34. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Poděbrady, 23. až 27. 8. 2013

Praha **2013**

Recenzovali: L. Boček, Z. Halas, M. Hykšová, B. Klemp-Dyczek, F. Kuřina, V. Moravcová, L. Moravec, J. Rataj, M. Rembierz, A. Slavík, M. Šimša, M. Štěpánová, L. Vízek, R. Wolak.

ISBN 978-80-7378-234-4

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty dvou vyzvaných přednášek, texty delších a kratších sdělení, které programový výbor obdržel do 1. května 2013. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny.[1] Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili do 1. června 2013.

Sborník vznikl s finanční podporou Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT v Praze.

V první části sborníku jsou otištěny rozšířené texty hlavních přednášek, o něž byli požádáni zkušení přednášející, kteří se zabývají matematikou, její historií, vyučováním a aplikacemi.

Ve druhé části sborníku jsou publikovány příspěvky jednotlivých účastníků, které nejsou monotematicky zaměřeny, neboť konference se snaží poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*, studentům i všem dalším zájemcům o matematiku a její historii.[2]

Program letošní konference je poměrně pestrý. Věříme, že každý najde témata, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a ke svému studiu.

Podrobnější informace o letošní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Martina Bečvářová a Jindřich Bečvář

V Praze, v červnu 2013

[1] Jednotlivé příspěvky neprošly jazykovou korekturou.
[2] Zařazen nebyl příspěvek L. Bočka a F. Kuřiny věnovaný Eduardu Čechovi a jeho přínosu k vyučování matematice, neboť autoři vzhledem k Čechovu výročí připravili samostatnou knížku, která vyjde v edici *Ovlivnili vyučování matematice*.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- Balková Lubomíra
- Baštinec Jaromír
- Bálint Vojtech
- Bálintová Anna
- Bálintová Dagmar
- Bečvář Jindřich
- Bečvářová Martina
- Boček Leo
- Bočková Jana
- Bolek Katarzyna
- Ciesielska Danuta
- Čižmár Ján
- Di Paola Benedetto
- Domoradzki Stanisław
- Guttenová Danuše
- Halas Zdeněk
- Hofman Jiří
- Hykš Oldřich
- Hykšová Magdalena
- Kalousová Anna
- Karpińska Karolina
- Křížová Kristýna
- Kuřina František
- Kvasz Ladislav
- Kvaszová Milena
- Landsman Bohumil
- Lengyelfalusy Tomáš
- Lengyelfalusyová Dana
- Línek Vítězslav
- Marčoková Mariana
- Marek Jaroslav
- Melcer Martin
- Moravcová Vlasta
- Moravec Luboš
- Novák Stanislav
- Otavová Miroslava
- Pelantová Edita
- Pogoda Zdzisław
- Riečan Beloslav
- Riečanová Eva
- Sklenáriková Zita
- Slavík Antonín
- Svobodová Milena
- Sýkorová Irena
- Šatný Petr
- Šolcová Alena
- Štěpánová Martina
- Ulrychová Eva
- Vašíček Karel
- Vacková Věra
- Veselá Běla
- Veselý Jiří
- Vízek Lukáš
- Vojkůvková Iva
- Więsław Witold
- Wójcik Wiesław
- Zahradník Jan
- Zahradníková Jana

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

Bálint V.: ***Z histórie kombinatorickej geometrie***
Marčoková M.: ***Josef Korous (1906–1981) a jeho prínos pre rozvoj teórie ortogonálnych polynómov***

II. Konferenční vystoupení (20 minut)

Balková L.: ***Zapomenuté algoritmy aritmetických operací***
Bálintová A.: ***Al Kashi, nasledovník Pytagora***
Bečvářová M.: ***J. S. Vaněček a L. Cremona (nově objevená korespondence)***
Boček L., Kuřina F.: ***Eduard Čech a vyučování matematice***
Ciesielska D.: ***Teoria Galois w spuściźnie Kretkowskiego***
Čižmár J.: ***Základy geometrie v 20. storočí***
Di Paola B.: ***Filippo Spagnolo and his merits in the mathematical education***
Domoradzki S.: ***Doktoraty matematyczne Polaków we Francji przed 1939 r.***
Kalousová A.: ***Cykloida v Buffonově řešení úlohy o jehle***
Karpińska K.: ***Nauczanie matematyki w szkołach średnich Torunia w XIX w.***
Křížová K.: ***Pantograf***
Kvasz L.: ***Táles, Pytagoras a Euklides a vznik matematiky ako deduktívnej disciplíny***
Lengyelfalusy T.: ***História maturitných skúšok z matematiky na Slovensku***
Línek V.: ***Geometrie v díle R. A. Fishera***
Marek J.: ***Měření délky poledníku a Boškovičova metoda pro aproximaci dat přímkou***
Novák S.: ***Jakob Steiner a objev inverze***
Otavová M.: ***Pojetí aritmetiky a algebry u Jana Caramuela z Lobkovic***
Pogoda Z.: ***Some remarks about classification of manifolds***
Riečan B.: ***Tibor Neubrunn – život a dielo***
Sýkorová I.: ***Kuttaka***
Šatný P.: ***Historie Cauchyovy funkcionální rovnice***
Šolcová A.: ***Několik cest k minimalizaci forem***
Štěpánová M.: ***Charakteristiky matic a grafů***
Veselý J.: ***Ještě o digitální matematické knihovně***
Vojkůvková I.: ***Nic nového pod sluncem (aneb poučení ze starých knih)***
Wójcik W.: ***Powstanie i rozwój logiki matematycznej w Polsce na początku XX wieku***
Zahradník J.: ***Problémy z geometrie ve sbírce Ioannise Holfelda Exercitationes geometricae***

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 23. 8. 2013

Dopolední program 10:00–12:00
Zahájení konference
Plenární přednáška:
Bálint V.: *Z histórie kombinatorickej geometrie*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Boček L., Kuřina F.: *Eduard Čech a vyučování matematice*
Diskuse

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Veselý J.: *Ještě o digitální matematické knihovně*
Bečvářová M.: *J. S. Vaněček a L. Cremona (nově objevená korespondence)*
Vojkůvková I.: *Nic nového pod sluncem (aneb poučení ze starých knih)*

Sobota 24. 8. 2013

Dopolední program 8:30–9:30
Plenární přednáška:
Marčoková M.: *Josef Korous (1906–1981) a jeho prínos pre rozvoj teórie ortogonálnych polynómov*

Dopolední program 10:00–12:00
Konferenční vystoupení:
Marek J.: *Měření délky poledníku a Boškovičova metoda pro aproximaci dat přímkou*
Šatný P.: *Historie Cauchyovy funkcionální rovnice*
Línek V.: *Geometrie v díle R. A. Fishera*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Riečan B.: *Tibor Neubrunn – život a dielo*
Domoradzki S.: *Doktoraty matematyczne Polaków we Francji przed 1939 r.*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Zahradník J.: *Problémy z geometrie ve sbírce Ioannise Holfelda Exercitationes geometricae*
Čižmár J.: *Základy geometrie v 20. storočí*
Pogoda Z.: *Some remarks about classification of manifolds*

Neděle 25. 8. 2013

Dopolední program 8:30–9:30
Konferenční vystoupení:
Di Paola B.: *Filippo Spagnolo and his merits in the mathematical education*
Bálintová A.: *Al Kashi, nasledovník Pytagora*

Dopolední program 10:00–12:00
Konferenční vystoupení:
Ciesielska D.: Teoria Galois w spuściźnie Kretkowskiego
Wójcik W.: Powstanie i rozwój logiki matematycznej w Polsce na początku XX wieku

Pondělí 26. 8. 2013

Dopolední program 8:30–9:30
Konferenční vystoupení:
Štěpánová M.: *Charakteristiky matic a grafů*
Křížová K.: *Pantograf*

Dopolední program 10:00–12:00
Konferenční vystoupení:
Karpińska K.: *Nauczanie matematyki w szkołach średnich Torunia w XIX w.*
Kvasz L.: *Táles, Pytagoras a Euklides a vznik matematiky ako deduktívnej disciplíny*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Lengyelfalusy T.: *História maturitných skúšok z matematiky na Slovensku*
Sýkorová I.: *Kuttaka*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Otavová M.: *Pojetí aritmetiky a algebry u Jana Caramuela z Lobkovic*
Šolcová A.: *Několik cest k minimalizaci forem*
Krátká vystoupení nereferujících doktorandů a studentů

Úterý 27. 8. 2013

Dopolední program 8:30–9:30
Konferenční vystoupení:
Balková L.: *Zapomenuté algoritmy aritmetických operací*
Kalousová A.: *Cykloida v Buffonově řešení úlohy o jehle*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
Novák S.: *Jakob Steiner a objev inverze*
Závěrečná diskuse
Zakončení

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

Z HISTÓRIE KOMBINATORICKEJ GEOMETRIE

VOJTECH BÁLINT

Abstract: The paper gives an historical overview of combinatorial geometry from its inception to the present. Some problem areas are only briefly mentioned. Highlighted are open problems.

1 Úvod

Podstatná časť výsledkov kombinatorickej geometrie sa zrodila po roku 1940. Je to pomerne krátky čas, ale podrobný prehľad všetkých sem patriacich výsledkov by aj tak zabral mnoho stoviek strán, s dôkazmi viac tisícok. Pokúsim sa preto podrobnejšie podať históriu len najznámejších problémov a niekoľkých mne blízkych problémov z oblasti intuitívnej geometrie. A aby som zvýšil záujem o túto oblasť matematiky, sústredím sa aj na formuláciu otvorených problémov, ktorých je tu viac ako dosť.

