lyone mala na môj život mimoriadne hlboký a trvalý vplyv. ([1], str. 83−84)

Na jeseň roku 1944 prestúpil Mandelbrot na Lyceé Luis-le-Grand v Paríži, aby sa pripravil na prijímacie skúšky na École Normale Supérieure a na École Polytechnique. *Obidve prijímacie skúšky boli úmyselne veľmi ťažké, aby priemer nad 16 bodov z 20 obvykle zvládol len ten najlepší. Vtedy sa hovorilo, že rekord ustanovil okolo roku 1885 Jacques Hadamard, dedkov najváženejší hosť na pamätnej rodinnej večeri vo Varšave a môj duchovný vzor.* ([1], str. 97) Mandelbrot dosiahol na prijímacích skúškach na École Polytechnique 19,75 bodu. Učiteľ matematiky z lýcea sa ho pýtal, ako sa mu podarilo tak rýchlo vypočítať trojný integrál. Mandelbtot odpovedal: *Videl som, že je to objem gule. Najprv sa ale musia zmeniť dané súradnice na iné, ako to podľa mňa naznačovala vnútorná geometria úlohy.* ([1], str. 97) Benoit Mandelbrot prospel na obidvoch školách a musel sa rozhodnúť. Vybral si École Polytechnique, kde bol dlho jedným z mála zahraničných študentov. *Byť zahraničným študentom, ktorý sa nemusel bifľovať, mi ohromne vyhovovalo. Vďaka tomu som získal skvelé vzdelanie v rámci širšieho učebného programu matematických vied, rozhodne to bolo viac ako som potreboval v ďalšej fáze môjho života, v postavení postgraduálneho študenta na kalifornskom Caltechu.* ([1], str. 118)

Medzi učiteľmi matematiky na École Polytechnique boli aj Gaston Julia a Paul Lévy. Obaja Mandelbrota silne ovplyvnili. *Keď som zavádzal pojmy Juliova množina a Lévyho proces vyvolávalo to len prázdne pohľady, dnes sa však pri štúdiu fraktálov používajú dennodenne.* ([1], str. 119) V roku 1917 Gaston Julia vydal prácu *Mémoire sur l´iteration des fonctions rationnelles*. Bourbakiho škola považovala knihu za príliš konkrétnu a kvôli tomu bolo jeho dielo tridsať rokov prehliadané. Súbežne s Gastonom Juliom skúmal iterácie racionálnych funkcií aj Pierre Fatou. *Vtedy by som si nedokázal predstaviť, že o 30 rokov neskôr práve tento odbor vzkriesim novými otázkami, ktoré v ňom prebudia iskru a zaistia mu zaslúženú slávu.* ([1], str. 120) Mandelbrot ich nie len vzkriesil, ale geniálne odhalil ich krásu.

2.3 Štúdium v USA

V roku 1947 profesor aplikovanej matematiky Roger Brard navrhol Mandelbrotovi, aby sa zaoberal mechanikou tekutín a aby išiel na Caltech v Pasadene (predmestí Los Angeles) študovať k Theodorovi von Kármánovi. *Kármán bol kúzelník, ktorý presne* *vedel, ako nájsť takú matematiku, ktorá by zvládla vysokú mieru zložitosti.* ([1], str. 122) Keď prišiel Mandelbrot na Caltech, čakalo ho sklamanie, Kármán externe pôsobil v Paríži. Problematika turbulentného prúdenia začínala odhaľovať svoju komplikovanosť. K výskumu dynamiky tekutín neskôr prispela teória chaosu, vďaka nej sa Mandelbrot k tomuto odboru neskôr vrátil, aby mu pomohol vyvinúť koncept takzvaných multifraktálov. Prednášky zo štatistickej fyziky a termodynamiky viedol Richard Chase Tolman. Mandelbrot o ňom píše: *Možnosť získať vedomosti od skúseného majstra ovplyvnila moju prácu po väčšinu ďalšieho života a obohatila moju diplomovú prácu.* ([1], str. 127) Téma diplomovej práce sa týkala teórie vrtule, zadával ju Frank E. Marble. Na Caltechu chcel Mandelbrot robiť aj doktorát u Paca Axela Lagerstroma, ale po návšteve Kármána sa ich vzťah natoľko zhoršil, že Caltech opustil bez doktorátu.

2.4 Späť vo Francúzsku. Dizertačná práca.

V roku 1950 ako mladý študent matematiky hľadal Benoit Mandelbrot vhodnú tému pre doktorskú dizertáciu na Parížskej univerzite (Sorbonne). Szolem navrhol Benoitovi, aby si ako tému dizertačnej práce zobral Juliovu a Fatouovu teóriu, ktorej sa dnes hovorí kvadratická dynamika. *Snažil som sa zo všetkých síl, ale rýchlo som to vzdal. Vyrovnať sa s kvadratickou dynamikou sa mi podarilo až po tridsiatich rokoch rozvažovania, a objavil som v nej najznámejší symbol – Mandelbrotovu množinu.* ([1], str. 149) Dizertačná práca Mandelbrota mala nakoniec dve časti. Prvá sa týkala všeobecného zákona frekvencie výskytu slov, ktorý objavil lingvista G. K. Zipf. Druhá časť sa týkala štatistickej termodynamiky. Mandelbrot spomína: *V roku 1952 sa na takúto kombináciu pozeralo ako na niečo neuvážene výstredné, navyše prvá časť pojednávala o predmete, ktorý ešte neexistoval a pritom mojím hlavným cieľom bolo vysvetliť Zipfov zákon.* ([1], str. 150) V tom čase boli štipendiá pre postgraduálnych študentov skromné, a tak začal Benoit Mandelbrot pracovať pre Philips Elektronics. Poradil mu to otec, ktorý čoskoro na to (v roku 1951) zomrel na rakovinu.

2.5 Postdoktorandské turné

Postdoktoradské turné začínal Mandelbrot na MIT v Cambridgi. Potom pokračoval u Johna von Neumanna na IAS v Princetone (1953–1954). Nie je možné vymenovať všetky veľké osobnosti, ktoré Mandelbrota ovplyvnili. V jeho autobiografii, ktorá má 319 strán, je približne 112 mien osobností, vedcov, politikov, kolegov. O mnohých Mandelbrot hovorí s veľkou úctou, vďakou alebo láskou. V roku 1954 sa vracia do Paríža a tam spoznáva svoju manželku Aliette. Nasledovalo veľké ženevské turné a v roku 1957 nespokojný a netrpezlivý rebelant začína „skutočný“ pracovný život vysokoškolského učiteľa v Lille a Paríži. Ten však trval len do roku 1958, keď prijal miesto u IBM Reasech v USA.

V tomto období začína plodná fáza Mandelbrotovho života, v ktorej ho čakali najväčšie zázraky objavovania fraktálov. Benoit Mandelbrot pracoval v IBM 35 rokov a zároveň pôsobil na Yale a Harvarde.

3 Mandelbrotova fraktálna geometria

Už v 19. storočí sa matematici začali zaoberať veľmi členitými útvarmi. Vznikali konštrukcie „podivných“ útvarov, ako napríklad v roku 1883 Cantorovo diskontinuum, 1890 Peanova krivka, 1904 Kochova krivka, 1918 Juliove množiny. Tieto konštrukcie boli niektorými matematikmi prijímané s odporom, boli považované za patologické a nazývané matematické „monštrá“. Ale Mandelbrot odhalil ich tajomstvo a ukázal, že logika viedla matematikov bližšie ku skutočnosti, než sami tušili. Matematické „monštrá“ sú vlastne limity postupností množín, ktoré sa vyznačujú opakovaním toho istého vzoru v stále menšom merítku (v kontraktívnom zobrazení). Táto vlastnosť nazývaná samopodobnosť (*selfsimilarity*) je jedným z ústredných pojmov fraktálnej geometrie. Neskôr za pomoci počítačovej grafiky Mandelbrot ukázal, že práce starších matematikov sú zdrojom nových revolučných prístupov a najkrajších fraktálov, aké dnes poznáme. Ich krása je synergiou krásy, ktorú môžeme vidieť, a krásy, ktorú pocítime pri pochopení podstaty nekonečného iteračného procesu ich generovania.

Najdôležitejšou charakteristikou fraktálov je ich fraktálna dimenzia. *Fraktál je množina, ktorej Hausdorffova dimenzia je ostro väčšia ako jej dimenzia topologická.* [5] (Felix Hausdorff, 1868–1942). Pojem *fractal* vytvoril Mandelbrot z latinského slova *fractus*. Preto je často nie celkom správne zamieňaný za pojem „zlomkový". Fraktálna dimenzia nemusí byť neceločíselná. Medzi fraktálmi sú aj množiny s celočíselnou dimenziou. A práve tie sú najzaujímavejšie. Napríklad rovinné krivky ako Peanova krivka, alebo Mandelbrotova množina majú fraktálnu dimenziu 2.

Problematika dimenzie v praxi skrýva ešte jednu zaujímavosť. Body, priamky, roviny, úsečky, krivky, rovinné útvary (napr. štvorec, trojuholník) a priestorové objekty, telesá (napr. kocka, guľa) používame len ako geometrické modely, aproximujúce skutočné objekty s väčšou alebo menšou presnosťou. Mandelbrot vo svojej knihe *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze* [2] hovorí *o fyzikálnej dimenzii, ktorá má pragmatický a teda subjektívny základ. Je vecou stupňa rozlíšenia.* Ako príklad Mandelbrot uvádza klbko nití o priemere 10 cm. *Niť má priemer 1 mm. Pri stupni rozlíšenia 10 m je klbko bod dimenzie nula. Pri stupni rozlíšenia 10 cm je to guľa s dimenziou 3. Pri stupni rozlíšenia 10 mm je to množina nití, teda jednorozmerný útvar. Pri stupni rozlíšenia 0,1 mm sa každá niť stáva valcom, takže začne byť opäť trojrozmerná. Pri rozlíšení 0,01 mm sa každý valec rozpadne na vlákna a všetko sa stane zase jednorozmerným. A na veľmi nízkej úrovni sa klbko stane súborom bodových atómov a všetko sa stane opäť nularozmerným. A tak ďalej, hodnota dimenzie neprestane skákať. Jej číselná hodnota závisí na vzťahu medzi objektom a jeho pozorovateľom.* ([2], str. 18)

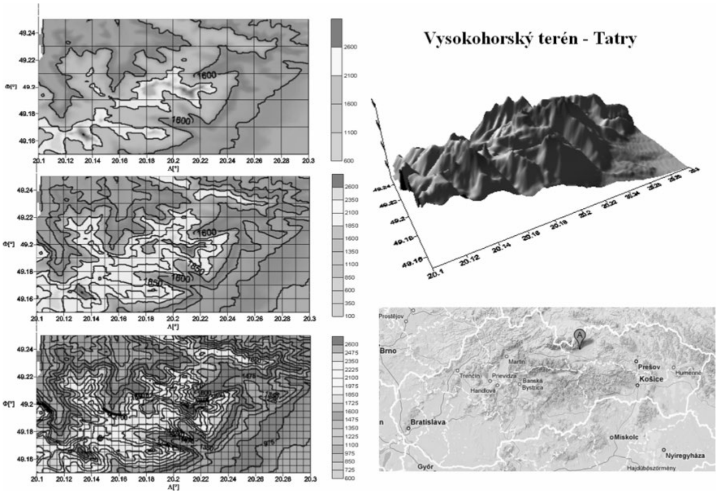
Mandelbrot skompletizoval svoje dovtedajšie vedecké výsledky pomerne v pokročilom veku. Až v roku 1975 vydal knihu *Les Objects fractals: Forme, hasard et dimension*. Mandelbrotovu množinu objavil až vo svojich 55 rokoch. V roku 1982 vydal svoju najslávnejšiu knihu *The Fractal Geometry of Nature*.

3.1 Fraktálna dimenzia krajinných prvkov

Môj otec bol blázon do máp. Naučil som sa od neho čítať v mapách skôr ako som vedel čítať a písať. Jedným z najúžasnejších rysov fraktálov je, že nám umožňujú napodobňovať prírodu. ([1], str. 220) Mandelbrot si všimol, že aj v prírode sú mnohé tvary viac menej invariantné voči zmene merítka.

Krajina chápaná ako komplexný systém je predmetom záujmu rôznych vedeckých oblastí a záujmových skupín. Terminologická jasnosť a presnosť je nevyhnutnou podmienkou interdisciplinárnej spolupráce. Charakter reliéfu je rozhodujúci pri typizácii krajiny, vytvára základnú tvárnosť krajiny, na ktorú sa viažu ostatné prvky a javy. ([3], str. 113) Fraktálna dimenzia umožňuje kvantifikovať a porovnávať členitosť rôznych kriviek či drsnosť rôznych plôch. V prípade presne samopodobných (*strictly self-similar*) množín môžeme fraktálnu dimenziu vypočítať pomocou vzorca, ale krajinné prvky vyskytujúce sa v prírode bývajú iba štatisticky samopodobné (aj to väčšinou len v troch úrovniach rôznych kontrakcií). *Ako určiť fraktálnu dimenziu pre štruktúru, ktorá nie je ani samopodobná a nie je ani „slušnou" krivkou, naopak je „divoká"? V praxi je veľmi často používaná v takýchto prípadoch mriežková (box-counting) metóda.* [5] Skúmaný útvar pokrývame vhodným pokrytím, v závislosti od jeho topologickej dimenzie. Tvar *boxov* býva najčastejšie štvorec alebo kocka. Následne sčítame počet boxov potrebných na pokrytie skúmaného útvaru. V druhom kroku postup zopakujeme, pričom zmenšíme veľkosť *boxov*.

Určenie fraktálnej dimenzie terénu je vhodným doplnkom (kvantifikáciou) zaužívanej typologickej klasifikácie krajiny. ([3], str. 121, obr. č. 1.)



Obrázok č. 1: Typológia krajiny doplnená o fraktálnu dimenziu D = 2,37. [4]

4 Záver

Keby sme do mapy zakreslili životnú púť Benoita Mandelbrota a zohľadnili by sme všetky oblasti vedy, techniky a umenia, do ktorých zasiahla fraktálna geometria, výsledná krivka by mala vysokú fraktálnu dimenziu.

Literatúra

[1] Mandelbrot B.: *Fraktalista. Rebelem ve vědě*, Vydavatelství Dokořán, Praha, 2014.

[2] Mandelbrot B.: *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze*, Mladá fronta, Praha, 2003.

[3] Mészárosová K.: *Fraktály v krajinnej štruktúre*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava, 2011.

[4] Minarechová Z., Mészárosová K.: *Terrain Typology and Fractal Dimension*, In *28. konference o geometrii a grafice, Lednice*, *2008*, JČMF, Praha, 2008.

[5] Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe D.: *Chaos and Fractals*, Springer – Verlag, 1988.

Adresa

RNDr. Katarína Mészárosová, PhD.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Radlinského 11
810 05 Bratislava
e-mail: *katarina@math.sk*

ZOBECNĚNÉ LIMITY

Ivan Netuka

Abstract: This note deals with generalizations of the classical notion of a limit to (some) divergent sequences of real numbers. The method of arithmetic means provides an example of such an extension of the traditional definition. More generally, for an infinite matrix $\mathbb{A}$, the so-called $\mathbb{A}$-limitable sequences are introduced, and the Toeplitz-Silverman theorem is recalled as a sample result concerning matrix transformations of sequences.

Another type of generalized limit is the Banach limit, which arises from the Hahn-Banach theorem. Sequences on which all Banach limits coincide are called almost convergent sequences. This notion, introduced by G. G. Lorentz, continues to be a subject of active investigation today. The relationship between almost convergent sequences and special matrix transformations is also discussed. The exposition is accompanied by comments on the historical development of the subject, basic references to the results discussed, and key sources for the extensive mathematical field of summability theory. Finally, the unusual life story of G. G. Lorentz is briefly summarized.

1. Konvergentní posloupnosti

Nejprve připomeňme jednu z prvních definic ze základů matematické analýzy. Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel je *konvergentní*, jestliže existuje číslo s s touto vlastností: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, platí

$$|x_n - s| \leq \varepsilon.$$

Číslo s je určeno jednoznačně. Nazývá se *limita* posloupnosti $\{x_n\}$ a užívá se pro ni označení $s = \lim_{n\to\infty} x_n$. Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá *divergentní*. Každá konvergentní posloupnost je zřejmě omezená a limita posloupnosti s nezápornými členy je nezáporná. Jestliže všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ jsou rovny 1, potom $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Limita je invariantní vůči posuvu. Podrobněji: jestliže pro posloupnost $x = \{x_n\}$ definujeme

$$S : \{x_1, x_2, \dots\} \mapsto \{x_2, x_3, \dots\} := Sx,$$

potom se limity posloupností Sx a x rovnají. Tedy limita posloupnosti nezávisí na konečně mnoha členech. Snadno se dokáže, že limita součtu dvou konvergentních posloupností je rovna součtu limit a limita násobku konvergentní posloupnosti je rovna násobku limity.

Označme m lineární prostor všech omezených posloupností reálných čísel a c lineární podprostor všech konvergentních posloupností. Potom má zobrazení

$$l : x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x = \{x_n\} \in c,$$

tyto vlastnosti:

- l je lineární funkcionál, tj.
$$l(ax+by)=al(x)+bl(y),\quad x,y\in c,\quad a,b\in\mathbb{R},$$
- l je nezáporný funkcionál, tj. $l(x)\ge 0$ pro každé $x=\{x_n\}\in c$ takové, že $x_n\ge 0$, $n\in\mathbb{N}$,
- $l(Sx)=l(x)$ pro každé $x\in c$,
- $l(x)=1$ pro $x=\{1,1,\dots\}$.

Zřejmě $c\ne m$, např. posloupnost $\{1,0,1,0,\dots\}\notin c$.

2. Metoda aritmetických průměrů

Pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel definujeme posloupnost aritmetických průměrů rovností
$$y_n:=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Není těžké dokázat toto tvrzení:[1] *Je-li* $\{x_n\}$ *konvergentní posloupnost, potom je* $\{y_n\}$ *konvergentní posloupnost a* $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n$. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ konvergentní, pak se posloupnost $\{x_n\}$ nazývá $(C,1)$-*limitovatelná*[2] a číslo $\lim_{n\to\infty}y_n$, označované jako $(C,1)$-$\lim_{n\to\infty}x_n$, se nazývá $(C,1)$-*limita* posloupnosti $\{x_n\}$.