Kombinatorická geometria je tá časť matematiky, v ktorej sa skúmajú *extremálne vlastnosti kombinatorického charakteru pre systémy objektov*. Pokiaľ je známe, názov *kombinatorická geometria* prvý raz použil švajčiarsky matematik H. Hadwiger [Had55] v roku 1955. Pre problémy kombinatorickej geometrie je príznačná ich názornosť. Formulácia problému je veľmi jednoduchá a pochopenie otázky obvykle nevyžaduje žiadne špeciálne vedomosti. Lenže práve jednoduchosť formulácie zvádza (niekedy aj renomovaných) matematikov k tomu, že majú tendenciu zaraďovať otvorené otázky kombinatorickej geometrie medzi zábavnú matematiku. Do určitej miery oni aj zábavné sú – s niektorými sa dá zabávať do nekonečna. Riešenie však neraz vyžaduje istú dávku geniality a spôsob riešenia sa mení od problému k problému.

Problematika kombinatorickej geometrie sa dá zadeliť do troch veľkých skupín: problémy typu *packing-covering-tiling*, geometrické problémy vedúce na *teóriu grafov* a problémy *incidencií a usporiadaní*.

V matematike býva zvykom problémy zovšeobecniť. Keď tie všeobecné sú príliš ťažké, tak treba aspoň čiastočne vyriešiť aspoň nejaké špeciálne prípady (pričom sa neraz prihliada aj na praktickú užitočnosť). Častou úlohou v kombinatorickej geometrii je nájsť maximálny (alebo minimálny) počet $\varphi(d)$ objektov pri splnení určitých podmienok, kde parameter d je obvykle dimenzia. V mnohých úlohách je nájdenie presnej hodnoty $\varphi(d)$ enormne ťažké, takže neraz sa nájdu len horné a dolné odhady, ktoré sa potom vylepšujú. Z praktického hľadiska sú však dôležitejšie práve konečné kontajnery resp. konečné počty útvarov a pri takejto optimalizácii asymptotické odhady nehrajú žiadnu úlohu, aj keby boli známe.

Pripomeňme teraz definície niektorých pojmov, ktoré možno nie sú všeobecne známe a ktoré budeme používať.

Nech $\mu(X)$ je miera množiny $X \subset E^d$, kde E^d je d-dimenzionálny euklidovský priestor. Nech J je množina indexov. Hovoríme, že systém množín $M_i \subset E^d, i \in J$, je uložený v množine $M \subset E^d$ práve vtedy, keď žiadna dvojica z toho systému nemá spoločný vnútorný bod a $\bigcup_{i\in J} M_i \subset M$. Číslo $\dfrac{\sum_{i\in J}\mu(M_i)}{\mu(M)}$ nazveme hustota uloženia systému $M_i, i\in J$, v množine M. Ak $M = E^d$, tak hustota uloženia systému množín $M_i \subset E^d, i\in J$, v E^d sa definuje ako limita $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sum_{i\in J}\mu(M_i \cap B^d(r))}{\mu(B^d(r))}$, kde $B^d(r)$ je d-rozmerná guľa s polomerom r a stredom v počiatku. Analogické sú definície pre pokrytia. Základná monografia so všeobecnými výsledkami o tejto problematike je vynikajúca kniha Fejes Tóth László [Fe03], v zozname použitej literatúry však môže záujemca nájsť veľa ďalších odkazov.

Asymptotické porovnávanie dvoch kladných funkcií f, g je zavedené nasledovne. Hovoríme, že $f(n)$ je veľké $O(g(n))$ a píšeme $f(n) = O(g(n))$, ak existuje kladná konštanta C taká, že $f(n) \le C \cdot g(n)$ pre všetky dostatočne veľké n. Pre konštantnú funkciu $g(n) = 1$ zápis $f(n) = O(1)$ znamená, že od určitého n počnúc je $f(n) \le C$, teda funkcia f je ohraničená. Hovoríme, že $f(n)$ je $\Omega(g(n))$ a píšeme $f(n) = \Omega(g(n))$, ak existuje kladná konštanta c taká, že $f(n) \ge c \cdot g(n)$ pre všetky dostatočne veľké n. Píšeme $f(n) = \Theta(g(n))$, ak $f(n) = O(g(n))$ aj $f(n) = \Omega(g(n))$, teda $c \cdot g(n) \le f(n) \le C \cdot g(n)$ pre nejaké kladné konštanty c, C a pre všetky dostatočne veľké n. Hovoríme, že $f(n)$ je malé $o(g(n))$ a píšeme $f(n) = o(g(n))$, ak $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

2 Newtonovo číslo

V ukladacích problémoch je cieľom umiestniť telesá daného tvaru alebo veľkosti bez prekrývania čo najekonomickejšie do daného kontajnera a neraz s nejakými reštrikciami. Príkladom jedného z najstarších známych problémov tohto typu je tzv. *problém* 13 *gulí*: „Aký je maximálny počet zhodných gulí (z pevného materiálu), ktoré sa dajú umiestniť na jednu takú istú guľu tak, že všetky sa tejto jednej dotýkajú?“ Pre ten maximálny počet gulí sa často používa výstižný názov *kissing number*, ale zvykne sa používať aj názov *Newton number*. Už Johannes Kepler (27. 12. 1571 – 15. 11. 1630) vo svojej práci [Ke611] indikoval 12 gulí, ale dokázať to nevedel. Isaac Newton (4. 1. 1643 – 31. 3. 1727) v roku 1694 tvrdil, že je ich 12, jeho dôkaz však nebol kompletný. Vznikla tak divoká polemika medzi ním a Davidom Gregorym (3. 6. 1659 – 10. 10. 1708), ktorý obhajoval počet 13. Gregoryho sa dá ľahko pochopiť, ak si uvedomíme, že keď stredy 12 gulí umiestníme do vrcholov pravidelného 12-stena, potom stredy dvoch „susedných“ gulí s polomerom 1 budú vzdialené asi 2.1029, takže po vhodných presunutiach asi tam bude miesto aj pre trinástu guľu. Nemálo miesta síce bude, ale to posledné tvrdenie neplatí, nebude dosť miesta pre 13. guľu. Navzdory mnohým pokusom správny dôkaz, že maximálny počet je 12, ukázali až Schütte a van der Waerden [ScvW53] v roku 1953, potom v roku 1956 veľmi elegantne na dve strany J. Leech [Le56]. O tom, že problém je stále živý, svedčia aj ďalšie dôkazy, ktoré vznikli nedávno, napr. [An04], [Bö03], [Bö04].

Predošlú úlohu teraz zovšeobecníme.

Newtonovo číslo $N(B^d)$ v d-rozmernom priestore je maximálny počet zhodných hypersfér, ktoré sa dotýkajú jednej (takej istej) hypersféry, pričom žiadne dve nemajú spoločný žiadny vnútorný bod. Triviálne je $N(B^1) = 2$ a ľahko sa dá dokázať aj výsledok $N(B^2) = 6$ (ilustrované na 6 pivných táckach okolo jednej). Pri tomto označení je teda

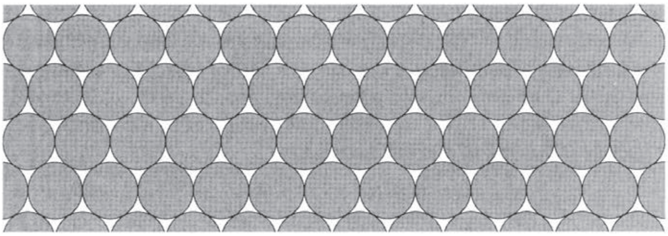
$N(B^3) = 12$. Leech [Le64] objavil extrémne symetrické mriežky a Musin [Mu03] objavil zaujímavú metódu pre dimenziu 24, na základe ktorej je $N(B^4) = 24$. Použitím Leechových a Musinových výsledkov sa podarilo dokázať (pozri [OdS79] a [Lev79]), že $N(B^8) = 240$ a $N(B^{24}) = 196\,560$. Žiadne iné presné hodnoty Newtonovho čísla nie sú známe, takže tu je *prvá veľká množina otvorených problémov*.

Usporiadanie n bodov na sfére, zodpovedajúce usporiadaniu n zhodných sfér okolo jednej centrálnej sféry, ktorá môže mať iný polomer, sa nazýva *sférický kód*. V práci [EdRS98] sa nájdu dolné aj horné odhady čísla $N(B^d)$ pre dimenzie od 32 po 128, ale rozdiely medzi horným a dolným odhadom sú často enormne veľké. Väčšina z tých odhadov je založená na lineárnej programovacej metóde (pozri [De72]) a na existencii určitých kódov (pozri [OdS79]). Dobrý prehľad nájde záujemca v [ErZ01].

Pojem podobný Newtonovmu číslu zaviedol Hadwiger v [Had57]: Pre ľubovoľné konvexné teleso C nech $H(C)$ je maximálny počet takých neprekrývajúcich sa *translácií* telesa C, ktoré sa dotýkajú jedného pevne zvoleného telesa C. Číslo $H(C)$ sa nazýva Hadwigerovo číslo. Grünbaum dokázal, že $H(C) = 8$ pre rovnobežník a $H(C) = 6$ pre všetky ostatné rovinné konvexné oblasti. Vo vyšších dimenziách je však situácia oveľa zložitejšia a z bohatej literatúry spomeniem len prehľad, ktorý záujemca nájde v [Zo98]. Analogické otázky pre dve telesá C, D položil Hortobágyi v [Hor75] a aj problematika čísla $H(C, D)$ bola už hodne skúmaná. Samozrejme, ak telesá C, D sú zhodné, tak $H(C, D) = H(C, C) = H(C)$. Veľa *otvorených problémov* nájde záujemca v citovanej literatúre a tiež v inšpiratívnom prehľade Brass-Moser-Pach [BMP05].

3 Keplerova hypotéza

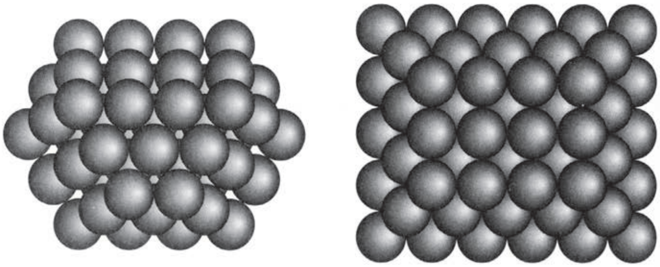
Axel Thue [Th892] na kongrese v roku 1892 správne tvrdil, že žiadne uloženie



Obr. 3.1 Najhustejšie uloženie zhodných kruhov v rovine

zhodných kruhov v rovine nemôže mať väčšiu hustotu ako $\pi / \sqrt{12}$, pričom najhustejšie je prirodzené uloženie, ktoré tvorí šesťuholníkovú mriežku (*Obr. 3.1*, prevzatý z [BMP05]). Jeho dôkaz z roku 1892 však nebol úplný; opravený dôkaz uverejnil až v roku 1910 v [Th10]. Poznamenajme, že číslo $\pi / \sqrt{12}$ je práve podiel obsahu kruhu a obsahu jemu opísaného regulárneho šesťuholníka.

Otázka maximálnej možnej hustoty uloženia zhodných gulí v E^3 je však podstatne zložitejšia, aj keď intuícia hovorí, že najhustejšie uloženie by mohlo mať tvar pyramídy pomarančov. Usporiadajme gule tak, aby ich stredy v rovine tvorili *štvorcovú* mriežku. Takýto *rovinný plát* gulí potom vhodne posúvame. Hypotéza, že najhustejšie uloženie gulí je práve takéto, je obvykle pripisovaná Keplerovi [Ke611]. Ide samozrejme o mriežkové uloženie a je možné popísať ho napr. tak, že stredy (jednotkových) gulí sú v bodoch tvaru $\left(a\sqrt{2}; b\sqrt{2}; c\sqrt{2}\right)$, kde a, b, c sú celé čísla, ktorých súčet je párne číslo. Je ľahké overiť, že hustota takéhoto uloženia gulí v E^3 je $\pi/\sqrt{18} \doteq 0{,}74$. Carl Friedrich Gauss (30. 4. 1777 – 23. 2. 1855) vo svojej práci [Ga831] dokázal, že spomedzi všetkých *mrežových* uložení práve toto má najväčšiu hustotu. Poznamenajme, že ak gule usporiadame tak, že ich stredy v jednej rovine tvoria najhustejšiu, teda *šesťuholníkovú* mriežku a takýto rovinný plát vhodne posúvame, dostaneme také isté uloženie, ako posúvaním plátu štvorcovej rovinnej mriežky. Je to výborne viditeľné na *Obr. 3.2* (prevzatý z [BMP05]).



Obr. 3.2 Dva rôzne pohľady na najhustejšie uloženie gulí v E^3

V dôsledku Gaussovho tvrdenia je jasné, že keby sa dali gule usporiadať hustejšie, tak usporiadanie by nemohlo byť pravidelné. Lenže preskúmať a vylúčiť všetky *nepravidelné* usporiadania je mimoriadne náročné, takže Keplerova hypotéza sa stala najdlhšie nevyriešeným problémom kombinatorickej geometrie.

Fejes Tóth László (12. 3. 1915 – 17. 3. 2005) v [Fe03] ukázal, že určenie maximálnej hustoty sa dá redukovať na konečný, aj keď veľmi veľký počet výpočtov. V tej dobe (1. vydanie jeho slávnej knihy je z roku 1953) však neexistovali dostatočne výkonné počítače, ktoré by tieto výpočty urobili. Rogers v [Ro58] stanovil, že hustota uloženia gulí nie je väčšia ako $\sqrt{18}\left(\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \doteq 0{,}78$. Je to síce o čosi slabšie ako predpokladaná najlepšia hustota $0{,}74$, ale Rogersova metóda je geniálna, pretože spôsob jeho argumentácie funguje v každej dimenzii. Na druhej strane sa nezdá, že by Rogersov dôkaz bolo možné použiť pre dosiahnutie hypoteticky najlepšej hustoty $\pi/\sqrt{18}$.

Wu-Yi Hsiang v [Hs93] na základe myšlienok L. Fejes Tótha predviedol priamočiary geometrický dôkaz, ale Gábor Fejes Tóth (syn L. Fejes Tótha) vo svojej recenzii na Hsiangov článok napísal: *As far as details are concerned, my opinion is that many of the key statements have no acceptable proofs.* Keďže išlo o veľmi slávny problém, vznikol boj o prvenstvo. Thomas C. Hales v [Ha94] uverejnil podrobnú kritiku Hsiangovho „dôkazu“ a na túto kritiku tvrdohlavo a rýchlo reagoval Hsiang v [Hs95]. Všeobecne je prijatý názor, že Hsiangove dôkazy nie sú úplné.

Aj Hales sledoval hlavnú myšlienku L. Fejes Tótha a už v roku 1992 zistil [Ha92], že maximálna hustota by sa asi dala nájsť nájdením minima funkcie 150 premenných. V tlačenej verzii sa toto objavilo až v prácach [Ha97], [Ha97b] a [Ha00]. V tej dobe s Halesom na dôkaze už úzko spolupracoval Samuel P. Ferguson, Halesov študent. V roku 1998 Hales ohlásil, že dôkaz je hotový. Lenže dôkaz bol na 250 stranách a jeho súčasťou bol aj 3-gigabytový počítačový program, keďže bolo treba analyzovať vyše 5000 konfigurácií sfér. Kvôli obrovskému rozsahu a neštandardnej forme sa v januári 1999 konal týždeň dlhý workshop na Institute for Advanced Study. O korektnosti jednotlivých častí dôkazu rozhodoval panel 12 recenzentov, ktorí si zaslúžia, aby tu boli vymenovaní: András Bezdek, Michael Bleicher, Károly Böröczky, Károly Böröczky, Jr., Aladár Heppes, Wlodek Kuperberg, Endre Makai, Attila Pór, Günter Rote, István Talata, Béla Uhrin, Zoltán Ujváry-Menyhárd. V roku 2003 vedúci panelu recenzentov Gábor Fejes Tóth oznámil, že skupina recenzentov si je na 99% istá správnosťou dôkazu, ale – prirodzene – nemôže potvrdiť správnosť všetkých počítačových výpočtov. Vtedy sa do recenzného procesu zapojil aj Jeffrey C. Lagarias, ktorého úlohou bolo preusporiadať prácu tak, aby sa zjednodušil *strom dôkazu* a aby sa zjednodušili aj niektoré definície. Detailná verzia dôkazu vyšla v špeciálnom čísle časopisu *Discrete & Computational Geometry* Vol. 36, No. 1, July 2006 ako súhrn 6 prác [HaF06] a v roku 2011 aj knižne [FeH11].

O najhustejšom zaplnení (celého) d-rozmerného priestoru zhodnými guľami pre $d \geq 4$ nájde záujemca výsledky v prácach, ktoré boli motivované okrem iného teóriou kódovania (napr. [Var95], [CoS96]), v už spomínanej práci [Ro58] a v ďalších, napr. [Be02a], [CoE03].

4 Ramseyho teória

Zoznam János Neumann (28. 12. 1903 – 8. 2. 1957), Pál Erdős (26. 3. 1913 – 20. 9. 1996), Tibor Grünwald (15. 7. 1912 – 2. 1. 1992; keď začalo prenasledovanie židov, zmenil si meno na Gallai), Eszter Klein (20. 2. 1910 – 28. 8. 2005), György Szekeres (29. 5. 1911 – 28. 8. 2005), Endre Makai (5. 11. 1915 – 8. 11. 1987), Pál Turán (10. 8. 1910 – 26. 9. 1976), … vzbudzuje veľkú úctu matematikov. Na jeseň r. 1932 to ale boli (až na Jánosa Neumanna, ktorý bol od nich o niečo starší a je známejší pod menom John von Neumann) univerzitní študenti v Budapešti, ktorí sa začali o víkendoch pravidelne schádzať na intelektuálne debaty. Samozrejme, debatovali najmä o matematike. Na jedno z tých stretnutí prišla Eszter Klein s milou úlohou: Dokážte, že ak z 5 bodov v rovine žiadne tri neležia na jednej priamke, tak vždy sa dajú z nich vybrať 4, ktoré sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Dôkaz je samozrejme veľmi ľahký. Účastníci úlohu ihneď zovšeobecnili:

Problém 4.1. Nájdite najmenšie číslo $f(n)$ také, že každá množina $f(n)$ bodov vo všeobecnej polohe v rovine obsahuje vrcholy konvexného n-uholníka.

Poznamenajme, že body v rovine sú *vo všeobecnej polohe* práve vtedy, keď žiadne tri z nich neležia na jednej a tej istej priamke. Makai a Turán veľmi rýchle zistili, že $f(5) = 9$. Onedlho sa Szekeres pochválil, že existenciu čísla $f(n)$ vie dokázať pre každé n, pričom našiel aj horný odhad čísla $f(n)$. Erdős podstatne zlepšil Szekeresov horný odhad, a keďže našli spolu aj jednu dobrú konštrukciu, sformulovali hypotézu:

Hypotéza 4.1. (Erdős-Szekeres [ErS35]) Každá množina $2^{n-2}+1$ bodov vo všeobecnej polohe v rovine obsahuje konvexný n-uholník, teda $f(n) = 2^{n-2}+1$.

Navzdory obrovskému počtu pokusov sa túto hypotézu doteraz nikomu nepodarilo dokázať. Známe sú len odhady $2^{n-2}+1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$. Horný odhad je z práce [ErS35], dolný je z práce [ErS60], pričom ten dolný je asi najlepší možný.