[1] Tvrzení je spojováno se jménem A.-L. Cauchyho (1821); viz [79], str. 72. Regularizující vlastnost aritmetických průměrů se uplatnila při vyšetřování speciálních řad u G. Leibnize (1713), D. Bernoulliho (1777), J. I. Raabeho (1836) a G. Frobenia (1880). Metoda aritmetických průměrů umožňuje přiřadit „limitu“ i některým divergentním posloupnostem nebo, pokud pracujeme s částečnými součty, „součet“ některým divergentním řadám. Teorie limitovacích metod (u řad: sčítacích metod) má dlouhou historii; viz např. [21], [27], [32], [36], [62], [79], [80], [86]. V monografii [86] zaujímá seznam literatury (sázený hustě petitem) 106 stran. V MathSciNet je pod heslem *divergent series* uvedeno 9132 položek, heslo *Banach limit* poskytuje 218 položek a *almost convergence* 286 položek (viz odst. 4 a 6).

[2] Označení $(C,1)$ souvisí se jménem E. Cesàra. V roce 1890 publikoval práci o součinu řad a zobecněnou limitu založenou na aritmetických průměrech definoval explicitně. (Uvažoval i iterované aritmetické průměry, pak se mluví o metodě (C,α).) Cesàrovy limitovací metody jsou studovány zevrubně např. v [6], [14], [27], [45], [83], [86]. V základech matematické analýzy se metoda cesàrovských průměrů vyskytuje alespoň ve dvou souvislostech. Dokazuje se tato věta: *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *je konvergentní řada se součtem* a, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *je konvergetní řada se součtem* b *a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ *je Cauchyův součin těchto řad. Potom posloupnost* $\{s_n\}$ *částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ *je* $(C,1)$-*limitovatelná a platí* $(C,1)$-$\lim_{n\to\infty}s_n=ab$; viz [80], str. 496. Prominentní postavení $(C,1)$-metody mezi limitovacími metodami souvisí s Fourierovými řadami. V roce 1876 sestrojil P. Du Bois-Reymond spojitou 2π-periodickou funkci, jejíž Fourierova řada diverguje alespoň v jednom bodě. V roce 1904 dokázal L. Fejér, že pro každou spojitou 2π-periodickou funkci f a každý bod $x\in\mathbb{R}$ je posloupnost $\{s_n(x)\}$ částečných součtů Fourierovy řady funkce f v bodě x $(C,1)$-limitovatelná a $(C,1)$-$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$. Odtud plyne: pokud Fourierova řada funkce f v bodě x konverguje, pak má „správný“ součet $f(x)$.

Jestliže $x = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$, pak $y_{2n} = \frac{1}{2}$, $y_{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, tedy platí $(C,1)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$, přitom posloupnost $\{x_n\}$ je divergentní.

Na množině Ω posloupností sestávajících z 0 a 1 lze přirozeným způsobem definovat pravděpodobnost a na základě zákona velkých čísel odvodit,[3] že skoro všechny posloupnosti z Ω (tj. všechny až na množinu pravděpodobnosti 0) jsou $(C,1)$-limitovatelné k $(C,1)$-limitě $\frac{1}{2}$.

Přechod od $\{x_n\}$ k $\{y_n\}$ si lze představit jako maticovou transformaci:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & & & \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \dots & & \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, & 0, & \dots & \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & 0, & 0, & \dots \\ \dots & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

3. Maticové limitovací metody

Nechť $\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ je nekonečná matice reálných čísel a nechť $x = \{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Definujeme

$$A_j(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k, \tag{2}$$

pokud řada konverguje. Říkáme, že posloupnost $x = \{x_n\}$ je $\mathbb{A}$-*konvergentní*, jestliže řada v (2) konverguje pro každé $j \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{A_j(x)\}$ je konvergentní (někdy se říká, že posloupnost x je $\mathbb{A}$-*limitovatelná*).[4] Číslo $\lim_{j\to\infty} A_j(x)$ se nazývá $\mathbb{A}$-*limita* posloupnosti x a značí $\mathbb{A}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$.

Matice $\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ se nazývá *regulární matice*, jestliže zachovává konvergenci a zachovává limitu, tedy jestliže každá konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ je $\mathbb{A}$-konvergentní a $\mathbb{A}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Věta. *Matice $\mathbb{A}$ je regulární matice, právě když*[5]

[3] Výsledek je dokázán v [12].

[4] Cesàrova metoda je prototypem maticových limitovacích metod. Často se mluvívá o sčítacích metodách (summability methods), neboť historicky vzato sloužily většinou jako nástroj k přiřazování „součtu“ divergentním řadám. Sčítací metodou se tak samozřejmě rozumí limitovací metoda aplikovaná na částečné součty řady. Označme $c_{\mathbb{A}}$ množinu všech $\mathbb{A}$-limitovatelných posloupností (*obor konvergence matice* $\mathbb{A}$). A. Wilansky v [83] na str. 3 uvádí: *By a historical accident sequences in $c_{\mathbb{A}}$ are called $\mathbb{A}$-summable instead of more reasonable $\mathbb{A}$-limitable.* V literatuře je vyšetřováno velké množství různých limitovacích metod (maticových i jiného typu); viz např. [6], [7], [8], [14], [24], [27], [45], [54], [57], [58], [60], [75], [86]. Např. v monografii [86] lze nalézt na str. 307–308 seznam 98 metod.

[5] Věta pochází od L. L. Silvermana a O. Toeplitze z roku 1911. Je považována za počátek obecné teorie $\mathbb{A}$-limitovacích metod. Do té doby se matematici soustřeďovali na konkrétní, speciální matice

- $\sup \{\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| : j \in \mathbb{N}\} < \infty$,
- *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí* $\lim_{j\to\infty} a_{jk} = 0$,
- $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 1$.

S příkladem regulární matice jsme se již setkali u metody aritmetických průměrů.

Pro regulární matici $\mathbb{A}$ tedy $\mathbb{A}$-limita představuje zobecněnou limitu, která může existovat pro určité divergentní posloupnosti.

Nabízí se přirozená otázka: jsou všechny omezené posloupnosti $\mathbb{A}$-limitovatelné pro vhodnou regulární matici $\mathbb{A}$? Odpověď je negativní:[6] *je-li* $\mathbb{A}$ *regulární matice, potom existuje posloupnost* x *se členy* 0 *nebo* 1 *taková, že* x *není* $\mathbb{A}$-*konvergentní.* V tomto smyslu je regulární maticová limitovací metoda vhodná pro některé, ale ne všechny, omezené posloupnosti.

4. Banachova limita

Na první pohled se může zdát pozoruhodné, že existuje zobecnění klasické limity známé pro prostor c konvergentních posloupností přiřazující „limitu" *každé* posloupnosti z prostoru m omezených posloupností s reálnými členy.

Nechť $L : m \to \mathbb{R}$ je zobrazení s těmito vlastnostmi:

- L je lineární funkcionál,
- L je nezáporný funkcionál,
- L je invariantní vůči posuvu, tj. $L(Sx) = L(x)$ pro každé $x \in m$,
- $L(x) = 1$ pro $x = \{1, 1, 1, \dots\}$.

Funkcionál L se nazývá *Banachova limita.*[7] Uvedené podmínky představují přirozené požadavky, které by pojem zobecněné limity měl splňovat. Přitom podmínka

$\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$. Původní důkaz užívá prostředky elementární analýzy (někdy se mluví o metodách „hard analysis") a není snadný. Za určitý senzační průlom se považuje elegantní důkaz, který S. Banach zařadil do monografie [3], str. 90. Je založen na metodách funkcionální analýzy (někdy se mluví o metodách „soft analysis"); důkaz lze nalézt např. v [49], str. 96. Banachův přístup odstartoval široce rozvinutý program užití metod funkcionální analýzy v problematice limitovacích metod; viz např. [5], [6], [24], [34], [41], [42], [45], [65], [81], [82], [83].

[6] Výsledek pochází od H. Steinhause z roku 1909. Steinhausův důkaz je uveden v [14]. Elegantní důkaz založený na vlastnostech spojitosti funkcí 1. Baireovy třídy lze nalézt v [11]; viz [49], str. 96. V [55] je dokázáno, že pro každou regulární matici $\mathbb{A}$ existuje posloupnost sestávající z 0 a 1 neobsahující žádnou trojici za sebou jdoucích 0 nebo za sebou jdoucích 1, která není $\mathbb{A}$-limitovatelná.

[7] Abstraktní analýze se dostalo širokého uznání mj. díky řešení řady problémů, které pocházejí z klasické matematické analýzy. V monografii [3], str. 29–34, aplikoval S. Banach Hahnovu-Banachovu větu na důkaz existence zobecnění integrálu definovaného pro všechny omezené reálné funkce, konečně aditivní míry definované na všech podmnožinách $\mathbb{R}$ a limity v ∞ pro všechny omezené funkce definované na $[0, \infty)$. Jako důsledek dokázal existenci zobecněné limity pro všechny omezené posloupnosti reálných čísel, později nazývané Banachova limita. Nerovnosti (3) byly již dříve dokázány S. Mazurem; viz [3], str. 34. Poznamenejme, že požadavek invariance vůči posuvu nabízí zobecnění pro jiné druhy transformací na posloupnostech; viz např. [16], [19], [52], [63], [69],

$L(Sx) = L(x)$, $x \in m$, (invariance vůči posuvu) ukazuje, že na hodnotu $L(x)$ nemá vliv konečný počet členů.

Připomeňme nejprve definici lim inf a lim sup:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n : n \geq k\},$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n : n \geq k\}.$$

Všimněme si, že posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel je konvergentní, právě když $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ a tato společná hodnota je konečná. Pro posloupnost $\{x_n\}$ se pak tato společná hodnota rovná $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Nechť L je Banachova limita. Dokážeme, že

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad x = \{x_n\} \in m\,. \tag{3}$$

Odtud dostaneme, že $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ pro každou posloupnost $x = \{x_n\} \in c$, takže Banachova limita je skutečně zobecněním klasického pojmu limity.

Dokážeme první nerovnost v (3). Nejprve dokážeme nerovnost

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq L(x), \quad x = \{x_n\} \in m. \tag{4}$$

Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme $j \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq x_j \leq \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} + \varepsilon\,.$$

Potom $x_n + \varepsilon - x_j \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, tudíž

$$L(x) + \varepsilon \geq x_j \geq \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Odtud plyne (4). Protože L je invariantní vůči posuvu, platí pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$\inf\{x_n : n \geq k\} \leq L(x)\,,$$

takže

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x)\,.$$

Podobně se dokáže druhá nerovnost z (3).

Vidíme, že každá Banachova limita je nezáporné lineární rozšíření funkcionálu $l : x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ z podprostoru c na prostor m, které je invariantní vůči posuvu.

Stojíme před dvěma důležitými otázkami:

- existuje Banachova limita?
- je Banachova limita určena jednoznačně?

---

[70], [76]. Banachova limita je intenzivně studovaným tématem až do dnešních dnů; namátkou uveďme [1], [22], [26], [33], [53], [71], [76], [77], [84], [85]. Četné výsledky z pohledu geometrie Banachových prostorů (zejména týkající se extremálních bodů konvexní množiny všech Banachových limit) lze nalézt např. v [2], [56], [71], [72], [76], [78]. Matematiky dlouhodobě zajímá, jak souvisí Banachova limita s maticovými limitovacími metodami. Viz např. [15], [20], [22], [45], [54], [68], [73], [84].

Určitě se všechny Banachovy limity shodují na posloupnosti $x = \{1, 0, 1, \dots\}$. Platí totiž $1 = L(x + Sx) = L(x) + L(Sx) = 2L(x)$, tudíž $L(x) = \frac{1}{2}$ pro každou Banachovu limitu L. Obecněji, jak ukážeme v odst. 6, pro každou $(C,1)$-konvergentní posloupnost $x = \{x_n\}$ a každou Banachovu limitu L platí $L(x) = (C,1)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$.

Patrně stojí za zmínku, proč jsme v odst. 1 nezdůraznili, že pro konvergentní posloupnosti je limita součinu rovna součinu limit. Analogie totiž neplatí pro žádnou Banachovu limitu L. Je-li např. $x = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ a $y = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$, pak platí $\frac{1}{2} = L(x) = L(Sx) = L(y)$, tudíž $L(x) \cdot L(y) = \frac{1}{4}$ a $L(x \cdot y) = L(0) = 0$. Požadovat na přirozeném zobecnění limity multiplikativitu možné není.

5. Existence Banachovy limity

Problém existence Banachovy limity spočívá v důkazu existence rozšíření lineárního funkcionálu

$$l : x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n,\ x = \{x_n\} \in c$$

na lineární funkcionál L definovaný na celém prostoru m, přičemž rozšíření má být nezáporné a invariantní vůči posuvu.

Klíčem[8] k takovému rozšíření je

Hahnova-Banachova věta.[9] *Nechť X je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ a $p : X \to \mathbb{R}$ je funkcionál splňující*

$$p(x + y) \le p(x) + p(y),\ p(ax) = ap(x),\ x, y \in X,\ a \ge 0. \tag{5}$$

Nechť Y je lineární podprostor prostoru X a $f : Y \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál, pro nějž $f \le p$ na Y.

Potom existuje lineární funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ takový, že $F_{|Y} = f$ a $F \le p$ na X. Platí $-p(-x) \le F(x) \le p(x)$, $x \in X$.

Pro další úvahy se nám bude hodit tento

[8] Tradičně se existence Banachovy limity dokazuje pomocí Hahnovy-Banachovy věty. Existují však i jiné přístupy, založené např. na Tichonovově větě o kompaktnosti topologického součinu či na pojmu slabé* kompaktnosti; různé důkazy lze nalézt v [1], [5], [16], [43], [77]. Metody nestandardní analýzy byly při zkoumání existence zobecněné limity uplatněny v [64]. Měli bychom poznamenat, že důkazy existence se v té či jiné formě opírají o axiom výběru a v tomto smyslu je Banachova limita zcela vzdálena jakémukoli „konstruktivnímu“ přístupu.

[9] Hahnova-Banachova věta je pilířem lineární funkcionální analýzy. Historicky je cesta k této větě složitá a je zejména spojena se jmény F. Riesze, E. Hellyho, H. Hahna a S. Banacha. Dokonale ilustruje, jak abstraktní matematické výsledky vyrůstají z podhoubí studia konkrétních problémů. Zde se omezíme pouze na odkazy na základní práce, které se historii i různým aspektům Hahnovy-Banachovy věty věnují; viz [9], [10], [17], [23], [28], [29], [31], [32], str. 403, [36], str. 1090, [44], [46], [47], [48], [50], [61], [67], [74]. V monografii [61], str. 40, A. Pietsch napsal k opomíjené roli E. Hellyho na cestě za větou v literatuře spojovanou jen se jmény Hahna a Banacha toto: *In recognition of Helly's merits it would be fair to speak of the Helly-Hahn-Banach theorem. But, I am afraid that this proposal comes too late. As an ersatz, let us pause for standing ovation.*

Dodatek.[10] Nechť $x_0 \in X \setminus Y$. Definujme

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sup\{f(y) - p(y - x_0) : y \in Y\}, \\ \beta &:= \inf\{p(y + x_0) - f(y) : y \in Y\}. \end{aligned}$$

Potom $\alpha \leq \beta$ a pro každé $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existuje lineární funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ takový, že $F_{|Y} = f$, $F \leq p$ na X a $F(x_0) = \gamma$.

Pro důkaz existence Banachovy limity budeme Hahnovu-Banachovu větu aplikovat v situaci $X = m$, $Y = c$, $f = l$ (limita) a

$$p : x \mapsto \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(x_1 + \cdots + x_n\big),\ x = \{x_n\} \in m. \tag{6}$$

Jestliže $x = \{x_n\} \in c$, je

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(x_1 + \cdots + x_n\big) = p(x).$$

Z vlastností lim sup plyne, že p splňuje (5).

Nechť $L : m \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál takový, že $L_{|c} = l$ a $L \leq p$ na m. Potom

$$-p(-x) \leq L(x) \leq p(x),\ x \in m.$$

Je-li $x = \{x_n\} \in m$, $x_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak

$$-p(-x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(x_1 + \cdots + x_n\big) \geq 0,$$

tudíž $L(x) \geq 0$. Pro každé $x \in m$ je

$$L(x) - L(Sx) = L(x - Sx) \leq p(x - Sx) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(x_1 - x_{n+1}\big) = 0,$$

neboli $L(x) \leq L(Sx)$. Protože

$$-L(x) = L(-x) \leq L(S(-x)) = -L(Sx),$$

platí $L(x) \geq L(Sx)$, tudíž $L(Sx) = L(x)$.

Zároveň jsme ukázali, že existuje Banachova limita L taková, že

$$L(x) = (C,1)\text{-} \lim_{n\to\infty} x_n \tag{7}$$

pro každou $(C,1)$-konvergentní posloupnost.

Zatím však není zřejmé, zda rovnost (7) platí pro všechny Banachovy limity. Dostáváme se tak k zásadní otázce: na kterých posloupnostech hodnoty všech Banachových limit splývají?

Ještě jedna poznámka. S ohledem na nerovnosti (3) by se zdálo, že by stačilo zvolit jako „kontrolní“ funkcionál $p : x \mapsto \limsup_{n\to\infty} x_n$, $x = \{x_n\} \in m$. Takový funkcionál splňuje podmínky (5) a tedy Hahnovu-Banachovu větu lze aplikovat. Selhal by však důkaz invariance vůči posuvu.

[10] Podstatná část důkazu věty i dodatku je uvedena v odst. 8.

6. Skoro konvergentní posloupnosti

Volba „kontrolního“ funkcionálu p z (6) dává existenci Banachovy limity, ale neříká nic o všech Banachových limitách. Budeme proto uvažovat jiný „kontrolní“ funkcionál.[11] Pro $x = \{x_n\} \in m$ definujeme

$$q(x) := \inf \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_{r_j+n} \Big\},$$

kde infimum se bere přes všechna $k \in \mathbb{N}$ a $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$. Potom[12]

$$q(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n ,$$

$$q(x+y) \le q(x) + q(y),\ \ q(ax) = aq(x),\ \ x, y \in m,\ \ a \ge 0 .$$

Pomocí dodatku k Hahnově-Banachově větě se dokáže, že pro každou Banachovu limitu $\widetilde{L}$ platí $-q(-x) \le \widetilde{L}(x) \le q(x)$, $x \in m$. Nyní se Hahnova-Banachova věta aplikuje na $X = m$, $Y = c$, $f = l$ (limita) a $p = q$ a dokáže se, že každé rozšíření funkcionálu l s „kontrolou“ q splňuje požadavky z definice Banachovy limity.

Vyjádření „kontroly“ q lze zjednodušit,[13] platí totiž

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j : k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Odtud plyne následující výsledek.

Věta.[14] *Nechť $x = \{x_n\} \in m$, $s \in \mathbb{R}$. Potom hodnoty všech Banachových limit na x splývají a rovnají se s, právě když*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(x_{k+1} + \cdots + x_{k+n}\big) = s \tag{8}$$

stejnoměrně vzhledem ke $k \in \mathbb{N}$.

Podrobněji: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \ge r$ a všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\Big| \frac{1}{n}\big(x_{k+1} + \cdots + x_{k+n}\big) - s \Big| \le \varepsilon .$$

---

[11] Funkcionál tohoto typu pochází od S. Banacha; viz [3], str. 30.

[12] Podrobnosti k důkazu vlastností funkcionálu q lze nalézt např. v [24], str. 64–68. V literatuře se pro důkaz existence Banachovy limity užívají i jiné funkcionály; viz např. [45], str. 39, [73], [77], [86], str. 12.

[13] Toto přehlednější vyjádření funkcionálu q je odvozeno v [76].

[14] Výsledek pochází od G. G. Lorentze ještě z doby jeho pobytu v Leningradu; viz [37]. Zásadní význam pro studium skoro konvergentních posloupností má Lorentzova práce [38]. Podrobné hodnocení Lorentzova přínosu k limitovacím metodám lze nalézt v příspěvku „G. G. Lorentz and the theory of summability“ uveřejněném v [40], str. 41–57. Další informace lze nalézt v příspěvku „My autobiography“ (G. G. Lorentz) zahrnutém do [40], str. xvii–xxv. Viz také [39], [51].

Omezené posloupnosti, na nichž hodnoty všech Banachových limit splývají, se nazývají *skoro konvergentní posloupnosti.*[15] Lineární prostor všech skoro konvergentních posloupností se značí $\widehat{c}$. Z (8) je ihned vidět, že např. posloupnost

$$\{1, 00, 111, 0000, 11111, \dots\}$$

není skoro konvergentní. Máme tedy $c \subset \widehat{c} \subset m$ a $c \neq \widehat{c} \neq m$. Je známo, že $\widehat{c}$ je neseparabilní uzavřený podprostor prostoru m, který je invariantní vůči posuvu, tj. pro $x \in \widehat{c}$ je $Sx \in \widehat{c}$. Všimněme si, že každá skoro konvergentní posloupnost je $(C, 1)$-limitovatelná.

Z pohledu teorie pravděpodobnosti (viz závěr odst. 2) skoro žádná posloupnost sestávající z 0 a 1 není skoro konvergentní.[16] Z tohoto hlediska není, narozdíl od $(C, 1)$-limitovací metody, pojem zobecněné limity založený na „skoro konvergenci“ efektivní.

7. Banachova limita a maticové limitovací metody

Na skoro konvergentních posloupnostech se (podle definice) hodnoty všech Banachových limit rovnají. Pro $x = \{x_n\} \in \widehat{c}$ definujeme $f\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ jako $L(x)$ pro libovolnou Banachovu limitu L.

Nyní nás zajímá souvislost pojmu skoro konvergentní posloupnosti s maticovými limitovacími metodami.

Pro matici $\mathbb{A}$ označme $c_{\mathbb{A}}$ množinu všech omezených posloupností, které jsou $\mathbb{A}$-limitovatelné ($c_{\mathbb{A}}$ se nazývá *obor* $\mathbb{A}$-*konvergence*). Můžeme se ptát, zda existuje regulární matice $\mathbb{A}$ taková, že $\widehat{c} = c_{\mathbb{A}}$ a zda $f\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbb{A}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. Odpověď je negativní. Dokonce se ví,[17] že $\widehat{c}$ není průnikem oborů konvergence žádného spočetného systému regulárních matic.

V této souvislosti je zajímavá tato otázka: jak vypadají matice $\mathbb{A}$, pro něž je každá skoro konvergentní posloupnost $\mathbb{A}$-limitovatelná?

Budeme říkat, že matice $\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ je *silně regulární*,[18] jestliže platí $\widehat{c} \subset c_{\mathbb{A}}$.

---

[15] Lorentzův původní termín byl „absolutně konvergentní posloupnost“; viz [37]. Termín „skoro konvergentní“ (almost convergent) pochází z Lorentzovy průkopnické práce [38]. Podrobný výklad o $\widehat{c}$ je obsažen v [45], str. 42–46. Skoro konvergentním posloupnostem se dostalo pozornosti ze strany řady matematiků. Viz např. [35], [45], [84], [85], kde lze nalézt další odkazy.

[16] Výsledek je dokázán v [12].

[17] Toto jsou výsledky z [38]. Tamtéž jsou vyšetřovány vztahy maticových limitovacích metod a skoro konvergentních posloupností. Je mj. dokázána inkluze $\widehat{c} \subset c_{\mathbb{A}}$ pro všechny konkrétní „rozumné“ maticové metody (např. (C, α), Eulerova metoda).

[18] Tento pojem zavedl G. G. Lorentz v [38]. Studium skoro konvergentních posloupností a silně regulárních matice je předmětem matematického bádání do současnosti; viz např. [5], [25], [45], str. 50–54, [84], [85].

Věta.[19] *Regulární matice* $\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ *je silně regulární, právě když*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk} - a_{j,k+1}| = 0\,. \tag{9}$$

Pokud platí rovnost (9), je $f\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbb{A}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ *pro každou posloupnost* $x = \{x_n\} \in \widehat{c}$.

Např. matice z (1) pro $(C,1)$-limitovatelné posloupnosti je silně regulární matice, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk} - a_{j,k+1}| = \frac{1}{j},\ j \in \mathbb{N}\,,$$

tudíž platí (9). Poznamenejme, že existují[20] regulární matice $\mathbb{A}$, pro něž $c_{\mathbb{A}} \subset \widehat{c}$, tedy všechny skoro konvergentní posloupnosti nejsou $\mathbb{A}$-limitovatelné.

Pro charakterizaci $\widehat{c}$ pomocí maticových limitovacích metod je důležité následující tvrzení[21] (*pozitivní matice* znamená, že její prvky jsou nezáporné).

Lemma. *Nechť* $x = \{x_n\} \in m$. *Potom existují pozitivní silně regulární matice* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ *takové, že*

$$\sup\{L(x) : L \text{ Banachova limita}\} = \mathbb{A}_1\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

$$\inf\{L(x) : L \text{ Banachova limita}\} = \mathbb{A}_2\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Na základě tohoto lemmatu lze dokázat následující výsledek.

Věta.[22] *Nechť* $x = \{x_n\} \in m$ *a* $s \in \mathbb{R}$. *Potom* $f\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = s$, *právě když* $\mathbb{A}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = s$ *pro každou pozitivní silně regulární matici. Jinak řečeno,*

$$\widehat{c} = \bigcap \{c_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \text{ pozitivní silně regulární matice}\}\,.$$

---

[19] Věta představuje jeden ze stěžejních výsledků práce [38].

[20] Lorentz v [38] mluví o metodě F a o F-limitě (v textu užíváme dnes běžnější označení f-lim, které pochází od P. Durana z roku 1972). Z [38] citujeme: *In spite of the fact that the method F contains certain regular matrix method … it is fairly weak. We shall show that it is contained in every „reasonable“ matrix method. Almost convergence is a generalization of ordinary convergence. From this point of view the method F seems to be rather akin to the ordinary convergence than to commonly used matrix methods. We shall therefore designate methods which sum all almost convergent sequences as strongly regular.*

[21] Výsledek pochází z práce [18].

[22] Charakteristika je dokázána v [18], kde lze nalézt další příbuzné výsledky.

8. K důkazu Hahnovy-Banachovy věty

Budeme užívat značení z odst. 5. První krok v důkazu Hahnovy-Banachovy věty spočívá (pro $x_0 \notin Y$) v rozšíření lineárního funkcionálu f z Y na lineární obal $\widetilde{Y} := \mathrm{Lin}(Y \cup \{x_0\})$. Každý prvek z $\widetilde{Y}$ lze jednoznačně vyjádřit v tvaru $y + ax_0$, kde $y \in Y$ a $a \in \mathbb{R}$.

Pro každé dva body $y_1, y_2 \in Y$ platí podle (5)

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \le p(y_1 + y_2) \le p(y_1 - x_0) + p(x_0 + y_2)\,,$$

neboli

$$f(y_1) - p(y_1 - x_0) \le p(y_2 + x_0) - f(y_2),\ \ y_1, y_2 \in Y\,.$$

Položíme-li

$$\alpha := \sup\{f(y) - p(y - x_0) : y \in Y\}\,,$$

$$\beta := \inf\{p(y + x_0) - f(y) : y \in Y\}\,,$$

platí $\alpha \le \beta$. Zvolme $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$f(y) - \gamma \le f(y) - \alpha \le p(y - x_0),\ \ y \in Y\,, \tag{10}$$

$$f(y) + \gamma \le f(y) + \beta \le p(y + x_0),\ \ y \in Y\,. \tag{11}$$

Definujme

$$\widetilde{f}(y + ax_0) = f(y) + a\gamma,\ y \in Y,\ a \in \mathbb{R}.$$

Potom $\widetilde{f} = f$ na Y, $\widetilde{f}(x_0) = \gamma$ a zřejmě $\widetilde{f}$ je lineární funkcionál na $\widetilde{Y}$. Je-li $\widetilde{a} > 0$, pak z (10) dostáváme (dosadíme $y/\widetilde{a}$ za y)

$$(1/\widetilde{a})f(y) - \gamma \le p(y/\widetilde{a} - x_0)$$

a z (11) dostáváme (dosadíme $y/\widetilde{a}$ za y)

$$(1/\widetilde{a})f(y) + \gamma \le p(y/\widetilde{a} + x_0)\,.$$

Vidíme, že pro každé $\widetilde{a} > 0$ a každé $y \in Y$ je

$$f(y) - \widetilde{a}\gamma \le p(y - \widetilde{a}x_0)\,,$$

$$f(y) + \widetilde{a}\gamma \le p(y + \widetilde{a}x_0)\,.$$

Odtud plyne pro každé $y \in Y$ a každé $a \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(y + ax_0) = f(y) + a\gamma \le p(y + ax_0)\,.$$

(pro $a > 0$ jsme uvažovali $\widetilde{a} = a$, pro $a < 0$, jsme uvažovali $\widetilde{a} = -a$).

Je-li $\widetilde{Y} = X$, je $\widetilde{f}$ kýžené rozšíření. Pokud $\widetilde{Y} \neq X$, můžeme uvedeným postupem zkonstruovat další rozšíření a mohlo by se zdát, že výsledný funkcionál F lze získat matematickou indukcí. Pro obecně „velký“ prostor X to možné není a je třeba užít některý z mocných množinově-teoretických nástrojů,[23] jako jsou (podle osobní preference) např. transfinitní indukce, Zornovo lemma či Hausdorffův princip maximality.

Poznamenejme, že pokud X je normovaný lineární prostor na $\mathbb{R}$ a $f : Y \to \mathbb{R}$ je spojitý lineární funkcionál, potom existuje spojitý lineární funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ takový, že $F_{|Y} = f$ a $||F|| = ||f||$.[24] To plyne z naší algebraické verze Hahnovy-Banachovy věty, pokud se definuje

$$p(x) := ||f|| \cdot ||x||, \ x \in X \, .$$

9. G. G. Lorentz (1910–2006)

G. G. Lorentz sehrál důležitou roli v rozvoji matematické analýzy 20. století. Zasáhl takřka do všech jejích oblastí. Jmenujme např. prostory funkcí, reálnou, funkcionální a numerickou analýzu, teorii aproximace, interpolační metody, sčítatelnost.

Jeho životní dráha[25] odráží hořká období dějin 20. století. Je svědectvím o nezdolnosti lidského ducha, o vnitřní síle, odvaze i charakterové integritě.

Georg (Jurij) Rudolfovič Lorenc se narodil v Sankt Petěrburgu v roce 1910. Jeho otec[26] měl německé kořeny, matka pocházela z rozvětvené ruské rodiny šlechtického původu. V roce 1913 se rodina přestěhovala do Armaviru na Severním Kavkazu. Revoluční doba a občanská válka zřetelně poznamenaly tamější život. V letech 1919 až 1922 se rodina uchýlila na statek poblíž Soči, později se přestěhovala do Tbilisi. Tam Georg nejprve navštěvoval ruskou školu, v letech 1924 až 1926 studoval na německé střední škole, kde si osvojil vynikající znalost němčiny (doma se mluvilo rusky). V roce 1926 se stal posluchačem tbiliské techniky, po dvou letech přešel na Mechanicko-matematickou fakultu Leningradské univerzity.[27] Tam působili matematici zvučných jmén a navzdory mocenským zásahům matematická úroveň byla

[23] Viz např. [3], str. 29, [13], str. 82, [30], str. 212, [66], str. 56. Ekvivalence axiomu výběru, Hausdorffova principu maximality, Zornova lemmatu a věty o dobrém uspořádání je dokázana v [30], str. 14. V [3] se uvažují výhradně lineární prostory nad tělesem reálných čísel. Zobecnění Hahnovy-Banachovy věty pro případ lineárních prostorů nad tělesem komplexních čísel se obvykle připisuje H. F. Bohenblustovi, A. Sobczykovi a G. S. Sukhomlinovi; viz [66], str. 375. Priorita pražského matematika H. Lowiga je široce opomíjena; viz [4].

[24] Připomeňme definici normy funkcionálu: $||f|| := \sup\{|f(x)| : x \in X, \, ||x|| \leq 1\}$.

[25] Zde se soustředíme jen na životní osudy. Informace jsme čerpali zejména z [40], [51], [59]. Hodnocení matematického díla je zachyceno např. v [39], [40], [51] a [59].

[26] Otec pracoval pro státní železnice. V roce 1906 odmítl účast na potlačení stávky železničářů nedaleko Sankt Petěrburgu, kde pracoval, z veřejných služeb musel odejít a působil v kavkazské oblasti, kde většina železnic byla v soukromých rukou.

[27] Podrobná zpráva o situaci fakulty je v příspěvku G. G. Lorentz: *A Report on the University of Leningrad*; viz [40], str. 3–16.

velice dobrá. Direktivní řízení však nepřálo čisté matematice, patrný byl povinný důraz na aplikace. Například teorie reálných funkcí byla považována za reakcionářskou disciplínu, komplexní funkce za progresivní. Když G. R. Lorenc[28] v roce 1931 ukončil studium, z 26 absolventů bylo jen 6 matematiků, ostatní studovali praktičtěji orientovanou mechaniku. V letech 1930 až 1933 nastaly zlé časy. Matematické společnosti v Leningradě i Moskvě byly rozpuštěny, vynikající osobnosti byly nahrazeny politicky oddanými osobami. Lorenc se nemohl stát aspirantem,[29] získal místo asistenta na univerzitě a později také na pedagogickém institutu. Úvazek 20 hodin týdně neposkytoval příliš času na vědeckou činnost. Lorenc neměl školitele, do sepisování kandidátské práce[30] se vrhl bez vedení. V roce 1936 získal vědeckou hodnost kandidáta věd[31] na základě práce o Bernsteinových polynomech. V témže roce byl jmenován docentem a na obou leningradských školách působil do roku 1942. V seminářích se vzdělával v topologii a funkcionální analýze, publikoval několik prací z klasické analýzy věnovaných speciálním polynomům a sčítatelnosti. Na konci třicátých let začal pracovat na učebnici funkcionální analýzy, kterou však v důsledku tíživých událostí nikdy nedokončil.

V roce 1937 byl Lorencův otec v Tbilisi zatčen na základě falešného obvinění a odsouzen k osmi letům vězení. O rok později zahynul v gulagu. Mimořádně kruté časy pro Lorence nastaly v letech 1941 až 1942 v době blokády Leningradu. Uniknout z Němci obleženého města bylo krajně nesnadné, životní podmínky ve městě byly kritické. Lorenc a jeho žena se nakonec s několika kolegy vydali v dubnu 1942 přes stále ještě zamrzlé Ladožské jezero a po týdny trvající anabázi se dostali do Kislovodsku na Severním Kavkazu. V srpnu 1942 sovětská armáda bez boje opustila Kislovodsk. Němečtí okupanti zaregistrovali Lorence a jeho ženu jako etnické Němce. Obrat ve válečné situaci po bitvě u Stalingradu znamenal ústup německých vojsk a Lorencovi opustili v početné skupině uprchlíků v lednu 1943 Kislovodsk. Po strastiplné cestě se dostali do uprchlického tábora v polské Toruni. Lorenc kontaktoval profesora K. Knoppa z univerzity v Tübingenu a zaslal mu do časopisu Mathematische Zeitschrift dva články. Profesoři K. Knopp a W. Süss měli zásluhu na tom, že se Lorenc, jeho žena a syn dostali v roce 1944 do Tübingenu, naštěstí do oblasti vzdálené sovětskému dosahu a vlivu.

V Tübingenu získal doktorát z matematiky a habilitoval se, spolupracoval s německým matematikem E. Kamkem. Po válce však francouzské okupační autority, kterým připadla správa zóny, do níž patřil i Tübingen, pohlížely na Lorence jako na nežádoucího cizince, pravděpodobně sovětského občana a tudíž mu hrozilo, že bude deportován zpět do rodné vlasti. Proto se v roce 1946, zatím bez rodiny,[32] přemístil do americké okupační zóny. V Heidelbergu mu americký důstojník z úřadu pro

[28] V obavě z možného prozrazení jeho leningradské identity se od roku 1946 psal jako Georg Gunter Lorentz (později užíval G. G. Lorentz).

[29] Dnes bychom řekli, že nebyl přijat na Ph.D. studium.

[30] Zhruba odpovídá Ph.D. disertaci.

[31] Přibližně lze srovnat s akademickým titulem Ph.D.

[32] Zatímco syn Rudolf se narodil „na cestě“ z Ruska do Německa, jeho čtyři sestry (Mary, Irene, Olga a Katherine) se narodily v Tübingenu.

uprchlíky vydal dokument jako občanovi bez státní příslušnosti.[33] G. G. Lorentz působil jako docent tři semestry ve Frankfurtu, často se však vracel do Tübingenu. Do roku 1948 publikoval dvacítku prací.