Veta 4.1. (Ramsey [Ra30]) Pre ľubovoľné celé kladné čísla i, j a $k \geq i$ existuje číslo $R = R(i, j, k)$, ktoré spĺňa nasledovné podmienky: ak množina M má aspoň R prvkov a všetky jej i-prvkové podmnožiny ľubovoľne rozdelíme do j tried, tak množina M má takú k-prvkovú podmnožinu, ktorej všetky i-prvkové podmnožiny patria do tej istej triedy.

Autor vyššie uvedenej vety je Frank Plumpton Ramsey (22. 2. 1903 – 19. 1. 1930), ktorého na návrh slávneho ekonóma J. M. Keynesa už v roku 1924 zvolili za člena King's College v Cambridge. Navzdory svojmu veľmi krátkemu životu vytvoril Ramsey dielo trvalej hodnoty vo filozofii, v ekonómii, v logike a v teoretických základoch matematiky. Vyššie uvedenú vetu publikoval vo svojej *jedinej čisto matematickej* práci, pričom v pozadí tejto práce stála najpálčivejšia otázka matematiky začiatku 20. storočia: či existuje všeobecný postup, pomocou ktorého je možné rozhodnúť o pravdivosti každého matematického tvrdenia. Poznamenajme, že pomocou Ramseyho vety sa dalo dokázať, že určité tvrdenia veľmi špeciálneho tvaru sú rozhodnuteľné, ale pomerne rýchle (po slávnej vete Kurta Gödela o neúplnosti z roku 1931) sa ukázalo, že univerzálne dobrý algoritmus neexistuje. Ramseyho veta – hrubo povedané – tvrdí, že ak je nepravidelná štruktúra dostatočne veľká, tak obsahuje nejakú pravidelnú štruktúru vopred danej veľkosti. Ešte trochu hrubšie: v neporiadku s dostatočne mnoho prvkami sa dá nájsť určitý poriadok.

Pre potreby svojho dôkazu Szekeres znovuobjavil Ramseyho vetu v roku 1932 (t.j. nie našiel v literatúre, ale spolu s Erdősom dokázal inú verziu tej vety) a jeho spoločná práca s Erdősom výrazne prispela k jej popularizácii. Pre úplnosť a lepšiu orientáciu čitateľa uvedieme aj pôvodnú formuláciu Erdősovej-Szekeresovej vety z [ErS35].

Veta 4.2. Pre každé prirodzené číslo $n \geq 4$ existuje najmenšie číslo $f(n)$ také, že z akýchkoľvek $f(n)$ bodov vo všeobecnej polohe v rovine sa dá vybrať n bodov tak, že tvoria vrcholy konvexného n-uholníka.

Aj keď je Ramseyho veta silnou zbraňou pri odvodzovaní *existenčných* výsledkov, je často nepoužiteľná pre dosiahnutie dobrých odhadov. Erdős a Szekeres vo svojej práci uviedli nepomerne lepšie explicitné odhady pre hodnoty funkcie $R(i,j,k)$, väčšinu ktorých sa dodnes nepodarilo výraznejšie zlepšiť. Ich horný odhad $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$ z roku 1935 z dôkazu ich vety nebol zlepšený 63 rokov. Potom sa v roku 1998 objavili hneď tri zlepšenia: $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$ v [ChG98], $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+7-2n$ v [KlP98], $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+2$ v [TóV98], a v roku 2005 $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+1$ v [TóV05], pričom tento posledný (toho času najlepší známy odhad) je len o polovicu lepší ako pôvodný Erdős-Szekeresov a je stále takmer druhou mocninou dolného (pravdepodobne najlepšieho) odhadu.

Uveďme ešte často používanú *grafársku* formuláciu Ramseyho vety.

Veta 4.3. Pre ľubovoľné kladné celé čísla k, l existuje najmenšie číslo $r(k,l)$ také, že akokoľvek dvomi farbami (červenou a modrou) vyfarbíme všetky hrany úplného grafu s $r(k,l)$ vrcholmi, existuje úplný podgraf na k vrcholoch, ktorého všetky hrany sú modré alebo podgraf na l vrcholoch, ktorého všetky hrany sú červené.

Čísla $r(k,l)$ sa nazývajú *Ramseyho čísla* a ich určenie sa zdá byť extrémne ťažké. Obťažnosť problému charakterizuje Erdősovo prirovnanie: Keby nám mimozemšťania dali ultimátum, že do jedného roku im musíme dodať presnú hodnotu $r(5,5)$, lebo inak nás zničia, tak by sme mali zapojiť do spoločnej práce všetky počítače na zemi a tú hodnotu sa pokúsiť nájsť. Keby však chceli hodnotu $r(6,6)$, tak by sme mali spojiť všetky sily a brániť sa vojenskými prostriedkami.

Veľmi zaujímavý je tzv. **prázdny variant** predošlého problému. Zvoľme prirodzené číslo n ľubovoľne. Pri práci s touto problematikou sa Erdős a Szekeres domnievali, že z dostatočne veľkého počtu $G(n)$ bodov vo všeobecnej polohe v rovine sa vždy dá vybrať n bodov tak, že tieto tvoria vrcholy *prázdneho* konvexného n-uholníka, teda n-uholníka, ktorý neobsahuje žiadny bod danej $G(n)$-bodovej množiny. (V tlači sa táto hypotéza objavila až v roku 1978 v práci [Er78].) Prirodzená úloha je nájsť najmenšiu možnú hodnotu funkcie $G(n)$. Szekeres pred mnohými rokmi aj načrtol jeden dôkaz, ale rýchle sa ukázalo, že nebol kompletný. Napriek tomu sa zdalo, že ide len o problémy technického charakteru, keďže tie prázdne mnohouholníky sú obvykle veľmi dlhé a úzke, takže sa s nimi zle narába. Hodnoty $G(3) = 3$ a $G(4) = 5$ sú triviálne. Harborth [Har78] ukázal, že $G(5) = 10$ ($> 9 = f(5)$, teda pre zaručenie existencie *prázdneho* konvexného 5-uholníka treba viac bodov ako pre *nejaký*, teda ľubovoľný konvexný 5-uholník). Na veľké prekvapenie Horton [Ho83] pre každé n zostrojil takú množinu n bodov, ktorá neobsahuje vrcholy prázdneho konvexného 7-uholníka, a teda dokázal výsledok $G(7) = \infty$. Množiny Hortonovej konštrukcie sa veľmi zle znázorňujú, pretože ich relatívny priemer, t.j. podiel najväčšej a najmenšej vzdialenosti dvoch rôznych bodov, rastie exponenciálne s počtom bodov. Pavel Valtr [Va92] skonštruoval množiny bodov bez prázdnych šesťuholníkov pre všetky n, pričom ten podiel je menší ako $\alpha\sqrt{n}$ kde α je konštanta.

Najlepší známy výsledok pre $n = 6$ bol až donedávna Overmarsov odhad $G(6) \geq 30$ ([Ov03]), ktorý pomocou počítača zostrojil množinu 29 bodov, ktorá neobsahuje vrcholy prázdneho konvexného 7-uholníka. V závere Overmarsovej práce sú uvedené dva závažné fakty, ktoré viedli k hypotéze, že $G(6) = 29$, aj keď vtedy ešte nebolo nájdené ani len horné ohraničenie pre číslo $G(6)$. Prvé horné ohraničenie (hodne slabé, väčšie ako $5{,}269 \times 10^{14}$) našiel Nicolás [Ni07]. Toto výrazne zlepšil Gerken [Ge08] na 1717, ale dnešné najlepšie známe ohraničenia sú $30 \leq G(6) \leq 463$ – horné ohraničenie je v [Ko07]. Hypoteticky najlepšia (dolná) hranica je teda stále veľmi ďaleko.

Z tohto okruhu otázok sa v posledných 40 rokoch vyvinula úplne nová, samostatná oblasť kombinatorickej geometrie s názvom *Ramseyho teória* (pozri napr. [GRS90]). Je treba ešte dodať, že v literatúre sa často používa aj Erdősom zavedený názov *Happy End Problem*, pretože Eszter Klein a György Szekeres prežili spolu 68 rokov šťastného manželstva. Posledné týždne života strávili na jednej izbe v sanatóriu a obaja zomreli v ten istý deň, 28. augusta 2005 v Adelaide necelú hodinu po sebe.

Poznamenajme ešte, že Ramseyho veta bola zovšeobecnená aj na systémy množín. Priekopníkmi v tomto smere boli Tibor Bisztriczky a Fejes Tóth Gábor [BiF89], [BiF89b]. Novšie výsledky a tiež ďalšie súvislosti spolu s otvorenými otázkami nájde záujemca napr. v [BáK01], [PaT00], [PóV02].

5 Sylvestrova-Gallaiho veta

V roku 1893 J. J. Sylvester [Sy893] formuloval nasledovný problém: Dokážte, že žiadna konečná množina bodov sa nedá usporiadať tak, aby priamka prechádzajúca cez ľubovoľné dva z nich prechádzala aj tretím bodom bez toho, aby všetky boli kolineárne. Z riešení, ktoré do redakcie prišli, ani jedno nebolo správne.