Blízkost sovětské okupační zóny a situace poválečného Německa přiměly Lorentzovu rodinu k úvahám o emigraci. Roku 1949 G. G. Lorentz přijal stipendium od Lady Davis Foundation a přesídlil s rodinou do kanadského Toronta. Na tamější univerzitě začínal sice jako asistent (instructor), mohl se však věnovat matematice, i když za cenu velmi skromných podmínek pro celou rodinu. V roce 1953 získal místo profesora na Wayne State University v Detroitu v USA. V letech 1958 až 1968 působil na Syracuse University. Poslední akademický post přijal na University of Texas v Austinu, kde setrval až do svého penzionování v roce 1980. Matematiku ani pak neopustil. V letech 1980 až 1993 publikoval třicítku prací.[34]

G. G. Lorentz je autorem či spoluautorem šesti monografií a 130 vědeckých článků. Byl vědcem vynikajících kvalit, řada z jeho sedmnácti Ph.D. studentů získala mezinárodní reputaci. Ovlivnil výrazně vývoj a směřování matematiky v minulém století. Jeho „tři životy“ (Rusko/Sovětský svaz, Německo, Kanada/USA) poskytují nevšední příběh. Smutný příběh, naštěstí s dobrým koncem.

Literatura

[1] Appell J., De Pascale E., Zabrejko P. P., *Some remarks on Banach limits*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **42** (1992), 273–278.

[2] Baker J. W., Petersen G. M., *Extremal points in summability theory*, Compositio Math. **17** (1965), 190–206.

[3] Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, vol. 1, Warszawa, 1932.

[4] Bečvářová M. a kol., *Zapomenutý matematik Henry Lowig (1904–1995)*, edice Dějiny matematiky, sv. 50, Matfyzpress, Praha, 2012.

[5] Bennett G., Kalton N. J., *Consistency theorems for almost convergence*, Transactions of the American Mathematical Society **198** (1974), 23–43.

[6] Boos J., *Classical and modern methods in summability*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[7] Broudno A. L., *Sommation des suites bornées par les méthodes linéaires régulières*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) **43** (1944), 183–185.

[8] Brudno A., *Summation of bounded sequences by matrices*, Rec. Math. (Math. Sbornik) N. S. **16(58)** (1945), 191–247.

[9] Butzer P. L., Gieseler S., Kaufmann F., Nessel R. J., Stark E. L., *Eduard Helly (1884–1943). Eine nachträgliche Würdigung*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **82** (1980), 128–151.

[10] Butzer P. L., Nessel R. J., Stark E. L., *Eduard Helly (1884–1943), in memoriam*, Results Math. **7** (1984), 145–153.

[33] S tímto dokumentem žil až do roku 1959, kdy celá rodina získala americké občanství.

[34] Viz seznam publikací v [40], str. xxviii–xxxiv, nebo v [51].

[11] Connor J., *A short proof of Steinhaus' theorem on summability*, Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 420–421.

[12] Connor J., *Almost none of the sequences of 0's and 1's are almost convergent*, Internat. J. Math. Math. Sci. **13** (1990), 755–777.

[13] Conway J. B., *A course in functional analysis*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer Verlag, New York, 1990.

[14] Cooke R. G., *Infinite matrices and sequence spaces*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[15] Das G., *Banach and other limits*, J. London Math. Soc. **(2) 7** (1974), 501–507.

[16] Day M. M., *Normed linear spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 21, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1973.

[17] Dieudonné J., *History of functional analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 49, Notas de Matemática (77), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, 1981.

[18] Duran J. P., *Strongly regular matrices, almost-convergence, and Banach limits*, Duke Math. J. **39** (1972), 497–502.

[19] Eberlein W. F., *Banach-Hausdorff limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 662–665.

[20] Eizen C., Laush G., *Infinite matrices and almost convergence*, Math. Japon. **14** (1969), 137–143.

[21] Ferraro G., *The first modern definition of the sum of a divergent series: an aspect of the rise of 20th century mathematics*, Arch. Hist. Exact Sci. **54** (1999), 101–135.

[22] Freedman A. R., *Generalized limits and sequence spaces*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 224–228.

[23] Fuchssteiner B., Horváth J., *Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn-Banachschen Satz*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1979, 107–121.

[24] Goffman C., Pedrick G., *First course in functional analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.

[25] Hajduković D., *F-conservative matrices*, Math. Balkanica **5** (1975), 138–142.

[26] Hajduković D., *The functionals of the kind of Banach limits*, Publ. Inst. Math. Beograd (N.S.) **19 (33)** (1975), 73–76.

[27] Hardy G. H., *Divergent series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[28] Heuser H., *Zur Ideengeschichte der Funktionalanalysis*, Math. Semesterber. **35** (1988), 38–63.

[29] Heuser H., *Hahns Weg zum Satz von Hahn-Banach*, Internat. Math. Nachrichten **183** (2000), 1–20.

[30] Hewitt E., Stromberg K., *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Second printing corrected, Springer Verlag, New York, Berlin, 1969.

[31] Hochstadt H., *Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem*, Math. Intelligencer **2** (1979/80), 123–125.

[32] Jahnke H. N. (ed.), *A history of analysis*, History of Mathematics, vol. 24, American Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 2003.

[33] Jerison M., *The set of all generalized limits of bounded sequences*, Canad. J. Math. **9** (1957), 79–89.

[34] Kamthan P. K., Gupta M., *Sequence spaces and series*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[35] King J. P., *Almost summable sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1219–1225.

[36] Kline M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[37] Lorentz G. G., *Absolute Konvergenz*, Leningrad State Univ. Annals (Uchenye Zapiski, Math. Ser. (12)) **83** (1941), 30–41.

[38] Lorentz G. G., *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.

[39] Lorentz G. G., *The work of G. G. Lorentz*, J. Approximation Theory **13** (1975), 12–16.

[40] Lorentz G. G., *Mathematics from Leningrad to Austin*, Vol. 1, Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[41] Maddox I. J., *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, London, New York, 1970.

[42] Maddox I. J., *Elements of functional analysis*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[43] Mazur S., *On the generalized limit of bounded sequences*, Colloquium Math. **2** (1951), 173–175.

[44] Monna A. F., *Letter: „Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem“ by Hochstadt*, Math. Intelligencer **2** (1979/80), 158.

[45] Nanda S., *Matrix transformations and sequence spaces*, Two applications of functional analysis, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 74, Queen's Univ., Kingston, ON, 1986, I1–I79.

[46] Narici L., *On the Hahn-Banach theorem*, Advanced courses of mathematical analysis II, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, 87–122.

[47] Narici L., Beckenstein E., *The Hahn-Banach theorem: the life and times*, Topology Appl. **77** (1997), 193–211.

[48] Narici L., Beckenstein E., *The Hahn-Banach theorem and the sad life of E. Helly*, Advanced courses of mathematical analysis III, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 97–110.

[49] Netuka I., *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2014.

[50] Netuka I., Veselý J., *Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **29** (1984), 301–312.

[51] Nevai P. et al., *In Memoriam George G. Lorentz (1910–2006)*, J. Approximation Theory **162** (1997), 465–491.

[52] Nillsen R., *Nets of extreme Banach limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 347–352.

[53] Peres Y., *Application of Banach limits to the study of sets of integers*, Israel J. Math., **62** (1988), 17–31.

[54] Petersen G. M., *Summability methods and bounded sequences*, J. London Math. Soc. **31** (1956), 324–326.

[55] Petersen G. M., *Sequences of 0's and 1's and Toeplitz methods of summability*, Amer. Math. Monthly **63** (1956), 174–175.

[56] Petersen G. M., *Extreme points for regular summability matrices*, Tôhoku Math. J. **(2) 18** (1966), 255–258.

[57] Petersen G. M., *Regular matrix transformations*, McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London, New York, Toronto, Ont., 1966.

[58] Petersen G. M., *Regular matrices and bounded sequences*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **69** (1967), Heft 3, Abt. 1, 107–151.

[59] Petersen G. M., *A tribute to G. G. Lorentz*, J. Approximation Theory **13** (1975), 4–5.

[60] Peyerimhoff A., *Lectures on summability*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1969.

[61] Pietsch A., *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[62] Pringsheim A., *Divergente Reihen*, Encycl. math. Wiss., I A.3, 1898, 105–111.

[63] Raimi R. A., *Invariant means and invariant matrix methods of summability*, Duke Math. J. **30** (1963), 81–94.

[64] Robinson A., *On generalized limits and linear functionals*, Pacific J. Math. **14** (1964), 269–283.

[65] Ruckle W. H., *Sequence spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 49, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass. – London, 1981.

[66] Rudin W., *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, Düsseldorf, Johannesburg, 1973.

[67] Saccoman J. J., *Extension theorems by Helly and Riesz revisited*, Riv. Mat. Univ. Parma **(4) 16** (1990), 223–230.

[68] Schaefer P., *Matrix transformations of almost convergent sequences*, Math. Z. **112** (1969), 321–325.

[69] Schaefer P., *Infinite matrices and invariant means*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 104–110.

[70] Schatte P., *On uniform limitability and Banach limits*, Z. Anal. Anwendungen **9** (1990), 319–326.

[71] Semenov E. M., Sukochev F. A., *Extreme points of the set of Banach limits*, Positivity, **17** (2013), 163–170.

[72] Semenov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S., *Geometric properties of the set of Banach limits*, Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat. **78** (2014), 177–204 (rusky, překlad v Izv. Math. **78** (2014), 596–620).

[73] Simons S., *Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 640–655.

[74] Smithies F., *The shaping of functional analysis*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 129–138.

[75] Stieglitz M., Tietz H., *Matrixtransformationen von Folgenräumen. Eine Ergebnisübersicht*, Math. Z. **154** (1977), 1–16.

[76] Sucheston L., *On existence of finite invariant measures*, Math. Z. **86** (1964), 327–336.

[77] Sucheston L., *Banach limits*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 308–311.

[78] Talagrand M., *Moyennes de Banach etrémales*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **282** (1976), Aii, A1359–A1362.

[79] Veselý J., *Základy matematické analýzy*, první díl, Matfyzpress, Praha, 2004.

[80] Veselý J., *Základy matematické analýzy*, druhý díl, Matfyzpress, Praha, 2009.

[81] Wilansky A., *Functional analysis*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., New York, Toronto, London, 1964.

[82] Wilansky A., *Modern methods in topological vector spaces*, McGraw-Hill International Book Co., New York, 1978.

[83] Wilansky A., *Summability through functional analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 85, Notas de Matemática (91), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, 1984.

[84] You Chao, *Simplified and equivalent characterizations of Banach limit functional and strong almost convergence*, arXiv:0906.4010v1 [math. FA], 22 Jun 2009.

[85] You Chao, *Advances in almost convergence*, Ann. Funct. Anal. **3** (2012), 49–66.

[86] Zeller K., Beekmann W., *Theorie der Limitierungsverfahren*, Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 15, Springer Verlag, Berlin – New York, 1970.

Poděkování: Děkuji Martině Bečvářové za pomoc a spolupráci při technickém zpracování textu.

Adresa

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc.
Matematický ústav
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *netuka@karlin.mff.cuni.cz*

4. Soit $\{\xi_n\}$ une suite bornée quelconque. Definissons dans l'intervalle $(0, +\infty)$ la fonction $x(s)$ par la convention: $x(s) = \xi_n$ pour $n-1 < s \leqslant n$ et $n = 1, 2, \ldots$ La fonction $x(s)$ appartient donc à l'ensemble E, envisagé dans **3.** En posant $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, où $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x(s)$ conserve le sens adopté dans **3**, on a le théorème:

A toute suite bornée $\{\xi_n\}$ *on peut faire correspondre un nombre* $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ *de façon que les conditions suivantes* (où $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont des suites bornées arbitraires et a et b sont des nombres) *soient remplies:*

1) $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} (a\,\xi_n + b\,\eta_n) = a \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n + b \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \eta_n$,

2) $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$, *si* $\xi_n \geqslant 0$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$,

3) $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$,

4) $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} 1 = 1$.

Les conditions 1)—4) impliquent que la fonctionnelle $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ ainsi définie est comprise toujours entre $\underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$. Par conséquent, pour toute suite convergente cette fonctionnelle coïncide avec la limite (au sens ordinaire) de la suite [1]).

---

[1]) Cf. S. Mazur, *O metodach sumowalności*, Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego (en polonais), Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. (1929), p. 102—107, voir p. 103.

S. Banach: *Théorie des opérations linéaires*, [3], str. 34

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF DIVERGENT SEQUENCES.[1]

By

G. G. LORENTZ

in TÜBINGEN.

In this paper we define and examine a new method of summation which assigns a general limit $\operatorname{Lim} x_n$ to certain bounded sequences $x = \{x_n\}$. This method is analogous to the mean values which are used in the theory of almost periodic functions, furthermore it is narrowly connected with the limits of S. BANACH.[2] The sequences which are summable by this method F we shall call almost convergent. In spite of the fact that our method contains certain classes of matrix methods (for bounded sequences) it is not strong (§ 3). Its most remarkable property is that most of the commonly used matrix methods contain the method F (§ 5). In spite of this F is equivalent to none of the matrix methods (§ 7). In § 6 we shall examine a certain class of matrix methods and compare them with the method F.[1]

§ 1. Different Definitions of the Method *F*.

Let M be the entity of all bounded sequences of real numbers $x = \{x_n\}$. M is a Banach space, if we there define the linear operations in a natural manner and the norm of an element $x = \{x_n\}$ by

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

Then evidently the set C of all convergent sequences is a linear subspace of M. S. Banach proved the existence of certain functions of the element $x = \{x_n\}$ in

[1] Some preliminary results have been published in Zapiski Univ. Leningrad, Math. Ser. 12, 30—41 (1941).

[2] Cf. BANACH, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, p. 33—34.

G. G. Lorentz: *A contribution to the theory of divergent sequences*, [38], str. 167

PODIVNÁ TVÁŘ GEOMETRIE U JANA CARAMUELA Z LOBKOVIC

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: Juan Caramuel Lobkowitz (1606–1682) contributed to development of mathematics especially by formal construction of combinatorics and numeration systems. In his work *Mathesis biceps* (1667) Caramuel solves philosophical issues of nature of mathematical disciplines as well and tries to establish their axiomatic foundations. He brings simultaneously the wide scale of surprising practical applications.

1 Změna paradigmatu v 17. století

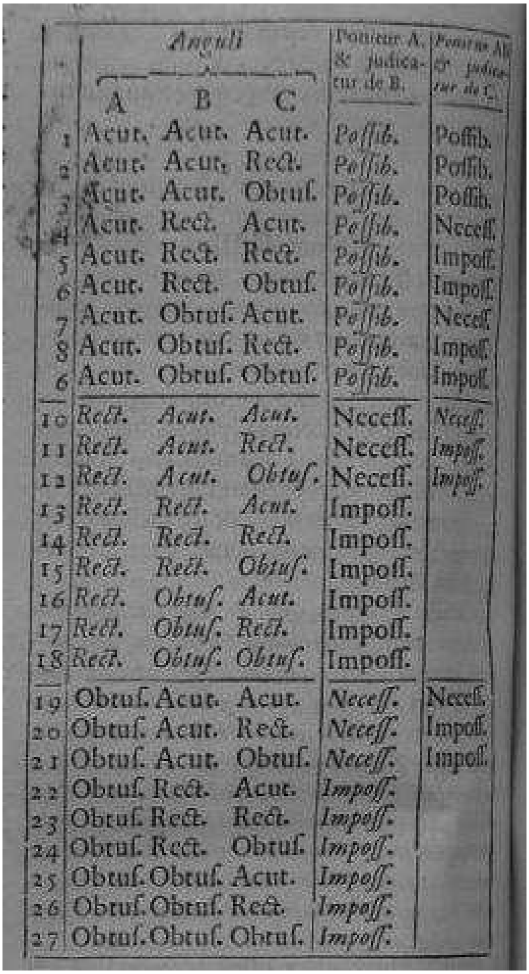
Evropa 17. století nebyla prostorem idylickým. Vnitřní rozpory křesťanské civilizace a krize společenských institucí neschopných řešit nahromaděné problémy vyústily do vleklých bojů třicetileté války. Vědomí nutnosti zvládnout situaci spojovalo všechny velké osobnosti té doby (viz [7]) a projevovalo se nejen v oblasti politické, ale i filosofické. Předpoklad provázanosti světa vyžadoval celostní přístup, a tedy nalezení universálního nástroje uchopení skutečnosti, který by byl způsobilý ji objektivně popsat, racionálním způsobem formulovat a řešit vzniklé otázky.

Je zřejmé, že této ambici mohly dostát jen formální disciplíny, a proto bylo třeba oprostit vědecké poznání od dosavadních metafyzických principů ve prospěch matematiky a vytvořit nový adekvátní jazyk vědy. Zkoumání jazyka mělo v evropském prostoru již dlouhou tradici, pěstovalo se na universitách v podobě spekulativní gramatiky již od 13. století. Vkladem barokního období pak byla inspirace středověkou hebrejskou kabalou (viz [5]), jež ve své podstatě nese myšlenku paralelismu jazyka a stvořeného universa a otevřela tehdy cestu k tvorbě umělého jazyka.

Matematika se stává oním hledaným svorníkem, zárukou universality a pravdivosti poznání a přebírá vlastně roli, kterou v předchozím období hrála teologie. Její nově konstituované odvětví, kombinatorika, pak koresponduje s principem kompozicionality, z něhož novověká věda vychází. Všechny zmíněné aspekty lze ilustrovat na díle Jana Caramuela z Lobkovic a naopak, Caramuelovu nezvykle širokému pojetí matematiky nelze porozumět mimo kontext doby.

2 Matematika a jazyk u Jana Caramuela z Lobkovic

Jan Caramuel z Lobkovic byl typickým kosmopolitním intelektuálem barokní doby. Narodil se v Madridu roku 1606 do rodiny s českými kořeny (po matce byl Lobkovic), studoval filosofii a teologii na slavných španělských universitách v Alcale a Salamance, doktorát teologie získal v nizozemské Lovani. Již jako student vstoupil do cisterciáckého řádu, své nadání a vědeckou erudici proto uplatňoval i v církevní sféře. Upozornil na sebe výjimečnou schopností logické argumentace také v politicky choulostivých otázkách a stal se opatem v německém Disibodenbergu. Brzy následovalo pozvání císaře Ferdinanda III., který využil Caramuelova diplomatického umu při dojednání mírové smlouvy na Vestfálském kongresu. V Praze pak strávil Caramuel celou dekádu jako generální vikář pražského arcibiskupa kardinála Harracha. V roce 1657 byl papežem ustanoven jako biskup Satrijsko-Campagneské diecéze v jižní Itálii. Caramuelův hrob dodnes najdeme v katedrále v jeho posledním působišti ve Vigevanu.



	Anguli A	Anguli B	Anguli C	Ponitur A. & judicatur de B.	Ponitur AB & judicatur de C.
1	Acut.	Acut.	Acut.	Poſſib.	Poſſib.
2	Acut.	Acut.	Rect.	Poſſib.	Poſſib.
3	Acut.	Acut.	Obtuſ.	Poſſib.	Poſſib.
4	Acut.	Rect.	Acut.	Poſſib.	Neceſſ.
5	Acut.	Rect.	Rect.	Poſſib.	Impoſſ.
6	Acut.	Rect.	Obtuſ.	Poſſib.	Impoſſ.
7	Acut.	Obtuſ.	Acut.	Poſſib.	Neceſſ.
8	Acut.	Obtuſ.	Rect.	Poſſib.	Impoſſ.
6	Acut.	Obtuſ.	Obtuſ.	Poſſib.	Impoſſ.
10	Rect.	Acut.	Acut.	Neceſſ.	Neceſſ.
11	Rect.	Acut.	Rect.	Neceſſ.	Impoſſ.
12	Rect.	Acut.	Obtuſ.	Neceſſ.	Impoſſ.
13	Rect.	Rect.	Acut.	Impoſſ.	
14	Rect.	Rect.	Rect.	Impoſſ.	
15	Rect.	Rect.	Obtuſ.	Impoſſ.	
16	Rect.	Obtuſ.	Acut.	Impoſſ.	
17	Rect.	Obtuſ.	Rect.	Impoſſ.	
18	Rect.	Obtuſ.	Obtuſ.	Impoſſ.	
19	Obtuſ.	Acut.	Acut.	Neceſſ.	Neceſſ.
20	Obtuſ.	Acut.	Rect.	Neceſſ.	Impoſſ.
21	Obtuſ.	Acut.	Obtuſ.	Neceſſ.	Impoſſ.
22	Obtuſ.	Rect.	Acut.	Impoſſ.	
23	Obtuſ.	Rect.	Rect.	Impoſſ.	
24	Obtuſ.	Rect.	Obtuſ.	Impoſſ.	
25	Obtuſ.	Obtuſ.	Acut.	Impoſſ.	
26	Obtuſ.	Obtuſ.	Rect.	Impoſſ.	
27	Obtuſ.	Obtuſ.	Obtuſ.	Impoſſ.	

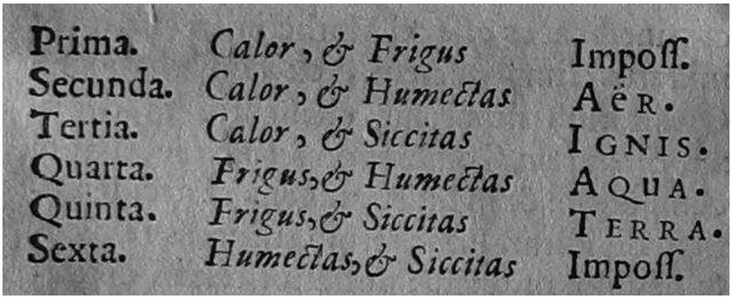
Obr. 1: Kombinatorická analýza vztahů mezi úhly trojúhelníka

Caramuel však nebyl jen církevním hodnostářem. Matematické nadání se u něj projevovalo již v dětském věku a podporoval je jeho otec, který před odchodem do Španělska byl na pražském dvoře Rudolfa II. císařským matematikem. Zájem o matematiku u Caramuela provázela fascinace židovskou kabalou, jež byla tolerována a do jisté míry pěstována v Alcale. Kabalistický pohled na svět formoval jeho vlastní myšlení a umožňoval mu nacházet nové souvislosti a analogie i v dalších odlišných kontextech. K tomu přistupovalo vynikající Caramuelovo jazykové vybavení. Kromě obvyklých národních jazyků zemí, kde žil, a latiny s řečtinou, běžných u vzdělanců té doby, znal hebrejštinu, arabštinu a čínštinu (viz [6]). To mu poskytovalo dostatek srovnávacího materiálu, aby mohl studovat jazyk jako abstraktní strukturu prostředky matematiky.

Prvním Caramuelovým příspěvkem k problematice umělých jazyků byla ještě v době studií v Lovani komentovaná edice renesančního textu *Steganographiae* [1] z indexu zakázaných knih, kterou tím rehabilitoval v očích současníků a interpretoval jako teorii šifrování. V průběhu pražského působení vydal rozsáhlý spis *Theologia rationalis* [2], v němž v kapitole *Grammatica audax* (Odvážná mluvnice) představuje svůj metafyzický dialekt, umělý jazyk obohacený novými slovy, která generuje postupným vkládáním různých samohlásek do stejného základu, a formální definicí jim pak přiřazuje významy. Kombinatorické metody Caramuela provázejí po celou dobu jeho intelektuální práce. Rozvíjí je postupně podle potřeb zvoleného tématu, přesvědčení o jejich relevanci a obecnosti je pro něj evidentním základem poznatelnosti světa.

3 *Speculatio a Praxis*

Systematický výklad kombinatoriky (viz [7]) je obsažen až v Caramuelově souborném matematickém spisu *Mathesis biceps vetus et nova* [3] a *Mathesis nova* [4], jejž vydal jako biskup ve své vlastní tiskárně v Campanii v roce 1667, resp. 1669. Jde o encyklopedické dílo, úhrnem více než 1700 stran foliového formátu. Klíčem k pochopení autorova záměru je název – *Nauka stará a nová o dvou hlavách.* Vágní slovo nauka naznačuje velmi široké pojetí matematiky. Každý pojem je prezentován v historických souvislostech, autor propojuje staré a nové, uvádí citace literatury k tématu. Adjektivum *biceps* je alegorickým vyjádřením nároku, kterému má matematika dostát – být universálním nástrojem poznání jakéhokoli jevu ve světě. Odpověď v podobě krásné rytiny nabízí titulní list. Oněmi dvěma hlavami matematiky jsou *Speculatio* a *Praxis,* v dnešním jazyce *Teorie* a *Aplikace*. Oba aspekty se skutečně vzájemně doplňují v celém textu.



Prima.	*Calor, & Frigus*	Imposs.
Secunda.	*Calor, & Humectas*	AËR.
Tertia.	*Calor, & Siccitas*	IGNIS.
Quarta.	*Frigus, & Humectas*	AQUA.
Quinta.	*Frigus, & Siccitas*	TERRA.
Sexta.	*Humectas, & Siccitas*	Imposs.

Obr. 2: Kombinatorický důkaz správnosti aristotelské nauky o živlech

Kapitola věnovaná geometrii např. začíná filosofickými otázkami o povaze základních pojmů jako jsou bod, křivka, plocha, těleso. Caramuel zná názory presokratiků, referuje o aporiích Zénóna Elejského tak, jak jsou zachovány v citaci Aristotela ve Fyzice, a pak sám předkládá své argumenty a definice. Je příznačné, že se tak děje v odstavci nazvaném *De notitiis Speculativis, quae requiruntur ante praxim.* Aby se vyhnul paradoxům kontinua a mohl budovat konsistentní teorii (dnešní terminologií řečeno, očekává splnění axiomu aditivity míry), bod (*punctum geometricum*) definuje jako *initium quantitatis*, které je *indivisibile,* tj. nemá části, a nemá délku (*longitudo*). Křivka (*linea*) se proto neskládá z jednotlivých bodů, ale je *fluxus puncti*, plynutím bodu a má délku. Odlišný statut však mají bod (*punctum practicum*), křivka atd. v geodézii, která je protějškem teoretické geometrie na úrovni *Praxis.*

Ve druhém svazku *Mathesis nova* získává Caramuel po vybudování kombinatorických pojmů nové prostředky pro studium geometrie. Uveďme tabulku (viz obr. 1), která přehledně zachycuje zkoumání vztahů mezi vnitřními úhly trojúhelníka. Rozlišíme-li tři základní možnosti – úhel ostrý, pravý a tupý, tabulka obsahuje 27 variací 3. třídy s opakováním. Ve 2., resp. 3. sloupci najdeme vyhodnocení logického soudu, kdy ze znalosti úhlu *A* činíme závěr o *B*, resp. ze znalosti *A, B* usuzujeme na *C*.

Stejný přístup volí Caramuel i v situaci, kdy postuluje, že matematickými argumenty dokáže správnost Aristotelovy nauky o čtyřech elementech neboli živlech. Připomene nejdříve živlovou nauku presokratika Empedoklea z 5. století př. Kr. o 4 kořenech, pak srovnává Aristotelovu reduktivní koncepci 4 prvků látkové povahy (vzduch, oheň, voda, země) s pozdějším učením o kvintesenci (*aithér*). Rozhodnutí o správném počtu prvků opět přinese princip kompozicionality a kombinatorika. Prvky vznikají jako kombinace (tj. dvojice) 4 primárních kvalit (teplé, studené, vlhké, suché). Počet kombinací 2. třídy ze 4 prvků je 6 (viz obr. 2), tj. tyto kombinace jsou myslitelné (*intelligibile*). První a poslední jsou však nemožné *in re*. Na této aplikaci kombinatoriky ve filosofii je však nejvíc překvapivé její zařazení do kapitoly *Geometria specialis*.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc*, Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc*, Francofurti, 1654.

[3] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis biceps vetus et nova*, Campaniae, 1667.

[4] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis nova*, Campaniae, 1669.

[5] Otavová M.: *Caramuel z Lobkovic – matematická teorie jazyka v 17. století*, In: Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 147–148.

[6] Otavová M.: *Jan Caramuel z Lobkovic a jeho Mathesis biceps*, In: Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, str. 233–236.

[7] Otavová M.: *Zrození kombinatoriky v díle Jana Caramuela z Lobkovic*, In: Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 35. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2014, str. 207–210.

Poděkování

Za laskavé pořízení fotokopií z díla Jana Caramuela z Lobkovic v majetku Královské kanonie premonstrátů na Strahově děkuji pracovnici oddělení starých tisků klášterní knihovny Mgr. Hedvice Kuchařové, Ph.D.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *otavova@vse.cz*

TIBOR NEUBRUNN A SLOVENSKÁ ŠKOLA TEÓRIE MIERY

Beloslav Riečan

Abstract: This paper contains core ideas of Tibor Neubrunn's works on measure theory. These publications and his extensive pedagogical and reviewal work became one of pillars of Slovak school of measure theory. In the end we present one of remarkable results of this school – Šipoš integral.

Úvod

Práce z teórie miery a integrálu patria medzi prvé vedecké články Tibora Neubrunna. Je to dosť pochopiteľné, keď vezmeme do úvahy, že v r. 1950 vyšla prelomová monografia Paula R. Halmosa, *Measure theory.* Ale už v r. 1952 vyšiel jej ruský preklad, ktorý nám bol všeobecne dostupný. Stal sa okrem iného základom prednášky Ladislava Mišíka pre tretiakov na vtedajšej Prírodovedeckej fakulte UK v školskom roku 1955/56. Prof. Mišík prednášal na Univerzite Komenského ako externista, keď kmeňovo pôsobil na Strojníckej fakulte Slovenskej vysokej školy technickej (SVŠT). Keď si Univerzita Komenského zrušila externistov, premiestnili sme sa na čele s Tiborom na SVŠT na v tom čase vzniknuvší Mišíkov seminár z teórie miery. Tento sa pravidelne konal v knižnici Štefana Schwarza. Zúčastňovali sa ho popri Tiborovi a šiestich vysokoškolákoch z PF UK aj pracovníci SVŠT na čele s legendárnou trojicou Ladislav Mišík, Igor Kluvánek, Marko Švec.

1. Konštrukcia miery

Konštrukcia miery z objemu je veľmi populárna, pravdepodobne po Halmosovej expozícii v spomínanej monografii. Objem je tam definovaný ako nezáporná funkcia na systéme všetkých kompaktných množín. Druhou motiváciou je systém kompaktných intervalov na reálnej osi. To je problematika zaujímavá tak z hľadiska vedeckého (napr. teória pravdepodobnosti) ako aj z hľadiska didaktického.

Tibor Neubrunn vo svojej práci [4] zaujal stanovisko abstraktné. Jeho objem je definovaný na danom systéme podmnožín abstraktného priestoru. Svoje výsledky prezentoval potom v trochu rozšírenej forme v monografiách [12], [13] a [14].

Daná je teda množina X. Objemom budeme rozumieť nezápornú funkciu

$$\lambda : \mathcal{E} \to [0, \infty),$$

kde $\mathcal{E}$ je systém podmnožín množiny X uzavretý k zjednoteniam, t.j.

$$A, B \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{E},$$

a obsahujúci prázdnu množinu $\emptyset$. Pritom predpokladáme, že

$$E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leq \lambda(F),$$
$$\lambda(E \cup F) \leq \lambda(E) + \lambda(F),$$
$$E \cap F = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

V Neubrunnovej teórii je daná dvojica systémov $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ podmnožín množiny X spĺňajúca nasledujúce podmienky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}$,

(ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$,

$V_n \in \mathcal{V} \ (n = 1, 2, \dots) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathcal{V}$,

(iii) $A \in \mathcal{A},\ V_1, V_2 \in \mathcal{V},\ A \subset V_1 \cup V_2$,

$\Longrightarrow$ existujú $A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ A_1 \subset V_1,\ A_2 \subset V_2,\ A = A_1 \cup A_2$,

(iv) $A \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i,\ V_i \in \mathcal{V}\ (i = 1, 2, \dots)$

$\Longrightarrow \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ pre nejaké n,

(v) $A \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad V \cap A^{'} \in \mathcal{V}$,

(vi) $A \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad V^{'} \cap A \in \mathcal{A}$.

Príkladom takej dvojice je systém $\mathcal{A}$ všetkých kompaktných, resp. systém $\mathcal{V}$ všetkých otvorených podmnožín daného Hausdorffovho topologického priestoru X. Hlavný výsledok článku je nasledujúca veta.

Veta 1.1. Existuje miera $\bar{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{V})$, ktoré je rozšírením objemu $\lambda : \mathcal{A} \to R$. Pritom

$$\bar{\mu}(F) = \sup\{\mu(E \cap F);\ E \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

μ je zúžením na $\sigma(\mathcal{A})$ vonkajšej miery $\mu^{\star}$,

$$\mu^{\star}(E) = \inf\{\lambda^{\star}(V);\ E \subset V \in \mathcal{V}\},$$
$$\lambda^{\star}(V) = \sup\{\lambda(A);\ V \supset A \in \mathcal{A}\}.$$

Dôsledok 1.2. Nech X je Hausdorffov topologický priestor, $\mathcal{A}$ je systém všetkých kompaktných množín, λ je objem na $\mathcal{A}$. Potom $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to R$ je regulárna Borelova miera.

Pritom regulárnosť znamená

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ U \in \mathcal{V}\} = \sup\{\mu(C);\ C \in \mathcal{A}\}.$$

Regulárnosťou sa zaoberá aj práca [2]. Tu sa uvažuje miera $\mu : (X, \mathcal{S}) \to [0, \infty)$ a miera $\nu(f) = \displaystyle\int_E f d\mu$, kde $f \geq 0$ a X je topologický priestor.

Veta 1.3. Ak

$$\mu(E) = \sup\{\mu(C);\ E \supset C,\ C \text{ kompaktná}\},$$

tak aj

$$\nu(E) = \sup\{\nu(C);\ E \supset C,\ C \text{ kompaktná}\}.$$

Podmienka $\nu(E) = \int_E f d\mu$ súvisí s pojmom absolútnej spojitosti miery ν vzhľadom na mieru μ (označenie $\nu << \mu$), t.j. s implikáciou $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$). V článku [11] sa využíva pojem (CCC) (countable chain condition).

Definícia 1.4. Funkcia $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ spĺňa podmienku (CCC), ak neexistuje nespočítateľný systém $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ navzájom disjunktných množín taký, že

$$\nu(E) > 0,\ E \in \mathcal{E}.$$

Veta 1.5. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor so σ- konečnou mierou μ spĺňajúcou podmienku (CCC). Potom miera $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ je absolútne spojitá vzhľadom na μ vtedy a len vtedy, keď existuje taká merateľná funkcia f, že

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

Veta 1.6. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor so σ-konečnou mierou. Nech $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ spĺňa podmienku (CCC). Potom $\nu << \mu$ vtedy a len vtedy, keď existuje taká merateľná funkcia f na X, že

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

2. Ideály

Slovo ideál má svoju symboliku. Ale v našej teórii má aj matematický význam. Mimochodom T. Neubrunn ho pôvodne nepoužíval (pozri [7]), hovoril o systéme nulových množín.

Definícia 2.1. Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor, $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$. Systém $\mathcal{N}$ nazveme ideálom, ak

(i) $E, F \in \mathcal{N} \quad \Longrightarrow \quad E \cup F \in \mathcal{N}$,

(ii) $E \in \mathcal{N},\ F \in \mathcal{S},\ F \subset E \quad \Longrightarrow \quad F \in \mathcal{N}$.

Ideál $\mathcal{N}$ sa nazýva σ-ideálom, ak platí

(iii) $E_n \in \mathcal{N}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\implies$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{N}$.

Aj v tomto všeobecnejšom tvare sa uplatňuje vlastnosť (CCC). V [7] je dokázané o.i. nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.2. Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor, $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ je σ-ideál a systém $\mathcal{S} \setminus \mathcal{M}$ neobsahuje nespočítateľne veľa navzájom disjunktných množín, $\mathcal{M}^\star \subset \mathcal{S}$ je σ-ideál, ktorý nie je súčasťou systému $\mathcal{M}$. Potom existuje taká množina $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{M}$, že $A \in \mathcal{M}^\star$ a

$$E \subset X \setminus A,\ E \in \mathcal{M}^\star \quad \implies \quad E \in \mathcal{M}.$$

Pravdaže, tvrdenia uvedeného typu sa dajú bezprostredne aplikovať na tvrdenia z teórie miery.