Nech $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je konečná množina n bodov v rovine. Každé dva rôzne body množiny $\mathbf{P}$ určujú práve jednu priamku, jedným bodom priamka určená nie je. Množinu všetkých priamok určených bodmi množiny $\mathbf{P}$ označíme $\mathbf{L}$. Počet tých priamok množiny $\mathbf{L}$, ktoré prechádzajú bodom $P \in \mathbf{P}$ sa nazýva *stupeň bodu* P. Počet bodov stupňa k označíme p_k. Priamka, ktorá obsahuje práve k bodov z množiny $\mathbf{P}$ sa nazýva *priamka rádu* k. Priamka rádu 2 sa nazýva *prostá*. Počet priamok rádu k označíme l_k. V tejto terminológii sa dá Sylvestrova úloha formulovať nasledovne: *Dokážte, že ak konečná množina bodov nie je kolineárna, tak určuje aspoň jednu prostú priamku.*

Zrejme sú splnené nasledovné rovnosti:

(5.1) $$\sum_{k=2}^{n} k \cdot l_k = \sum_{k=2}^{n-1} k \cdot p_k,$$

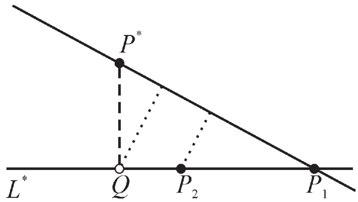
(5.2) $$\binom{n}{2} = \sum_k \binom{k}{2} l_k \ .$$

Tie rovnosti vystihujú zásadnú kombinatorickú vlastnosť bodov a priamok nimi určených, a to *incidenciu*. V súčte $\sum_{k=2}^{n} k \cdot l_k$ je každá priamka rádu k zahrnutá práve k krát, teda tento súčet vyjadruje celkový počet incidencií spočítaný cez všetky priamky. V súčte $\sum_{k=2}^{n-1} k \cdot p_k$ je každý bod stupňa k zahrnutý práve k krát, teda tento súčet vyjadruje celkový počet incidencií spočítaný cez všetky body. Tie súčty sú však rovnaké, lebo celkový počet incidencií bodov a priamok nimi určených je pre danú množinu bodov $\mathbf{P}$ určený jednoznačne. Práve uvedený spôsob dôkazu kombinatorickej rovnosti sa nazýva *metóda dvojakého sčítania* (tzv. *double counting*), a hodne sa používa napr. aj v teórii grafov. Podobný je aj dôkaz rovnosti (5.2).

História riešenia Sylvestrovho problému je trochu komplikovaná, čo bolo spôsobené aj udalosťami 2. svetovej vojny. Erdős znovu objavil tento problém v roku 1933, teda 40 rokov po jeho prvom publikovaní, a ako neskôr sám napísal [Er83], nevedel si s ním bezprostredne poradiť. Povedal preto o probléme Gallaimu a ten krátko na to predviedol Erdősovi správny dôkaz, ale nepublikoval ho. Erdős chcel upriamiť pozornosť širšej matematickej verejnosti na tento problém, preto ho v roku 1943 znovu postavil [Er43] v *American Mathematical Monthly*. Problém vyriešil nasledovný rok Steinberg [St44]. Na konci Steinbergovej práce je poznámka redaktora, ktorá obsahuje Gallaiho dôkaz. Nie je známe, či Sylvester poznal dôkaz svojho problému, ale je veľmi pravdepodobné, že áno, takže dnes je tá veta obvykle uvádzaná ako Sylvestrova-Gallaiho veta. Pravdepodobne však prvý dôkaz S-G vety publikoval Melchior [Mel41] v duálnej forme. Za Gallaiho dôkazom nasledovalo mnoho ďalších, často ako dôsledok všeobecnejšieho tvrdenia, alebo ako jeho rozšírenie pre iné objekty. Uveďme napríklad [Bor83], [BorM90], [BrE48], [Cox89], [EHK63], [Ed70], [HeK60], [Ku72], [La55], [Li88], [Mot51].

Veta 5.1. (Sylvester-Gallai) Ak konečný počet bodov v rovine nie je na jednej a tej istej priamke, tak určuje aspoň jednu prostú priamku.

Dôkaz. (Autorom dôkazu je L. M. Kelly; dôkaz bol ale publikovaný v Coxeterovej práci [Cox48] a bol zaradený aj do vynikajúcej knižky Aignera a Zieglera [AiZ04] *Proofs fom THE BOOK*. Práve pre jeho genialitu ho tu uvedieme.) Nech $\mathbf{P}$ je konečná množina bodov v reálnej euklidovskej rovine a nech **L** je množina priamok určených bodmi z **P**. Uvažujme všetky také dvojice (P,L), že bod $P\in\mathbf{P}$ neleží na priamke $L\in\mathbf{L}$. Pretože množiny **P** a **L** sú konečné, aj množina vzdialeností určených dvojicami (P,L) je konečná. Existuje teda bod $P^*\in\mathbf{P}$ a priamka $L^*\in\mathbf{L}$ tak, že dvojica (P^*,L^*) určuje najmenšiu z takých vzdialeností. Nech Q je ten bod na priamke L^*, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od bodu P^*. Ak priamka L^* obsahuje práve dva body z **P**, tak je veta dokázaná. Nech teda priamka L^* obsahuje aspoň tri body P_1,P_2,P_3 z **P**.



Obr. 5.1 Vzdialenosť bodu Q aj P_2 od priamky P^*P_1 je menšia, ako vzdialenosť bodu P^* od priamky L^*

Ak body P_1,P_2,P_3 sú rôzne od Q, potom aspoň dva z nich ležia na tej istej strane od bodu Q. Bez ujmy na všeobecnosti nech bod P_2 leží medzi Q a P_1 (*Obr. 5.1*). Potom vzdialenosť bodu P_2 od priamky P^*P_1 je menšia, ako vzdialenosť určená dvojicou (P^*,L^*). V prípade, že by jeden z bodov P_1,P_2,P_3 bol zhodný s bodom Q, napr. $P_3=Q$, tak bez ohľadu na polohu bodu P_2 vzdialenosť bodu Q od priamky P^*P_1 by bola menšia, ako vzdialenosť určená dvojicou (P^*,L^*), čo je spor. □

V *komplexnej* projektívnej rovine S-G veta neplatí, ako bolo ukázané napr. v [Cox48], a samozrejme nemôže platiť ani v *konečných* projektívnych geometriách, kde všetky priamky obsahujú rovnaký počet bodov (napr. vo všeobecne známej Fanovej rovine sú všetky priamky rádu 3). Na druhej strane je jasné, že S-G veta platí v reálnom projektívnom priestore dimenzie väčšej ako 2, nakoľko počet prostých priamok nezávisí od vhodného stredového premietania, takže problém stačí skúmať len v rovine.

Prirodzená je nasledovná otázka, ktorú viackrát formuloval aj Erdős.

Problém 5.1. Aký je minimálny počet l_2 prostých priamok určených n bodmi, ktoré nie sú kolineárne?

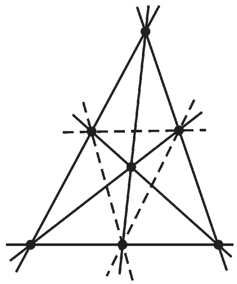
Hypotéza 5.1. ([Di51], [Mot51]) Pre $n\neq 7,13$ je počet l_2 prostých priamok určených n nekolineárnymi bodmi aspoň $\lceil \frac{1}{2}n \rceil$.

Dirac [Di51] dokázal nerovnosť $l_2\geq 3$ a Kelly a W. Moser [KeM58] vylepšili dolnú hranicu prelomovým spôsobom; dokázali totiž, že je lineárna vzhľadom na n.

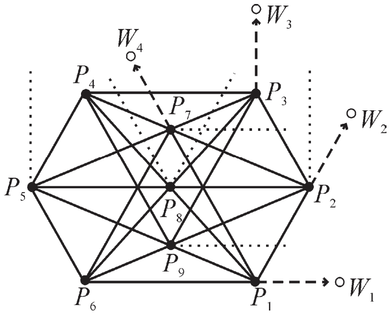
Veta 5.2. (Kelly-Moser [KeM58]) Konečná množina n nekolineárnych bodov v reálnej projektívnej rovine určuje aspoň $\frac{3}{7}n$ prostých priamok.

Veta 5.2 je najsilnejšia v tom zmysle, že existuje konfigurácia 7 bodov, ktorá určuje práve 3 prosté priamky. Ak je Hypotéza 5.1 pravdivá, tak pre všetky ostatné n by sa dolná hranica $l_2 \geq \frac{3}{7}n$ z Vety 5.2 mala dať zosilniť. Pre $n = 2m$ Motzkin našiel konfigurácie, ktoré určujú práve $\frac{1}{2}n$ prostých priamok, takže dolná hranica v hypotéze sa určite nedá zväčšiť. Pre n nepárne však aj najlepšie známe konfigurácie určujú až $\frac{3}{4}n$ prostých priamok.

Na *Obr. 5.2*, resp. *5.3* sú výnimočné konfigurácie $n = 7$ resp. $n = 13$ bodov, ktoré určujú menej ako $\frac{1}{2}n$ prostých priamok. Na *Obr. 5.3* body $P_1, P_2, \ldots, P_6$ tvoria taký stredovo súmerný šesťuholník so stredom P_8, aby priamky P_5P_6 a P_1P_7 boli rovnobežné. Pridané sú 4 nevlastné body W_1, W_2, W_3, W_4, ktoré z priamok P_6P_1, P_1P_2, P_1P_3 a P_1P_7 spravia priamky trojbodové. Takýchto 13 bodov určí presne 6 prostých priamok – nakreslené sú bodkovanou čiarou.



Obr. 5.2



Obr. 5.3

Sten Hansen vo svojej doktorskej dizertácii [Han81] tvrdil, že dokázal Hypotézu 5.1. Jeho dôkaz má však takmer 100 strán, je veľmi zložitý, a aj keď ho kontrolovala taká osobnosť, akou Fenchel bezpochyby je, tak chybu nenašiel [Er83]. Napriek tomu panovala určitá nedôvera k tomu dôkazu, a ako sa neskôr ukázalo, nedôvera bola oprávnená. V jednej z kľúčových Hansenových lem totiž našli chybu Csima a Sawyer, pričom sa im v práci [CsS93] podarilo – s využitím ostatných Hansenových výsledkov – zlepšiť veľmi silnú Kellyho-Moserovu dolnú hranicu $l_2 \geq \frac{3}{7}n$, ktorá odolávala už 33 rokov. Teda najlepší dnes známy dolný odhad je obsiahnutý v nasledovnej vete.

Veta 5.3. (Csima-Sawyer). Konečná množina $n \geq 8$ nekolineárnych bodov v rovine určuje aspoň $\frac{6}{13}n$ prostých priamok.

Ešte pred dôkazom S-G vety vyslovil Erdős hypotézu, že n nekolineárnych bodov určuje aspoň n priamok. Samozrejme, S-G veta tú nerovnosť bezprostredne implikuje. Tento dolný odhad je najlepší možný a nezávisle na sebe ho dokázali napr. Steinberg [St44], Hanani [Hh55] a vo všeobecnejšej, *čisto kombinatorickej forme* de Bruijn a Erdős [BrE48].

Veta 5.4. (de Bruijn-Erdős) Nech **P** má $n \geq 3$ prvkov. Nech $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ je taký systém podmnožín množiny **P**, že $2 \leq |B_k| < n$, pričom každá dvojica prvkov množiny **P** patrí práve do jednej množiny systému **B**. Potom $m \geq n$.

Ťažšia bola nasledovná Erdősova hypotéza o celkovom počte priamok: ak najviac $n-k$ bodov z **P** je kolineárnych, potom existuje kladná konštanta c taká, že pre celkový počet priamok určených bodmi z **P** platí $|\mathbf{L}| \geq c \cdot k \cdot n$.

Veta 5.5. (Kelly-Moser [KeM58]) Ak nanajvýš $n-k$ bodov množiny **P** je kolineárnych a $n \geq \frac{1}{2}\left(3 \cdot (3k-2)^2 + 3k - 1\right)$, tak $|\mathbf{L}| \geq k \cdot n - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1)$.

Hodnoty $l_2(n)$ boli v prácach [CrM68] a [Brk72] určené pre $n \leq 22$ s výnimkou $n = 15, 17, 19, 20, 21$. Je však zrejmé, že $l_2(20) = 10$. Hľadanie presných hodnôt počtu prostých priamok je zmysluplné aj pre riešenie iných typov incidenčných problémov a nástojčivá otázka nájdenia minimálneho počtu $l_2(n)$ pre nepárne $n \geq 15$ bola položená aj v [CFG94], str. 159. Označme $(l_2, l_3, \ldots, l_r)$ konfiguráciu, ktorá pre $k = 2, 3, \ldots, r$ určuje práve l_k priamok rádu k.

Veta 5.6. Ak existuje taká konfigurácia 15 nekolineárnych bodov v rovine, že určujú menej ako 9 prostých priamok, potom táto konfigurácia musí byť jedna z nasledovných:

$$(7,26,0,2),\ (8,23,3,1),\ (8,25,2,1),\ (8,27,1,1),\ (8,29,0,1),\ (8,24,0,1,1).$$

Predošlá veta z [BáČ07] redukuje prípadnú existenciu ďalšej *výnimočnej* konfigurácie na konečný (a naviac dosť malý) počet konkrétnych možností. Ich preskúmanie ale nie je jednoduché a zatiaľ sa to nikomu nepodarilo. Dôvod je ten, že taká konfigurácia bodov pravdepodobne nexistuje. V [BáČ07] sa nájdu analogické vety pre 17 aj 19 bodov.

Problém 5.2. Nech **P** je množina n nekolineárnych bodov v rovine. Nájdite maximálny počet postrádateľných bodov.

Bod $P \in \mathbf{P}$ sa nazýva *postrádateľný*, ak ním neprechádza žiadna prostá priamka. Tento pojem zaviedli Koutský a Polák v [KoP60] a dokázali, že ak všetky postrádateľné body ležia na jednej priamke, tak ich počet je aspoň $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Grünbaum [Grü99] znovu objavil tento pojem a dokázal ten istý dolný odhad, ale v trochu silnejšej verzii – bez podmienky kolineárnosti postrádateľných bodov a vyslovil nasledovnú hypotézu.

Hypotéza 5.2. Ak n je dostatočne veľké, potom v každej množine n bodov v rovine všetky postrádateľné body okrem najviac jedného ležia na jednej priamke.

Viac o tejto problematike nájde záujemca v citovanej literatúre.

* * *

Jedným z možných zovšeobecnení Sylvestrovho problému je vziať n červených a n modrých bodov a skúmať priamky monochromatické resp. bichromatické. (Farbenie objektov sa často používa v teórii grafov.) Výsledky o tejto problematike nájde záujemca napr. v [BorM90], [Ch70], [ErP95], [PaP00]. Iné zovšeobecnenie sa týka počtu nadrovín určených bodmi vo viacdimenzionálnom priestore. Výsledky z tejto oblasti sa nájdu napr. v [Hh55], [Han65], [Han80], [Mot51], [Pu86] a v prehľade [BMP05].

Turán [Tu77] definoval *priesečníkové číslo* $\mathrm{cr}(G)$ grafu G ako najmenší počet priesečníkov hrán grafu G pri jeho ľubovoľnom nakreslení. Zrejme $\mathrm{cr}(G) = 0$ práve vtedy, keď graf je rovinný. Prirodzená je teda nasledovná geometrická otázka.

Aký je maximálny počet $f(n,m)$ incidencií medzi n rôznymi bodmi a m rôznymi priamkami v rovine?

Predovšetkým je zrejmé, že $f(n,m)$ je aj vo viacrozmernom priestore maximálny počet incidencií medzi n rôznymi bodmi a m rôznymi priamkami, pretože projekcia vo vhodnom smere nezmení počet incidencií. V celočíselnej mriežke rozsahu $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ vezmime m takých priamok, ktoré obsahujú čo najviac mrežových bodov. Táto Erdősova konštrukcia ukazuje, že počet incidencií by asymptoticky mohol byť $\Omega(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}+n+m)$. Szemerédi a Trotter v [SzT83] pre hornú hranicu dokázali $f(n,m)\le O(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}+n+m)$. V súčasnosti najlepšie známe odhady sú $0{,}42\cdot n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}+n+m\le f(n,m)\le 2{,}5\cdot n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}+n+m$ a boli nájdené v [PaT97] a [Pa*04], takže je $f(n,m)=\Theta(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}+n+m)$ a stačí nájsť „len“ presnú hodnotu konštanty.

Najjednoduchší dôkaz je založený na tzv. *priesečníkovej leme* [Sz97], ktorá udáva dolnú hranicu pre počet pretínajúcich sa hrán rovinného grafu s mnohými hranami. Záujemcom o hlbšie štúdium môžeme odporučiť klasickú monografiu [Grü72] a novší prehľad [PaS04]. Počtom incidencií medzi m nadrovinami a n bodmi vo viacrozmernom priestore sa zaoberá napr. [AgA92].

6 Konečné kontajnery

Najväčší význam pre prax zrejme majú husté ukladania do konečného kontajnera.

Auerbach, Banach, Mazur a Ulam dokázali vetu, že pre každé prirodzené číslo d a pre každé kladné číslo V existuje číslo $f_d(V)$ také, že každý systém d-rozmerných konvexných množín $M_i, i\in J$, s priemerom najviac 1 a s celkovým objemom najviac V sa dá uložiť do d-rozmernej kocky so stranou $f_d(V)$. Veta je známa pod názvom *veta o zemiakovom vreci*, lebo autori vtipne poznamenali, že v dôsledku tejto vety sa 1 kg zemiakov určite dá uložiť do konečného vreca.

Problém 6.1. Aká je najmenšia možná hodnota $f_d(V)$?

Zodpovedať túto otázku bude extrémne ťažké. Pre *paralelné* ukladanie *kvádrov* prvý horný odhad čísla $f_d(V)$ našiel Kosiński [Ko57] a tento odhad zlepšili Moon a L. Moser [MoM67]. Pre dimenziu $d=2$ lepšie odhady našli Meir a L. Moser [MeM68]. Okrem pôvodnej – enormne ťažkej – otázky sú však dodnes nezodpovedané aj nasledovné dve, ktoré sa zdajú byť podstatne ľahšie.

Problém 6.2. Je možné všetky obdĺžniky $R_i=\frac{1}{i}\times\frac{1}{i+1}$, $i=1,2,3,\dots$, uložiť do štvorca so stranou 1?

Problém 6.3. Je možné všetky štvorce so stranou $\frac{1}{2i+1}$, $i=1,2,3,\dots$, uložiť do obdĺžnika s obsahom $\frac{1}{8}\pi^2-1$?

Oba problémy sú dobre uchopiteľné, lebo sa ukladajú *konkrétne* systémy obdĺžnikov resp. štvorcov. Lenže oba systémy sú nekonečné, pričom súčty príslušných radov sú postupne 1 a $\frac{1}{8}\pi^2-1$, takže ak odpoveď na niektorú z tých dvoch otázok je kladná, tak odhad formulovaný v otázke by bol najlepší možný, a teda by išlo o problém typu *tiling*. Odhady boli uverejnené v Jennings [Je94] a [Je95], lepšie odhady boli však ukázané v [Bá90], [Bá90b], [Bá98b]: pre uloženie systému obdĺžnikov $\frac{1}{i}\times\frac{1}{i+1}$ stačí štvorec s dĺžkou strany 1,002 a pre uloženie štvorcov $\frac{1}{2i+1}$ stačí obdĺžnik s obsahom $0{,}236\,503\,8$, pričom teoreticky najlepšia hodnota $\frac{1}{8}\pi^2-1\doteq 0{,}233\,700\,55$ je lepšia len o menej ako o tri tisíciny. O trochu neskôr však Paulhus v [Pau98] uviedol algoritmy, na základe ktorých počítač uložil také veľké množstvo objektov, že hypoteticky najlepším uloženiam sa priblížil rádovo na stotisíciny. Samozrejme, keďže v oboch prípadoch sa ukladajú nekonečné systémy objektov, počítač musí pre nedostatok pamäte raz s výpočtom skončiť, takže *stále sú obe otázky* *otvorené*. Vo vyšších dimenziách je nezodpovedaných otázok ďaleko viac, aj keď určité odhady boli dokázané prinajmenšom pre kvádre.