Veta 2.3. Nech $(X, \mathcal{S}, m)$ je priestor s úplnou mierou (t.j. $E \in \mathcal{S}$, $m(E) = 0$, $F \subset E \implies F \in \mathcal{S}$). Nech $m^\star$ je miera na $\mathcal{S}$, ktorá nie je absolútne spojitá podľa m. Potom existuje $A \in \mathcal{S}, m^\star(A) = 0, m(A) > 0$ a

$$E \subset X \setminus A,\ m^\star(E) = 0 \quad \implies \quad m(E) = 0.$$

Je pozoruhodné, že niektoré tvrdenia z [7] sa dajú použiť v teórii P. R. Halmosa a L. J. Savagea aplikujúcej Radonovu-Nikodymovu vetu v teórii postačujúcich štatistík.

Ďalšie výsledky transformujúce tvrdenia teórie miery do teórie množín sú v monografiách [12], [13] a [14]. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $X \in \mathcal{S}$. Vezmime napr. Lebesgueovu vetu, ktorá pracuje s dvoma mierami $\mu, \nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$, z ktorých jedna je konečná. Potom existujú také miery $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{S} \to [0, \infty]$, že

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

pričom $\nu_1 << \mu$ a $\nu_2 \perp \mu$, (t.j. existujú také $A, B \in \mathcal{S}$, že $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ a $\mu(E \cap A) = \nu_2(E \cap B)$ pre všetky $E \in \mathcal{S}$).

Definícia 2.4. Nech $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ sú σ-ideály. Hovoríme, že $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sú singulárne (píšeme $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$), ak existujú také A, B, že

$$X = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset$$

a

$$E \cap A \in \mathcal{M}, \quad E \cap B \in \mathcal{N}$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

Absolútnu spojitosť mier možno sformulovať inklúziou σ-ideálov $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Ak totiž μ, ν sú miery,

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{S};\ \mu(A) = 0\},$$

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S};\ \nu(A) = 0\},$$

potom $\nu << \mu$ práve vtedy, keď $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

Veta 2.5. Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ sú σ-ideály, pričom

$$\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} \text{ spĺňa (CCC)},$$

t.j. neobsahuje nespočítateľne veľa navzájom disjunktných prvkov. Potom existuje taká množina $F \in \mathcal{M}$, že pre σ-ideály

$$\mathcal{N}_1 = \{E \in \mathcal{S}; E \cap F \in \mathcal{M}\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{E \in \mathcal{S}; E \setminus F \in \mathcal{M}\}$$

platí

$$\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}_2 \perp \mathcal{M}.$$

Klasickú Lebesgueovu vetu dostaneme pomocou vyššie uvedených volieb σ-ideálov $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ a definícií

$$\nu_1(E) = \nu(E \cap F), \quad \nu_2(E) = \nu(E \setminus F).$$

3. Malé množiny

Myšlienka nahradiť množiny nulovej miery daným σ-ideálom sa ukázala byť užitočnou, a preto aj populárnou. Ale nezahŕňa onú „ε-ovú vojnu“. Vieme, že v konvergenčných otázkach potrebujeme vedieť, kedy má nejaká množina „malú“ mieru, teda kedy je malá.

Definícia 3.1. Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor a $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť systémov množín $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, ...)$. Budeme hovoriť, že $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je systém malých množín na $\mathcal{S}$ (stručne malý systém), ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}_n$ pre $n = 1, 2, ...,$

(ii) pre každé n existuje taká postupnosť (k_i) prirodzených čísel, že

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}_n, \text{ ak } E_i \in \mathcal{N}_{k_i} \text{ pre } i = 1, 2, ...,$$

(iii) ak $E \in \mathcal{N}_n, F \subset E, F \in \mathcal{S}$, tak $F \in \mathcal{N}_n$,

(iv) $\mathcal{N}_n \supset \mathcal{N}_{n+1}$ pre $n = 1, 2, ...,$

(v) ak $E \in \mathcal{N}_n, F \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$, tak $E \cup F \in \mathcal{N}_n$.

Príklad 3.2. Nech $m : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ je miera, $\mathcal{N}_n = \{E \in \mathcal{S}; m(E) < \frac{1}{n}\}$. Potom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je systém malých množín.

Je príznačné, že Tibor Neubrunn sa zasadil za teóriu systémov malých množín hneď po jej vzniku. Jeho obľúbenou témou bola absolútna spojitosť.

Ak μ, ν sú miery na $\mathcal{S}$, tak $\nu << \mu$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{S}, \mu(E) < \delta \Longrightarrow \nu(E) < \varepsilon.$$

Tento pojem možno transformovať do malých systémov.

Definícia 3.3. Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ sú malé systémy. Píšeme

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} <<_{\varepsilon} (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{ak } \forall n \ \exists\, m : \mathcal{M}_m \subset \mathcal{N}_n.$$

Príklad 3.4. Nech $\mu,\ \nu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ sú miery,

$$\mathcal{M}_n = \left\{ E \in \mathcal{S};\ \mu(E) < \frac{1}{n} \right\}, \qquad \mathcal{N}_n = \left\{ E \in \mathcal{S};\ \nu(E) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Potom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} <<_{\varepsilon} (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ znamená, že

$$\forall n \ \exists\, m : \mu(E) < \frac{1}{m} \Longrightarrow \nu(E) < \frac{1}{n}.$$

Inak formulované

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \Longrightarrow \nu(E) < \varepsilon.$$

Veta 3.5. Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}, (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ sú malé systémy. Potom

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} << (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Opačná implikácia platí pre tzv. spojitý systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 3.6. Malý systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je polospojitý zhora, ak

$$(B_i \in S,\ B_i \searrow B,\ \exists\, i_o,\ B_i \notin \mathcal{N}_{i_o}) \quad \Longrightarrow \quad B \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n.$$

Pojem spojitého malého systému odpovedá pojmu funkcie polospojitej zhora:

$$B_i \searrow B \quad \Longrightarrow \quad \mu(B_i) \searrow 0.$$

A skutočne platí (pozri [10]):

Veta 3.7. Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}, (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ sú malé systémy na $\mathcal{S}$, pričom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je polospojitý zhora. Potom

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} << (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Videli sme, že zatiaľ čo nulové množiny môžu byť definované jednoznačne, pojem množiny „malej“ miery má fuzzy charakter. Je zaujímavé, že pojem fuzzy množiny a pojem množiny malej miery (opísaný matematicky tzv. malými systémami) boli zavedené nezávisle na sebe a temer súčasne. Hoci axiomatické systémy sú v oboch teóriach dosť rôzne, pojem malého systému môže byť skúmaný z hľadiska fuzzy množín.

4. Submiery

Submiery sa k nám dostali najprv prostredníctvom prác I. Dobrakova (pozri [1]). Aj keď teóriu submier možno budovať na všeobecnejších štruktúrach, ostaneme v klasickom ponímaní.

Definícia 4.1. Nech $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny X. Funkcia $m : \mathcal{S} \to R$ je submiera, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. ak $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tak $m(A) \leq \Sigma_{i=1}^{n} m(A_i)$,
3. ak $A_i \searrow \emptyset$, tak $\lim_{i \to \infty} m(A_i) = 0$.

Definícia 4.2. Postupnosť $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ a submiera $m : \mathcal{S} \to R$ sú ekvivalentné, ak platí

(i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in N : A \in \mathcal{N}_n \Longrightarrow m(A) < \varepsilon$,

(ii) $\forall n \in N \ \exists \varepsilon > 0 : m(A) < \varepsilon \Longrightarrow A \in \mathcal{N}_n$.

V [14] je dokázané nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.3. K ľubovoľnej submiere $m : \mathcal{S} \to R$ existuje malý systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentný s tou submierou. A naopak, k ľubovoľnému malému systému $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje submiera $m : \mathcal{S} \to R$ s ním ekvivalentná.

Logickým vyústením slovenskej školy teórie integrálu je Šipošov integrál ([15], [16], [17]), ktorý skonštruoval Neubrunnov žiak Ján Šipoš. Tento integrál bol použitý v Kahnemannovej a Tverského ekonomickej koncepcii, za ktorú bol Kahnemann odmenený Nobelovou cenou. Pritom Šipošov integrál je určitou alternatívou Choquetovho integrálu. Pravdaže, vznikli nezávisle na sebe a Šipošov integrál má svoje symetrické osobitosti.

Odteraz budeme predpokladať, že je daný priestor $(X, \mathcal{S})$, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra.

Definícia 4.4. Funkcia $\mu : \mathcal{S} \to R$ je kapacita, ak

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Definícia 4.5. Nezáporná funkcia $f : X \to [0, \infty)$ je integrovateľná v zmysle Choqueta, ak existuje

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(f^{-1}[0, t)) dt.$$

A teraz uvedieme Šipošovu konštrukciu. Nech F je konečná množina reálnych čísel,

$$F = \{b_k, b_{k-1}, ..., b_1, b_0, a_0, a_1, ..., a_n\},$$

pričom

$$b_k < b_{k-1} < \cdots < b_1 < b_0 = 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n,$$

a nech $f : X \to R$ je merateľná funkcia. Nech $\mathcal{F}$ je systém všetkých takých množín F. Položme

$$S_F(f) = \Sigma_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \mu(A_i) + \Sigma_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) \mu(B_i),$$

kde

$$A_i = \{x \in X; f(x) \geq a_i\}, \qquad i = 0, 1, ..., n,$$
$$B_j = \{x \in X; f(x) \leq b_j\}, \qquad j = 0, 1, ..., k.$$

Definícia 4.6. Funkcia $f : X \to R$ je integrovateľná v zmysle Šipoša, ak existuje

$$(S) \int f d\mu = \lim_{F \in \mathcal{F}} S_F(f).$$

Pravdaže, ak je funkcia f nezáporná, tak je integrovateľná v zmysle Šipoša vtedy a len vtedy, keď je integrovateľná v zmysle Choqueta.

Záver

Prof. RNDr. Tibor Neubrunn, DrSc. (2. 8. 1929 až 21. 11. 1990), pôsobil na Univerzite Komenského 37 rokov (1953–1990) s jednoročnými prerušeniami na Univerzite v Bagdade 1967/68 a na Univerzite v St. Salvadore v Brazílii 1972/73. Hoci vynikal jemnou povahou, a to tak ako učiteľ, ako aj ako vedecký pracovník, ostala po ňom výrazná vedecká stopa. Stalo sa to v troch smeroch: prvým bola teória miery, druhým teória reálnych funkcií, tretím teória kvantových štruktúr.

Predložená práce je prvým pokusom o zhodnotenie vedeckého prínosu Tibora Neubrunna v oblasti teórii miery a jej aplikácií. Ale je tu aj pedagogický odkaz, ktorého pozoruhodným výsledkom je Šipošov integrál.

Literatúra

[1] Dobrakov I., *On submeasures I*, Dissert. Math. 112, 1973.

[2] Neubrunn T., *O jednej podmienke pre vnútornú regularitu niektorých mier*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 4, 1959, 283–286.

[3] Neubrunn T., *A note on measurable transformations*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 4, 1959, 286–289.

[4] Neubrunn T., *O konštrukcii miery z objemu*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 6, 1961, 51–60.

[5] Neubrunn T., *Merateľnosť niektorých funkcií na kartézskych súčinoch*, Mat.-fyz. čas. SAV 10, 1960, 216–231.

[6] Neubrunn T., *O metrických priestoroch patriacich priestorom s mierou*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 7, 1963, 663–673.

[7] Neubrunn T., *Zamečanije ob absoľutnoj nepreryvnosti mier*, Mat.-fyz. čas. SAV 16, 1966, 21–30.

[8] Neubrunn T., *On the absolue continuity of product measures*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 21, 1968, 378–386.

[9] Neubrunn T., *A remark on the product of measures*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 22, 1969, 31–37.

[10] Neubrunn T., *On abstract formultion of absolute continuity and dominancy*, Mat. čas. SAV 19, 1969, 202–216.

[11] Neubrunn T., *On some conditions of abolute continuity of measures*, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem. 39, 1980, 89–95.

[12] Neubrunn T., Riečan B., *Miera a integrál*, VEDA, Bratislava, 1981.

[13] Riečan B., Neubrunn T., *Teória miery*, VEDA, Bratislava, 1991.

[14] Riečan B., Neubrunn T., *Integral, Measure, and ordering*, Elsevier, Dortmund, 1997.

[15] Šipoš J., *Integral with respect to a pre-measure*, Math. Slovaca 29, 1979, 257–270.

[16] Šipoš J., *Non linear integrals*, Math. Slovaca 29, 1979, 333–346.

[17] Šipoš J., *Integral representation of nonlinear functionals*, Math. Slovaca 31, 1981, 39–51.

Adresa

prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.
Fakulta prírodných vied Univerzity Mateja Bela
Katedra matematiky
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica
e-mail: *Beloslav.Riecan@umb.sk*

HANS SCHNEIDER (1927–2014)

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Abstract: Hans Schneider, leading linear algebraist of the 20th century, who was one of the founders of the *International Linear Algebra Society* and the editor-in-chief of the prestigious journal *Linear Algebra and Its Applications*, died in 2014.

1 Životní osudy

1.1 Z Rakouska přes Československo a Polsko do Nizozemí[1]

Hans Schneider se narodil 24. ledna 1927 ve Vídni jako jediné dítě dvou zubařů. Zatímco jeho matka Isabella Schneider (1897–1967), rozená Saphir, pocházela rovněž z Vídně, otec Hugo Schneider (1897–1967) se narodil v slezském pohraničním městě Karviná a do Vídně odešel za gymnaziálním studiem. Rodiče se vzali v roce 1922, kdy oba ukončili svá studia zubního lékařství. Otec si poté ve Vídni otevřel úspěšnou soukromou stomatologickou praxi, matka pracovala pro městské dentální centrum ošetřující školní děti.

Rodiče Hanse Schneidera se nehlásili k žádnému náboženství, podle nacistických rasových zákonů však byli považováni za Židy. Z tohoto důvodu byl poklidný život rodiny nenávratně přetržen v březnu 1938 anšlusem Rakouska nacistickým Německem. Tou dobou zbývaly rodině poslední tři měsíce společného pobytu ve Vídni. V prvních týdnech od anexe se zdálo, že běžné denní činnosti tehdy jedenáctiletého Hanse se přechodem pod nacistickou nadvládu příliš nezmění. Otec Hugo se zpočátku neobával ani o svou profesní dráhu. Věděl sice, že ztratí některé své nežidovské pacienty, ale současně věřil, že do svého registru získá některé pacienty židovské, kteří dosud navštěvovali zubaře nežidovského, a bude tak i nadále provozovat svou praxi. V následujících třech měsících však pochopil, jak moc se mýlil. Jednoho dne mu totiž mladý muž v uniformě SA sdělil, že je také zubař a že od té chvíle patří jedna ze dvou Schneiderových ordinací jemu. Hugo Schneider si velmi rychle uvědomil, že pro Židy již není v Rakousku bezpečno, a přestože byl, dle pozdějších vzpomínek syna Hanse, velmi opatrným člověkem, rozhodl se pro riskantní útěk rodiny ze země. Problém nebyl s opuštěním Rakouska, obtížné bylo nalézt zemi, která by je přijala. V červnu 1938 rodina odjela vlakem do Československa, kam vstoupila ilegálně po podplacení českého pohraničníka, a pobývala u jednoho z otcových bratrů v Karviné, otcově rodišti. Ze tří původně hmotně i společensky dobře postavených lidí se tak velmi rychle stali uprchlíci, lidé bez jakýchkoliv nadějí do budoucnosti a bez společenského uznání.

Na konci září 1938 byla podepsána Mnichovská dohoda, na jejímž základě bylo město Karviná připojeno k Polsku. Trojice se tak ocitla ilegálně v další zemi. Ještě předtím se rodiče rozhodli, s vědomím, že své jediné dítě již možná nikdy neuvidí, zajistit pro Hanse místo na kvakerské internátní škole založené pro děti německých a rakouských uprchlíků

[1] Informace z paragrafů 1.1 a 1.2 byly převážně převzaty z publikovaných vzpomínek Hanse Schneidera, které byly nazvány *March 1938–August 1940: A Personal History of My Family During 30 Turbulent Months* [2] a sepsány kolem roku 2000.

v nizozemském Eerde. S cílem získat pro Hanse povolení ke vstupu do Nizozemí a k docházce na zmíněnou školu, psala jeho matka prosebné dopisy adresované do rukou Jacoba Costera-Lucase, člena nizozemského výboru pro pomoc zahraničním dětem. Hans Schneider o těchto dopisech takřka celý život nevěděl, některé z nich se k němu dostaly, až když mu bylo téměř osmdesát let. Citujme útržky z těchto dopisů (Hans Schneider je přeložil z němčiny do angličtiny, viz [2]).

Dear Mrs. Coster, please don't be angry I ask you to speed up the matter. Our situation here is so uncertain that I hardly know whether an acceptance that occurs only after a few weeks would still find us here. We are here completely depend on our relatives who themselves do not know how their situation will develop in the next few weeks. That is why we would be so glad to know that our child has reached safety.

Should this matter be delayed for some time despite our kind efforts then it would help us greatly if you knew of a Dutch family in Poland (in Warsaw or elsewhere) who would be ready to keep Hansl until his departure.

[24. října 1938, Karviná, Polsko]

We received an order to leave this country within 48 hours. This order was then changed; we may stay until November 9. It would be our great good fortune if the matter of Hansl were settled by then. ... We are infinitely grateful to you for your efforts and I wish I could prove this to you some day.

[29. října 1938]

First of all my heartfelt thanks. I can hardly express in words how happy and grateful we are that Hansl has been granted an entry permit … Hansl was intensely looking forward to his getting out of here and it must have been a big disappointment to him …

[9. listopadu 1938]

Hans Schneider musel odjet kvůli získání víza do Varšavy a poté se měl přesunout do Holandska, aniž by vstoupil na území Německa. Znamenalo to odletět nejdříve z Varšavy do Prahy a odtud přímým letem do Amsterdamu. Letadlo do Prahy však kvůli nepřízni počasí nevzlétlo a odlet dalším spojem by znamenal desetidenní čekání na následující let do Amsterdamu, což však nebylo možné, protože žádný hotel by neubytoval osobu bez dokladů. Bylo tedy nutné nalézt způsob, jak posečkat ve Varšavě. Hugo Schneider, jenž svého syna ve Varšavě doprovázel, proto oslovil prvního seriózně vypadajícího muže, kterého potkal na ulici, a poprosil ho o pomoc. Ten je poslal na německé velvyslanectví, kde mohl Hans dočasně pobývat s jednou německou rodinou. Později se ukázalo, že muž, který je na ambasádu odkázal, byl polský policista pracující pro resort pověřený deportací ilegálních cizinců. Hans Schneider s odstupem několika desetiletí vyjádřil názor, že obě instituce byly ve skutečnosti protinacisticky zaměřeny.