Systém telies s celkovým objemom 1 nazveme jednotkový systém. V už spomínanej práci [MoM67] bol formulovaný – okrem mnohých iných – aj nasledovný problém.

Problém 6.4. Určte najmenšie číslo A také, že každý jednotkový systém štvorcov sa dá paralelne uložiť do nejakého obdĺžnika s obsahom A.

Kleitman a Krieger [KlK70] dokázali, že každý taký konečný systém sa dá uložiť do obdĺžnika s dĺžkami strán 1 a $\sqrt{3}$ a tento horný odhad zlepšili v [KlK75] na obdĺžnik s dĺžkami strán $\frac{2}{\sqrt{3}}$ a $\sqrt{2}$, teda $A \le \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1{,}632\,993\,162$. Ukázali aj triviálny dolný odhad $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Novotný v [No95] ukázal netriviálny dolný odhad $A \ge \frac{2+\sqrt{3}}{3} > 1{,}244$ na systéme troch štvorcov s dĺžkou strany $\frac{1}{\sqrt{6}}$ a jedného s dĺžkou strany $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pretože malé štvorce sa dajú ukladať veľmi ekonomicky, je pravdepodobné, že *práve táto konfigurácia je extremálna*. Netriviálny horný odhad Kleitmana a Kriegera pre konečné systémy zlepšil Novotný v [No96] na $A < 1{,}53$ a v práci [No99] ukázal, že pre každý *päťprvkový* jednotkový systém štvorcov je $A = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ a túto rovnosť ukázal aj pre 6, 7 a 8-prvkové systémy v [No02], čo významne zosilňuje vieru v platnosť hypotézy, že vyššie spomínaný 4-prvkový systém štvorcov je extremálny. Horný odhad $A < 1{,}53$ len nedávno zlepšil pomocou vhodnej diskretizácie na počítači Hougardy v [Hou10] na $A \le 1{,}4$; aj toto je však ešte stále ďaleko od očakávanej presnej hodnoty $A = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

* * *

V roku 2006 Andreescu a Mushkarov [AnM06] postavili nasledovný problém.

Problém 6.5. Maximalizujte súčet obsahov troch neprekrývajúcich sa trojuholníkov uložených v danom kruhu.

Pažravý algoritmus generuje jeden vpísaný rovnostranný a potom dva rovnaké rovnoramenné trojuholníky, takže ich zjednotenie bude päťuholník vpísaný do daného kruhu. Táto konfigurácia však určite neposkytuje maximum, lebo vpísaný pravidelný päťuholník má väčší obsah a dá sa rozdeliť na tri trojuholníky. Na základe toho Andreescu a Mushkarov vyslovili *hypotézu*, že maximálny obsah $n \ge 3$ trojuholníkov uložených do daného kruhu sa dosiahne rozdelením *pravidelného* $(n+2)$-uholníka vpísaného do kruhu na trojuholníky, teda jeho trianguláciou. Bezdek a Fodor [BeF10] a nezávisle aj [Bá10] v roku 2010 dokázali slabšiu verziu tej hypotézy za predpokladu, že všetky vrcholy všetkých trojuholníkov ležia na hraničnej kružnici. V oboch prácach je dôkaz urobený len pre tri trojuholníky, ale v oboch je poznamenané, že metóda dôkazu funguje aj pre viac ako tri trojuholníky. A. Bezdek a Fodor v [BeF10] poznamenali, že táto triviálne vyzerajúca otázka sa zdá byť beznádejne ťažká.

Všimnime si teraz ďalší takmer triviálne vyzerajúci problém uloženia troch kruhov do daného trojuholníka tak, aby súčet ich obsahov bol maximálny. Tento sa dá vystopovať až po Malfattiho prácu [Ma803] z roku 1803. Je veľmi prekvapujúce, že tento problém bol vyriešený až o 191 rokov neskôr, keď Zalgaller a Los [ZaL94] dokázali, že optimálny je tzv. pažravý algoritmus, a teda že neplatí Malfattiho pôvodná hypotéza, že maximum sa dosiahne tromi navzájom sa dotýkajúcimi kruhmi, z ktorých každý sa dotýka dvoch strán trojuholníka (toto sa dnes nazýva Malfattiho konfigurácia). Samozrejme, otázka sa dá položiť aj pre uloženie $n > 3$ kruhov. Presné výsledky pre ukladanie n zhodných kruhov do rovnostranného trojuholníka sú však známe len pre trojuholníkové čísla $n = \frac{j(j-1)}{2}$ (pozri Oler [Ol61]) a potom už len Erdősom predpovedaný výsledok pre $n = 14$ v Payan [Pay97]. Okrem týchto sú známe už len odhady dosiahnuté pomocou počítača, napr. v Graham a Lubachevsky [GrL95].

* * *

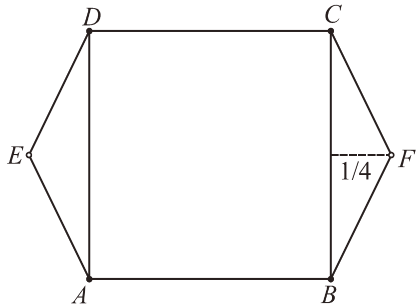
Uvažujme teraz problém najhustejšieho *uloženia zhodných gulí v nejakej väčšej guli*. V dimenzii 2 teda ide o najhustejšie uloženie kruhov s rovnakým polomerom r do väčšieho kruhu s daným polomerom $R > r$. Sú dva prístupy: buď pre dané $R > r > 0$ hľadáme maximálny počet k menších kruhov, ktoré je možné uložiť do väčšieho kruhu (a samozrejme nás zaujíma aj *extremálna konfigurácia*, teda to, ako sa dajú uložiť), alebo – a toto je častejšie – pre dané prirodzené číslo $k \geq 2$ hľadáme maximálny polomer $r = r(k) > 0$ taký, aby menšie kruhy s polomerom r bolo možné uložiť do väčšieho kruhu s polomerom R. Tie dva prístupy sú však ekvivalentné.

Pretože poloha gule je jednoznačne určená polohou jej stredu, býva zvykom namiesto ukladania gulí uvažovať ekvivalentný problém prípustného rozmiestnenia stredov tých gulí, pričom *prípustné rozmiestnenie* je také, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch uložených bodov nie je menšia ako vopred dané kladné číslo, obvykle 1, ale určite aspoň dvojnásobok polomeru ukladaných gulí.

Pre prirodzené číslo k označme $h(k)$ najväčšie číslo s vlastnosťou, že do kruhu s polomerom 1 sa dá uložiť k bodov tak, že najmenšia vzdialenosť medzi tými bodmi je $h(k)$. V terminológii ukladania kruhov to znamená nájsť najväčší možný priemer $h(k)$ zhodných kruhov tak, aby k takýchto kruhov bolo možné uložiť do kruhu s priemerom $2 + h(k)$. Presné hodnoty $h(k)$ pre $k \leq 10$ ukázal Pirl [Pir69]. Okrem týchto sú známe už len $h(11)$ – pozri Melissen [Me94] a štyri hodnoty $h(12)$, $h(13)$, $h(14)$ a $h(19)$, ktoré ukázal Fodor v [Fo00], [Fo03b], [Fo03] a [Fo99]. Málo presných výsledkov v tomto probléme, ako aj v mnohých iných problémoch tohto typu, je spôsobené tým, že neexistuje univerzálna metóda pre dôkaz, že naozaj ide o extrém; spôsob dôkazu sa totiž často mení od prípadu k prípadu. Najlepšie známe *dolné odhady* čísla $h(k)$ boli nájdené v Graham a ďalší v [Gr*98] pomocou počítača pre $n \leq 65$.

Priemer $diam\, M$ uzavretého konvexného telesa M je maximálna možná vzdialenosť medzi bodmi množiny M. Dvojicu bodov $X, Y \in M$ nazveme diametrálna , keď realizuje priemer množiny M, teda keď $|XY| = diam\, M$. Nech g_M je maximálny počet bodov, ktoré sa dajú umiestniť do M tak, aby ich vzájomná vzdialenosť bola aspoň 1. Nech G_M je množina bodov, ktorá realizuje číslo g_M. Je prirodzené očakávať, že G_M bude obsahovať excentrické body množiny M, napr. niektoré body na jej hranici, a predovšetkým najexcentrickejšie body, ktoré realizujú priemer $diam\, M$ množiny M. Nemusí to však byť tak. Ak množina P tvorí maximálne prípustné rozmiestnenie bodov v konvexnej množine M, teda množina P obsahuje najväčší možný počet bodov umiestnených v množine M tak, že vzájomná vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi z P je aspoň 1, potom množina P nemusí obsahovať žiadny z diametrálnych bodov množiny M. Uvedieme príklad takej množiny M.

Vezmime jednotkový štvorec $ABCD$ (*Obr. 6.1*) a na jeho protiľahlé strany AD a BC nalepíme dva zhodné rovnoramenné trojuholníky ADE, BCF tak, aby $|EF| = 3/2$.