1.2 Shledání v Británii

Z Varšavy do Amsterdamu odletěl Hans pravděpodobně 17. listopadu 1938. Rodiče žijící v Karviné byli v té době udáni úřadům a měli být dle předpisů posláni do Německa. Naštěstí se již poněkolikáté ocitli v blízkosti lidí nejednajících dle oficiálních regulí. Místní policie jim umožnila během následujících čtyřiadvaceti hodin uprchnout do polského vnitrozemí, kde žili se vzdálenými příbuznými a čekali na jakákoliv víza – ať britská nebo americká. V dubnu roku 1939 byl Hugo Schneider zařazen mezi čtyřicet rakouských zubařů, kterým byl umožněn vstup do Británie. Z Polska odjeli na lodi a prvních několik měsíců žili v Londýně. Vzhledem k tlaku uprchlických organizací na rozptýlení utečenců do ostatních částí země se Schneiderovi odstěhovali do Edinburghu. Mezitím Hans opustil Nizozemí a 11. srpna 1939 rovněž vstoupil na britské území. Pouhé tři týdny před vypuknutím druhé světové války, po takřka roce osamění, se setkal s rodiči právě v Edinburghu.

Přežití všech členů rodiny a jejich opětovné shledání ve Skotsku považoval Hans Schneider s odstupem let za šťastnou souhru několika náhod a také odvahy jeho otce podstoupit nejistý útěk z Rakouska. Jak uvedl, v kritickém období let 1938 a 1939 si jako dítě nepřipouštěl, že by se s rodiči již nikdy neviděl. Na druhé straně si dodatečně uvědomil, že jeho rodiče jistě museli být takovou myšlenkou neustále pronásledováni. O událostech před rokem 1939 se v rodině již nikdy nemluvilo. Kolem roku 2000 Hans Schneider napsal (viz [2]):

I used to remark "I was born in Edinburgh at the age of 12", a joke with serious content. Until I reached my late sixties, I claimed that I had no recollection whatsoever of the first eleven years of my life – and believed it; my prenatal existence was hard to admit and remains shadowy in spite of a conscious effort to recapture it.

Podotkněme ještě, že rodina, u níž pobýval Hans s rodiči v Karviné, takové štěstí neměla. Bratr Huga Schneidera se spolu s manželkou a malým synem stali obětmi holokaustu.

Bohužel ani štastné shledání v Edinburghu nebylo definitivní šťastnou tečkou za měsíci plnými strachu, nebylo začátkem nového společného života. Hugo Schneider, jenž musel složit nové zkoušky ze stomatologie, aby mohl opět vykonávat svou profesi, byl označen britským soudem za *příslušníka nepřátelského státu* ("*friendly enemy alien*"), stejně jako všichni ostatní němečtí a rakouští muži-uprchlíci žijící v Edinburghu. Úspěchy postupujícího Německa byly totiž často připisovány německým vyzvědačům, údajně přestrojeným za uprchlíky. V roce 1940 byl Hugo Schneider internován na *Isle of Man*. Isabella Schneider, která se již nesnažila vrátit ke kariéře zubní lékařky, musela opustit Edinburgh a spolu s třemi či čtyřmi dalšími ženami obdobného osudu bydlela v jediném pokoji ve městě Glasgow. Tehdy třináctiletý Hans mohl vzhledem ke svému věku (pod šestnáct let) zůstat v Edinburghu. Pobýval přitom u jedné svobodné ženy, která přijala do domácnosti několik rakouských a maďarských dětí, které přijely na britské ostrovy bez rodičů. Hans navštěvoval, aniž by zpočátku uměl jediné slovo anglicky,[2] *George Watson's Boy's College*, jednu z nejlepších edinburských škol, a studium se stalo hlavní náplní jeho života. Během krátké doby se stal nejlepším studentem matematiky ve třídě a do konce života byl vděčný za kvalitní vzdělání, které se mu tehdy dostalo.

Z internace byl Hugo Schneider propuštěn díky své prospěšné profesi mezi prvními, a to v srpnu 1940. Následně si v Edinburghu vybudoval ordinaci, a tak konečně začal společný život rodiny Schneiderů v Británii. Edinburgh se později stal pro oba Hansovy rodiče místem jejich skonu. Tak jako se oba narodili ve stejném roce (1897), tak také téhož roku (1967) zemřeli.

I na sklonku života Hans Schneider stále pociťoval vděk Británii za její odhodlání bojovat proti Hitlerovi. Ve svých vzpomínkách o prožité válce napsal (viz [2]):

---

[2] Poznamenejme, že Hans Schneider nikdy neuměl česky.

For a teenager, this was an exciting time; though I was an avid leader of newspapers, I did not realize the full horror of it until the war was over.

1.3 Poválečná léta v Evropě

Po absolvování střední školy se Hans Schneider přihlásil k vysokoškolskému studiu na *University of Edinburgh*, které ukončil s vyznamenáním roku 1948. Ještě před absolutoriem se 6. ledna 1948, ve svých dvaceti letech, oženil s Miriam Wieck (nar. 1925) a v témže roce se jim narodilo první dítě, dcera Barbara Anne (více informací o ženě Miriam, o slavné hudební rodině, z níž pochází, a o dětech manželů Schneiderových viz samostatná pasáž níže).

Hans Schneider začal nejprve pracovat pro edinburskou *Royal Observatory*, odkud byl však v roce 1950, tj. během prvních dvou let, propuštěn poté, co rozbil nový, špičkový přístroj. Po této zkušenosti se navrátil ke studiu matematiky na *University of Edinburgh*, kde mu byl školitelem během doktorského studia Alexander Craig Aitken (1895–1967), spoluautor jedné z prvních monografií o teorii matic.[3] Aitkenovo vedení disertační práce však bylo víceméně formální, protože se dvojice téměř nestýkala. Hans Schneider při různých příležitostech rád opakoval, že dostal od svého školitele v podstatě jen jednu radu, a to v podobě stručné odpovědi na vznesený odborný dotaz: "*Read Frobenius!*" Byla to pouhá dvě slova, která však velkou měrou ovlivnila odborné směrování Hanse Schneidera v jeho celém profesním životě, který byl zasvěcen lineární algebře (více viz dále). Vedle Aitkena byl Schneider, dle svých slov, v počátcích své kariéry nejvíce ovlivněn Helmutem Wielandtem (1910–1986), Aleksandrem Markovičem Ostrovskim (1893–1986), Alstonem Scottem Householderem (1904–1993) a nejvíce ze všech Olgou Taussky-Todd (1904–1993), rodačkou z Olomouce.

Hans Schneider byl během doktorského studia pod časovým tlakem, který vyplýval z očekávaného narození dalšího potomka. Disertační práci *Matrices with non-negative elements* tak napsal za pouhých osmnáct měsíců. Po její obhajobě v roce 1952 získal místo na *Queen's University of Belfast* v Severním Irsku. S výjimkou ročního působení na *Washington State University* zde zůstal až do roku 1959, kdy se rodina, tehdy již s třemi dětmi ve věku jedenáct, devět a sedm let, přestěhovala do zámoří.

1.4 *University of Wisconsin* v Madisonu

Po jedenácti letech (1927–1938) prožitých v poklidu v Rakousku, po několika bouřlivých měsících strávených postupně v Československu, Polsku a Nizozemí útěkem před Hitlerem a po dvaceti letech (1939–1959) sbírání životních zkušeností ve Spojeném království, se novým domovem Hanse Schneidera staly Spojené státy americké, konkrétně město Madison ve státě Wisconsin.[4] Prozraďme již nyní, že nové akademické působiště na *University of Wisconsin* bylo současně Schneiderovým trvalým pracovištěm posledním. Na univerzitě postupně působil v roli odborného asistenta (1959–1961), docenta (1961–1965) a profesora (1965–1988).[5] Následně byl titulován *James Joseph Sylvester Professor* (1988–1993) a po oficiálním „odchodu do důchodu“[6] v roce 1993 *James Joseph Sylvester Emeritus Professor*.

---

[3] Turnbull H. W, Aitken A. C.: *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie&Son, Ltd., London, Glasgow, Bombay, 1932; další vydání: 1945, 1948, 1950, 1952; reprint: Dover, New York, 1961, 2005.
[4] Jako svou státní příslušnost uváděl Hans Schneider USA a UK.
[5] V druhé polovině šedesátých let zastával dva roky pozici vedoucího katedry matematiky.
[6] Na univerzitě v Madisonu vyučoval ještě na podzim roku 1998, se školou zůstal pevně spjat až do smrti.

Hans chose the name of Sylvester for his named professorship, because of Sylvester's immense contributions to matrix theory, invariant theory, and algebra in general. As you know Sylvester is one of the principal originators, possibly the principal originator, of linear algebra and it was he who introduced the word "matrix" in the mathematical literature and it is the word "matrix" that is on Hans' Wisconsin license plate.

(viz [4], str. 3–16)

Na přelomu jara a léta roku 2014, s vědomím blížící se smrti, Hans Schneider napsal a na své webové stránce vystavil svůj vlastní nekrolog nazvaný *Last Words of Hans Schneider* [3]. V něm správně odhadl přibližnou dobu svého skonu, v místě neznámého přesného data úmrtí ponechal tři tečky:

This obituary was written by Hans, who is terminally ill but still alive, as of May 31, 2014.

Hans Schneider, a research mathematician who devoted much of his academic life to the revival of the classical field of linear algebra (aka matrix theory), died on ... aged 87.

Hans Schneider zemřel na následky rakoviny jícnu dne 28. října 2014, tři měsíce před svými osmaosmdesátými narozeninami.[7]

2 Rodinné zázemí, zájmy

2.1 Manželka Miriam

Manželka Miriam se narodila roku 1925 v německém Königsbergu do slavné hudební rodiny. Její rodiče, Hedwig (rozená Hulisch) a Kurt Wieck, byli zakladatelé populárního hudebního tělesa *Königsberger Streichquartett*. Protože Hedwig Wieck byla Židovka, postihl Miriam podobný osud jako jejího budoucího manžela. V roce 1939 byla jedním z přibližně tisíce dětí, které byly zachráněny díky humanitární pomoci zvané *Kindertransport*. Wieckovi získali volné místo na těchto transportech dětí ve vlacích či na lodích do Británie pouze pro jediné dítě. Ze svých dvou dětí vybrali raději starší Miriam než mladšího Michaela, neboť věděli, že „adoptivní" rodiny z finančních důvodů (nižší výdaje na vzdělání) raději přijmou děvčátko než chlapce. Miriam odjela v létě roku 1939. Ve Skotsku se poznala s Hansem Schneiderem. Pracovala jako houslistka, hrála v *Hallé Orchestra* pod slavným dirigentem Johnem Barbirollim (1899–1970). Ve své hudební kariéře pokračovala i po odchodu do zámoří, stala se členkou *Madison Symphony Orchestra* a věnovala se rovněž výuce hry na housle. Její bratr Michael (nar. 1928) přežil pobyt v koncentračním táboře. Stal se známým německým houslistou (koncertní mistr v *Stuttgarter Kammerorchester*). V roce 1989 publikoval vzpomínkovou knihu *Zeugnis vom Untergang Königsbergs*, která byla přeložena do ruštiny a angličtiny (*A Childhood under Hitler and Stalin: Memoirs of a "Certified Jew"*) a stala se bestsellerem.

2.2 Děti Barbara Anne, Peter John, Michael Hugo

Ve své matematicko-hudebně založené rodině vychovali Miriam a Hans Schneiderovi tři děti. Nejstarší Barbara Anne (nar. 1948) šla ve své profesi nejdříve ve šlépějích matky, profesionálně hrála na housle v *Calgary Philharmonic Orchestra*, později se vydala na

[7] K „mrazivému" odhadu vlastní smrti ještě dodejme jednu citaci z nekrologu [3]: *The 19th meeting of the Society will take place [was held] in Korea in August 2014.*

dráhu vědeckou, pracovala na *Faculty of Communication and Culture* na *University of Calgary* (studium mezilidské komunikace, schizofrenie apod.). Zajímavé je, že rovněž její manžel Daryl Caswell zvládl propojit dvě profese. Vystudoval inženýrství a hudbu, což ho přirozeně nasměrovalo k problematice akustiky. Působil na *Faculty of Engineering* na *University of Calgary* a zároveň hrál v *Calgary Philharmonic Orchestra* či *Red Deer Symphony Orchestra* (hra na roh). Jejich dětmi jsou David a Daniel.

Peter John (nar. 1950), druhé dítě Schneiderových, se stal filmovým a divadelním producentem. Byl vedoucím pořadatelem *Olympic Arts Festival* konaného při olympijských hrách v Los Angeles (1984). Znám je především jako první prezident společnosti *Walt Disney Feature Animation*, pod jeho vedením vznikla řada celovečerních animovaných filmů ověnčených cenami (Oscar, Zlatý glóbus). S jeho jménem jsou spjaty například filmy *Malá mořská víla*, *Kráska a zvíře*, *Aladin* či *Lví král*. Později založil vlastní produkční společnost a podílel se například na realizaci filmu *Sestra v akci* s Whoopi Goldberg v hlavní roli. S manželkou Hope vychoval Peter děti Hannah a Rebeccu.

Nejmladší Michael Hugo (nar. 1952) se stal matematikem, několik článků sepsal i se svým otcem. S ženou Laurie mají dvě hudebně nadané děti, Carson Rose a Kurta.

2.3 Zájmy

Vedle matematiky uvedl Hans Schneider mezi svými zájmy především hudbu (operu), cestování a také procházky při úplňku naboso po Lanikai Beach.

3 Akademická dráha

3.1 Cesta k lineární algebře

Jak již bylo řečeno, odborné zaměření Hanse Schneidera bylo ovlivněno jeho školitelem Aitkenem a „rozkazem“ číst práce Georga Ferdinanda Frobenia (1849–1917). Podstatnou roli pro rozhodnutí věnovat se naplno lineární algebře sehrála příhoda z doby, kdy se Hans Schneider ucházel o místo na univerzitě ve Wisconsinu. Tou dobou místní univerzitu navštívil jeden slavný ruský algebraik, který, jak se Hans Schneider dozvěděl, řekl jednomu z členů přijímací komise, že znalost lineární algebry je očekávána od každého matematika, ale není to disciplína k výzkumu. Hans Schneider byl přesto na místo vědeckého pracovníka přijat a tato historka ho ovlivnila natolik, že se odhodlal věnovat své úsilí „obhajobě“ v té době nepříliš velebené lineární algebry. Jeho neúnavná činnost v oboru mu vynesla dokonce přezdívku *Mr. Linear Algebra*.

Ještě dodejme, že *University of Wisconsin* byla (a i ve třetím tisíciletí stále je) školou s významnou tradicí v lineární algebře. Mezi důležité osobnosti oboru působící na univerzitě patřil například Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961).

3.2 Celoživotní oddanost lineární algebře

Hans Schneider napsal okolo sto sedmdesáti odborných prací, a to s přibližně osmdesáti spoluautory.[8] Poslední článek publikoval pouze několik měsíců před smrtí. Jméno Hanse Schneidera je neodmyslitelně spjato především s Perronovou-Frobeniovou teorií pro nezáporné matice. Schneiderovy teoretické znalosti v tomto oboru poskytly základy

[8] Seznam většiny prací včetně jejich skenů (či skenů úvodních stránek) je dostupný z [1]. Poznamenejme ještě, že mezi Schneiderovými spoluautory figuruje český matematik Miroslav Fiedler.

pro vybudování systému vyhledávání internetových stránek pomocí celosvětově známého Googlu. O svém vztahu k uvedené teorii proslovil roku 1997 přednášku *Why I love Perron-Frobenius*, jejíž jednotlivé části se nazývají například *Why I fell in love*, *Why will P-F live 200 years?* či *Why I stayed married to Perron-Frobenius*.[9] Jeho další odborné zaměření vystihl kolega Richard A. Brualdi těmito slovy (viz [4], str. 4):

The different areas of linear algebra to which he has made fundamental contributions are almost too numerous to mention: nonnegative matrices, M-matrices, norms, numerical ranges, combinatorial and graph-theoretic matrix theory,[10] Jordan and spectral theory, inertia and stability theory, matrix scalings, cone preserving maps, matrix polytopes, etc. This is phenomenal record. At times, Hans strayed and thought he was a ring theorist or a semi-group theorist, but he got back on track before long.

Celosvětově známá je Schneiderova editorská činnost. V roce 1972 převzal od Alana Hoffmana (nar. 1924) pozici hlavního editora časopisu *Linear Algebra and Its Applications*. V uvedeném roce vycházel časopis po čtyři roky a skomíral. Když Hans Schneider po dlouhých čtyřiceti letech (roku 2012) z funkce odcházel, jednalo se již o celosvětově uznávané, impaktované periodikum nejvyšší kvality, které každoročně přijímalo okolo 1200 příspěvků a publikovalo přibližně 5000 stran. Hans Schneider byl rovněž editorem časopisů *Linear and Multilinear Algebra*, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, *SIAM Journal Algebraic and Discrete Methods* a sebraných prací Helmuta Wielandta.

V roce 1987 založil spolu s několika kolegy mezinárodní společnost *Matrix Group*, ze které se o tři roky později etablovala známá *International Linear Algebra Society (ILAS)*. Dnes má společenství přibližně čtyři sta členů ve více než dvaceti zemích světa a publikuje dva časopisy.

Pospolitost lineárních algebraiků po celém světě podporoval Hans Schneider i svými častými cestami mimo území USA. Jeho profese jej zavedla například do Atén, Bad Kissingenu, Dunedinu, Haify, Chemnitzu, Lisabonu, Moskvy, Oxfordu, Rotterdamu, Šanghaje, Toronta, Valencie či rodné Vídně. Kromě výše uvedeného pobytu na *Washington State University* byl na dlouhodobých stážích na mnoha dalších univerzitách po celém světě, jmenujme alespoň *Israel Institute of Technology* ve městě Haifa, *Universität Würzburg* a *University of Toronto*.

Jak sám přiznal, výuka základních kurzů pro vysokoškolské studenty ho příliš nenaplňovala. O to více se věnoval svým doktorandům, kterých odvedl (všechny na *University of Wisconsin*) v letech 1963 až 2000 celkem sedmnáct.[11]

Od roku 1993 je nepravidelně (přibližně jednou za tři roky) udělováno ocenění *Hans Schneider Prize* za mimořádné výsledky v lineární algebře, resp. za celoživotní přínos této disciplíně. Jedním ze tří laureátů ceny z roku 1993 byl český matematik Miroslav Fiedler (nar. 1926).

---

[9] Více viz http://www.math.wisc.edu/hans/talks.html.

[10] Hans Schneider se (především s Danielem Hershkowitzem) v rámci této problematiky věnoval studiu souvislostí mezi určitými posloupnostmi zavedenými v teorii grafů a tzv. *Weyrovou charakteristikou* definovanou řečí teorie matic v osmdesátých letech 19. století českým matematikem Eduardem Weyrem (1852–1903).

[11] Seznam jejich jmen a názvů disertačních prací viz http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=8295.

4 Ohlédnutí za vlastním životem

Místo závěru citujme slova, která Hans Schneider dopsal ke svým vzpomínkám [2] v červnu 2014:

I am writing this coda as I am sitting on the porch of our beautiful home as my life is ending for I have terminal cancer. I've had a good life with a loving wife of 66 years and three children we can be proud of. Thinking of the turbulent years described above, I strongly reject the term "holocaust survivor" as applied to me. It's an insult to those millions who were murdered and to the millions who died fighting Hitler's tyranny. It is a word properly applied to a person who suffered deportation and the horrors of the camps and yet survived. Call me a person who escaped the holocaust if you wish. The same applies to my wife Miriam who was born in Koenigsberg and left Germany on a Kinderstransport in July 1939.

Finally, my deepest regret is that I failed to tell my parents how much I owe them.

Literatura

[1] *Hans Schneider's Home Page* [online]. Poslední revize 30. března 2012 [cit. 20. dubna 2015].

http://www.math.wisc.edu/hans/

[2] Schneider H.: *March 1938–August 1940: A Personal History of My Family During 30 Turbulent Months*, Voices of the Kinder, 2000, 2001, dodatek 2006 (dostupné online na http://www.kindertransport.org/voices/schneider_personalhistory.htm).

Další dodatek 2014 – viz *A Personal History* (online, dostupné z [1]).

[3] Schneider H.: *Last Words of Hans Schneider*, 2014 (online, dostupné z [1]).

[4] Brualdi R. A.: *A tribute to Hans Schneider*, Linear Algebra and Its Applications 302-303(1999), str. 3–16.

Poděkování

Děkuji Hansi Schneiderovi za jeho pomoc a podporu při psaní mé dizertace a poté i monografie o počátcích teorie matic v českých zemích.

Adresa

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *stepanov@karlin.mff.cuni.cz*

BOLZANOVA MATEMATICKÁ VYLEPŠENÍ

JAN ZEMAN

Abstract: In this text we mention some of the improvements of Euclid's *Elements*, that Bernard Bolzano proposed in his book *On the mathematical method*. We introduce briefly his personality and connect his vision of geometry without figures to the mathematics at the end of the 19th century.

1 Úvod

Bolzanova stať *O matematické metodě* [1] byla vydána v českém překladu Marty Vlasákové v roce 2012. Překlad vycházel z německého vydání Jana Berga *Von der mathematischen Lehrart*. Součástí svazku je studie překladatelky, týkající se hlavně zasazení Bolzanova díla do dějin logiky, díky které kniha dobře rozšiřuje také současnou českou literaturu, věnující se Bolzanovskému výzkumu.

Bolzano začal psát tento svůj text kolem roku 1833 jako úvod k zamýšlenému rozsáhlému spisu *O veličinách* (*Grössenlehre*), který ale nikdy nedokončil. Nejprve v tomto úvodu shrnul svůj logický systém, známý z jeho *Vědosloví*, poté ho použil k prokázání možných zlepšení metody, která je užita v Eukleidových *Základech* [2]. V této práci bychom některá jeho vylepšení chtěli představit a nahlédnout tendence, které Bolzano v matematice odhalil a které propukly naplno na konci 19. století.

2 Kontext

Nejprve stručně představme osobnost Bernarda Bolzana (1781–1848), významného pražského matematika, filosofa a teologa (podrobněji viz [3, str. 11nn]). Narodil se do rodiny Bernarda Pompeia Bolzana, původem z Itálie, a Marie Cecilie, rozené Maurerové, z pražské německé rodiny; němčina byla také jeho mateřským jazykem. Od mládí byl chatrného zdraví, což výrazně ovlivnilo jeho životní osudy.

V roce 1796 Bernard Bolzano nastoupil na pražskou univerzitu. Nejprve absolvoval povinné tříleté studium filosofie, během něhož se již projevilo jeho matematické nadání, věnoval se i fyzice či astronomii. V souvislosti s výchovou své mladší sestry, která mu však brzy zemřela, se též zajímal o pedagogiku. Před definitivním rozhodnutím pro studium teologie věnoval ještě jeden akademický rok dalšímu vzdělávání ve vyšší matematice, ale také ve filosofii, fyzice a chemii. Poté nastoupil na teologii, kterou dokončil v roce 1804. Ve stejném roce získal na univerzitě místo učitele náboženství, k němuž se pojila povinnost promlouvat každý týden k akademické mládeži. Tyto jeho tzv. exhorty (z nichž část vyšla tiskem) se staly hojně navštěvovanými a univerzitní prostory nestačily pro posluchače. Jeho věhlas jako duchovního kazatele dosáhl i daleko za hranice Prahy na český venkov.

Jelikož Bolzano neučil podle předepsané učebnice, byl z místa propuštěn a nemohl publikovat ani se účastnit univerzitního života. V té době mu též zemřel bratr Petr Eduard a z původně dvanáctičlenné rodiny zbyl jen on a bratr Jan. Bernard Bolzano se přesunul z Prahy do Těchobuzi, kde napsal svá největší díla, *Vědosloví*, *Paradoxy nekonečna* a *Athanasii*, a kde také začal psát svůj spis *O veličinách* včetně jeho úvodu *O matematické metodě*. Své poslední dny pak prožil v domě svého bratra v Celetné ulici, kde má dnes pamětní desku.

3 O matematické metodě

3.1 Logický systém

Uveďme nyní stručně přehled několika základních termínů, které nám budou sloužit k naznačení použité metody výstavby logiky.

Větou o sobě (*objektivní větou*) Bolzano rozumí nikoli větu gramatickou, ale její smysl, který musí být buď pravdivý nebo nepravdivý. *Pravda o sobě* je pravdivá věta o sobě. *Myšlená věta* (*subjektivní věta*) je pak uchopením věty o sobě v rozumu myslící bytosti. *Představa o sobě* je část věty o sobě, která sama není větou o sobě, tj. která nemá pravdivostní hodnotu. Představa může být buď *jednoduchá*, nebo může být *složená* z dalších představ, které tvoří *obsah* původní představy. Např. představa rovnostranný trojúhelník (viz [1, str. 25]) obsahuje mj. tyto představy: rovnost, strana, tři, úhel. Neméně podstatné je, v jakém vzájemném vztahu tyto podřazené představy jsou. Příkladem může být představa čtyřúhelníku se shodnými stranami a různými úhly oproti představě čtyřúhelníku se shodnými úhly a různými stranami, kde obě představy mají sice tentýž obsah, ale jiný význam. *Předmětem představy* je to, co je představou představováno, co pod ni spadá. Např. představa (reálný) kořen rovnice $x^3 - 1 = 0$ má za předmět číslo 1, představa planety sluneční soustavy má za předměty Merkura, Venuši, Zemi, Mars, Jupitera, Saturna, Urana a Neptuna, které tvoří *rozsah představy*. Představa však může být dle definice i neexistující (*bezpředmětná*), např. pojem kulatý čtyřúhelník nebo racionální kořen rovnice $x^2 - 2 = 1$ (viz [1, str. 27]). *Názor* je taková představa, která je jednoduchá a má jediný předmět. *Pojem* je potom taková představa, která není názorem. *Čistá pojmová věta* je taková věta, která obsahuje pouze pojmy.

Z výše uvedeného je tedy zřejmé, že Bolzano sám používá původně matematické metody i pro výstavbu logiky. V knize *O matematické metodě* je v této věci uvedeno jen to nejzákladnější. Podrobněji je logický systém vybudován v díle *Vědosloví*.

3.2 Metodologická vylepšení *Základů*

Bernard Bolzano již v úvodní poznámce potvrzuje kvality *Základů* a přiznává hodnotu systému důkazů. Ty jsou pro konkrétní větu provedeny vždy pomocí vět, které jsou dokázány dříve. Pozitivně hodnotí, že důkaz je uveden důsledně po každém tvrzení a že tyto důkazy nejsou neúplné, ale opravdu rigorózní, prostřednictvím přivedení tvrzení k evidenci – obstarání názoru. V případě geometrie to znamená většinou doplnit obrazec do nějakého rozsáhlejšího obrazce, ze kterého bude tvrzení patrné.

První jeho námitkou je, že se Eukleides nezabývá dostatečně důsledně samotnými základy geometrie. Právě u základních pojmů vědy navrhuje Bolzano nespoléhat se jen na intuici, ale provádět důsledný pojmový rozbor, což oddělí výklad přísně vědecký od výkladu pouze populárního. V případě geometrie jde o pojmy jako bod, prostor, veličina, které měly v učebnicích jen vágní definici (viz [1, str. 43]). Přitom ihned přichází s nabízející se výtkou, proč by vlastně měl člověk objasňovat, co je všem beztak jasné, a odpovídá, že kromě jasnosti se musí matematika snažit i o zřetelnost, tedy prokázání toho, z kterých dílčích pojmů si nový pojem nevědomky skládáme.

Například při výkladu čtverce se matematik nesmí spokojit jen s konstatováním, že nakreslený obraz je čtverec, ale vždy musí přivést pojem ke zřetelnosti definicí, že čtverec je čtyřúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly shodné. Pokud toto není možné, je nutné se spokojit s objasněním pojmu. Nabízejícím se prostředkem k tomu je sepsání vět, ve kterých se daný pojem vyskytuje, pod sebe, čímž bude jeho význam patrný tak, že na jeho místě nemůže být myšlen žádný jiný pojem.

Kromě povinnosti objasnit každý nový pojem Bolzano požaduje, aby byl objasněn i každý nový matematický znak, který pro jejich označení používáme. Jako příklad uvádí mocniny a ptá se, co nás opravňuje používat znaky $a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}$ (viz [1, str. 41]). Mocnina čísla má přece úplně jiný význam. Ani ze symbolu +, který odpovídá slovu plus, nekonstruuje matematik pojem sčítání.

Od pojmů přechází Bolzano k analýze důkazů, které musí vycházet z čistých pojmových pravd. V tomto však doporučuje, aby se matematikové věnovali spíše objevování, pokud k důsledné analýze objektivních souvislostí nejsou přirozeně talentovaní. V případě Eukleida by to znamenalo průzkum možnosti, že také např. postuláty možná stojí na dalších tvrzeních, která je třeba dokázat a kterých mohou být možná i stovky (viz [1, str. 61]). I postuláty mají být dokazovány (tedy má být dokázáno, že ostatní věty dané teorie bez nich nelze vyvodit). Důkaz by měl v přísně vědeckém výkladu vycházet z čistých pojmových pravd.

Tématem, které následuje, je správné pořadí pravd. To by mělo splňovat dvě pravidla (viz [1, str. 60]):

1. Jednodušší pravda předchází složitější.
2. Při stejném stupni složitosti objektivnější předchází konkrétnější.

Složitost je zde míněna v tom kvantitativním smyslu, z kolika dalších představ se pravda skládá. Jako příklad Bolzano uvádí větu o obsazích podobných mnohoúhelníků (mají se k sobě jako druhé mocniny jejich stran), která by měla být uvedena před toutéž větou pouze pro trojúhelníky. Dalším příkladem je binomická věta (viz [1, str. 60])

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \cdots,$$

na níž chce Bolzano demonstrovat případ, kdy věta sice platí pro n reálné i celé, ale věta pro n celé je jednodušší (v tom smyslu, že je složena z méně dalších vět a pojmů) než tatáž věta pro n reálné, a proto by měla tato věta pro n celé být uvedena před větou pro n reálné. Třetím příkladem v této věci je konstrukce rovnostranného trojúhelníka. To, že existuje bod C nad úsečkou AB, který má od obou bodů A a B stejnou vzdálenost AB (viz [1, str. 51] a [2, str. 47]), je předpokladem pro to, že se dvě kružnice se středy v bodech A a B a poloměrem AB v tomto bodě C protnou. Nikoliv naopak, jak by se zdálo, že bod C existuje, protože se kružnice protly. Vlastnosti prostoru (existence tohoto bodu C) tak musejí ve výkladu předcházet konstrukci.

Bolzano tvrdí, že ve správném pořadí se objektivní souvislost mezi pravdami ukáže čtenáři naprosto přirozeně. Jako příklad, kdy je objektivní souvislost mezi pravdami v rozporu s pořadím, v jakém pravdy poznáváme, uvádí gravitační zákon. To je čistá pojmová pravda, o které se každý rozumný člověk zákonitě dozví na základě zkušenosti, totiž poznáním zemské tíže (viz [1, str. 35]). Při výkladu vědy, pokud se má usilovat o objektivitu, je nutné, aby pravda právě vyslovovaná vyplývala z pravd dříve zmíněných, nebo aby obsahovala pouze pojmy dříve definované. V některých případech je toto správné uspořádání v *Základech* porušeno.

Bolzano následně formuluje hypotézu, že názor možná není v geometrii vůbec nutný a že celou geometrii lze vyvodit z axiomů pouze pomocí určité množiny odvozovacích pravidel (viz [1, str. 56]). Názor totiž selhává v kontaktu s nekonečnem, což dokládá jím definovaná funkce, která je na celém intervalu spojitá, ale přesto nemá v žádném bodě derivaci. To bylo v matematice jeho doby nepředstavitelné. Důkazy pomocí evidence a názoru, které jsou u Eukleida pro geometrii klíčové, by tak plnily jen pomocnou funkci. Všechny věty určité teorie by mohly být odvoditelné z určité množiny postulátů pomocí několika odvozovacích pravidel, logických operací. Toto by navíc mohlo být aplikováno na jakoukoli jinou vědu (viz [1, str. 48]).

Na konci 19. století se požadavek nové axiomatizace geometrie (a v souvislosti s paradoxy teorie množin i celé matematiky) jevil již jako nutnost. Geometrie má být vytvořena pouze na základě logiky, názor téměř nebude potřeba, to, co uvidíme na papíře, nebude geometrický objekt, ale pouze demonstrace jeho vlastností (viz [4, str. 55]). Tento přístup umožní obejít spory a dokázat vzájemnou nezávislost, úplnost a bezespornost systému axiomů. Po Davidu Hilbertovi (1862–1943), který takto axiomatizoval především aritmetiku a geometrii, aplikovali ve dvacátém století jiní vědci stejný mechanismus i na biologii a genetiku. Bez přímé návaznosti se tak uplatňují zde zmíněná Bolzanova vylepšení Eukleidovy axiomaticko-deduktivní metody.

4 Závěr

Geometrie bez názoru, navržená Bolzanem, bude aktuální na konci 19. století. Má však za následek to, před čím varoval Henri Poincaré (viz [5, str. 31]), že dokonalé čistoty dosáhne matematika jen za cenu vzdálení se od skutečnosti. Dle Petra Vopěnky jsme i Bolzana navykli nahlížet z hlediska vítězství matematického formalismu. Byla však možná i jiná východiska (viz [6, str. 60]).

V dlouhodobější perspektivě budeme hledat spojení matematického formalismu konce 19. století s myšlenkami Bernarda Bolzana. Další možností je prozkoumání důvodů, které k zájmu o Bolzanovu osobnost vedly Martina Jaška, objevitele zmíněné nederivovatelné spojité funkce v Bolzanově pozůstalosti.

Literatura

[1] Bolzano B.: *O matematické metodě* (překlad M. Vlasáková), Filosofia, Praha, 2012.

[2] Eukleides: *Základy, knihy I–IV* (komentované P. Vopěnkou), Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010.

[3] Vlasáková M.: *Životaběh B. Bolzana,* in Trlifajová K. (ed.): *Osamělý myslitel Bernard Bolzano*, Filosofia, Praha, 2006.

[4] Šebestík J.: *La dispute de Bolzano avec Kant: fragment d'un dialogue sur la connaissance mathématique*, Philosophiques 30/1 (2003), str. 47–66. http://id.erudit.org/iderudit/007731ar

[5] Poincaré H.: *Číslo – prostor – čas* (překlad Jiří Fiala), OPS, Kanina, 2010.

[6] Vopěnka P.: *Návrat k Bolzanovi*, in Trlifajová K. (ed.): *Osamělý myslitel Bernard Bolzano*, Filosofia, Praha, 2006.

Adresa

Ing. Jan Zeman
Katedra filozofie, Filozofická fakulta
Západočeská univerzita v Plzni
Sedláčkova ulice 19
306 14 Plzeň
e-mail: *janzeman@email.cz*

OBSAH

I. Vyzvané přednášky

II. Konferenční vystoupení

Přehled dosud vyšlých konferenčních sborníků

- M. Bečvářová (editorka): *27. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006*. Sborník sylabů, Praha, 2006, 74 stran.

- M. Bečvářová (editorka): *28. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Jevíčko, 24. 8. – 28. 8. 2007*. Sborník sylabů, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2007, 120 stran, ISBN 978-80-7378-016-6.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, 191 stran, ISBN 978-80-7378-048-7.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2009, 242 stran, ISBN 978-80-7378-092-0.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2010, 291 stran, ISBN 978-80-7378-128-6.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *32. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 26. až 30. 8. 2011*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2011, 301 stran, ISBN 978-80-7378-172-9.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *33. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 24. 8. až 28. 8. 2012*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2012, 303 stran, ISBN 978-80-7378-208-5.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *34. mezinárodní konference Historie matematiky, Poděbrady, 23. až 27. 8. 2013*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2013, 201 stran, ISBN 978-80-7378-234-4.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *35. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. až 26. 8. 2014*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2014, 273 stran, ISBN 978-80-7378-265-8.

Elektronické verze výše uvedených sborníků a další informace o mezinárodních konferencích Historie matematiky jsou dostupné na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

36. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Poděbrady, 21. až 25. 8. 2015

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 491. publikaci

Z připravených předloh
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání
Praha 2015

ISBN 978-80-7378-297-9