Obr. 6.1

Diametrálne body konvexného šesťuholníka $M \equiv ABFCDE$ sú zrejme E, F. Body A, B, C, D ukazujú, že do M je možné umiestniť aspoň 4 body vo vzájomnej vzdialenosti aspoň 1. Zrejme však v M neexistuje prípustná množina 4 bodov taká, ktorá by obsahovala čo len jeden z diametrálnych bodov E, F. Iný príklad takej množiny nájde záujemca napr. v [Bá07], [BáB08]. Určite by bolo zaujímavé nájsť nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby maximálne prípustné uloženie bodov do konvexnej množiny M obsahovalo všetky diametrálne body, alebo aspoň jednu dvojicu diametrálnych bodov, ale toto sa zdá byť enormne ťažké.

* * *

Ďalej sa budeme venovať len ukladaniu *kongruentných gulí do kocky*. Pre dané prirodzené číslo k treba nájsť maximálny polomer $r = r(k)$ tak, aby k menších gulí s polomerom r bolo možné uložiť do jednotkovej kocky. V dimenzii 2, teda v rovine, ide o ukladanie kruhov do štvorca. Tento problém bol už naozaj hodne skúmaný a známe sú výsledky pre $k \leq 28$ (pozri napr. Nurmela a Östergård [NuÖ99], Schaer [Sc65], Schaer a Meir [ScM65], Peikert a ďalší [Pe*92], Markót [Ma04]). V práci LGS [LGS97] autori popísali tzv. *biliardový* algoritmus, ktorý umožňuje na počítači nájsť husté rozmiestňovanie stredov kruhov. Mnohé z nich sú asi najlepšie možné, ale dôkaz optimality samozrejme chýba. Dobrý prehľad je napr. v Ament a Blind [AmB00].

Pre *vyššie dimenzie* použijeme inú (ale samozrejme ekvivalentnú) formuláciu problému tak, ako bola uvedená v L. Moser [Mo66] a neskôr zopakovaná v Guy [Gu75], W. Moser [Mo91], Moser a Pach [MoP94], Brass-Moser-Pach [BMP05].

Problém 6.6. Označme $f(d)$ maximálnych počet bodov, ktoré sa dajú umiestniť do d-rozmernej jednotkovej kocky C^d tak, že všetky vzájomné vzdialenosti sú aspoň 1. Nájdite presné hodnoty $f(d)$ aspoň pre malé hodnoty d.

Bez ujmy na všeobecnosti za d-rozmernú jednotkovú kocku C^d vezmeme $\langle 0;1 \rangle^d$. Výsledky $f(d) = 2^d$ pre dimenzie d = 1, 2, 3 sú triviálne: ak kocku rozdelíme na polovicu v každom súradnicovom smere, tak telesová uhlopriečka je kratšia ako $\sqrt{3}/2$, takže do jednej malej kocky sa dá prípustne uložiť najviac jeden bod. Keďže malých kociek je 2^d, Dirichletov princíp dá maximum, pričom 2^d vrcholov určite tvorí prípustné uloženie. Jednoznačnosť uloženia v dimenzii 3 bola ukázaná v práci [BáB01] a v Schaer [Sc66]. Okrem týchto je známa už len presná hodnota $f(4) = 17$, ktorá bola dokázaná – spolu aj s jednoznačnosťou maximálnej konfigurácie – v [BáB03]. Tu už Dirichletov princíp nestačí, lebo každá zo 16 malých kociek má priemer 1 a teda do malej kocky sa zmestia dva body. Žiadne ďalšie presné hodnoty $f(d)$ však známe nie sú. (Poznamenajme, že v jednej práci sa objavilo, že rovnosť $f(4)=17$ dokázal aj Meir, ale dôkaz nikde nepublikoval. Samozrejme, možné to je. Ale kvôli exaktnosti je vhodné odvolať sa na veľmi serióznu knihu [Bö04] Károly Böröczky jr.: *Cambridge Tracts in Mathematics* #154 (2004): Finite Packing and Covering, kde autor konštatuje, že prvý dôkaz rovnosti $f(4)=17$ je v [BáB03].)

Napriek vyššie uvedenému faktu, že najhustejšie prípustné rozmiestnenie bodov v množine M nemusí obsahovať žiadny z diametrálnych bodov množiny M, sme presvedčení, že platí nasledovná hypotéza.

Hypotéza 6.1. Najhustejšie prípustné rozmiestnenie bodov do jednotkovej kocky C^d prinajmenšom po dimenziu $d=12$ obsahuje všetky vrcholy tej kocky, teda všetky dvojice diametrálnych bodov.

Platnosť tej hypotézy by umožnila nájsť presnú hodnotu čísla $f(d)$ prinajmenšom pre dimenzie 5 a 6. Platí totiž nasledovná veta:

Veta 6.1. ([BáB03]) Ak prípustná množina $f(5)$ bodov obsahuje všetky vrcholy jednotkovej kocky C^5, tak $f(5)=34$. Ak prípustná množina $f(6)$ bodov obsahuje všetky vrcholy jednotkovej kocky C^6, tak $f(6)=76$.

Je zrejmé, že akákoľvek konštrukcia prípustného uloženia dáva dolný odhad. V prácach [BáB03], [BáB07], [BáB08b] boli uvedené konštrukcie, ktoré ukazujú dolné odhady $f(5)\geq 34$, $f(6)\geq 76$, $f(7)\geq 184$, $f(8)\geq 481$, $f(9)\geq 994$, $f(10)\geq 2452$, $f(11)\geq 5464$, $f(12)\geq 14705$. V práci Horváth [Horv10] autor pomocou Hammingových kódov skonštruoval prípustné uloženie $\dfrac{3^d+2(d-1)3^{d/2}+1}{2d}$ bodov do $d=2^k$-rozmernej jednotkovej kocky. V prípadoch $k=2,3$ tomuto zodpovedajúce uloženia dajú výsledok zhodný s najlepšími známymi z [BáB03], teda $f(4)\geq 17$ a $f(8)\geq 481$.

Horné odhady sa získavajú podstatne ťažšie. V práci [BáB08] sme ukázali horné odhady čísla $f(d)$ pre $d=6,\dots,12$. Všetky tieto odhady boli o niečo zlepšené v Talata [Ta10] a značne sofistikovanými metódami pokrytia kocky C^d menšími kvádrami boli v tej práci získané aj netriviálne horné odhady pre dimenzie $d=13,\dots,24$.

V dimenzii 6 sme v práci [BáB12b] použitím úplne odlišnej metódy ukázali horný odhad $f(6)\leq 120$, ktorý je v súčasnosti najlepší známy.

V dimenzii 5 je známych viac výsledkov. V [BáB07] bol ukázaný horný odhad $f(5)\leq 44$; v tej istej dobe úplne iným (a výrazne komplikovanejším) spôsobom Joós v [Jó08] ukázal o 1 lepší odhad $f(5)\leq 43$, a ten istý autor toto v [Jó10] zlepšil na $f(5)\leq 42$. V súčasnosti najlepší horný odhad je $f(5)\leq 40$, ktorý sme dokázali v práci [BáB12], takže v dimenzii 5 platí $34\leq f(5)\leq 40$. Odhad $f(5)\leq 40$ je založený na Dirichletovom princípe a na nasledovnej leme: Do kvádra s dĺžkami hrán $1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ sa dá prípustne uložiť najviac 10 bodov, pričom tá *lema je najlepšia možná*. Dôkaz tej lemy však vyžaduje nájdenie a efektívne využitie množstva ďalších vlastností hustých uložení. Domnievame sa, že (prinajmenšom) v dimenziách 5, 6, 7, 8 budú presné hodnoty $f(n)$ zhodné s najlepšími známymi dolnými odhadmi čísla $f(n)$.

Hypotéza 6.2. $f(5)=34$, $f(6)=76$, $f(7)=184$, $f(8)=481$.

Pokiaľ ide o veľmi veľké dimenzie, horný odhad $f(d) \le d^{d/2}\left(1+\frac{1}{d}\right)^d \sim d^{d/2}e^{(1+o(1))\sqrt{d}}$ pre d dostatočne veľké z [BáB03] bol zlepšený v [BáB08] na základe písomnej komunikácie [Ma] a s využitím [FeK93] a [KaL78] na $f(d) \le d^{d/2} \cdot 0{,}63091^d e^{o(d)}$. Na základe [Ma] bol ukázaný aj netriviálny dolný odhad $f(d) \ge d^{d/2} \cdot 0{,}2419707^d\, \Omega\left(\sqrt{d}\right)$ v [BáB08].

7 Mix

V tejto časti sa veľmi stručne zmienim o niektorých problémoch, o ktorých si myslím, že by sa mali spomenúť, ale ktorých podrobnejší prehľad by neprimerane predĺžil tento článok.

Ak vezmeme n bodov v rovine, $n \ge 4$, nemôžu všetky dvojice tých bodov určovať tú istú vzdialenosť. Je teda prirodzené sa spýtať, najviac koľkokrát sa môže vyskytnúť tá istá vzdialenosť medzi n bodmi v rovine ([Er46]). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme vziať jednotkovú vzdialenosť a maximálny počet výskytu tejto vzdialenosti medzi n bodmi v rovine označíme $u(n)$. Presné hodnoty pre $n \le 14$ boli nájdené analýzou všetkých možných bodových konfigurácií. V súčasnosti najlepšie známe odhady sú $\Omega\left(n \cdot e^{\frac{c \cdot \log n}{\log \log n}}\right) \le u(n) \le O\left(\sqrt[3]{n^4}\right)$, sú však ďaleko od Erdősom predpokladanej nerovnosti $u(n) \le O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ pre všetky $\varepsilon > 0$.

Pretože jednoducho vyzerajúci problém sa napriek mnohým pokusom dodnes nepodarilo vyriešiť, vznikla široká paleta rôznych prístupov (často iniciovaných práve Erdősom) a z toho prameniaca ohromná literatúra. Skúmalo sa mnoho špeciálnych prípadov a príbuzných otázok, napr. aký je minimálny počet vzdialeností určených n bodmi v rovine (napr. [AEP91], [Bec83], [Chu84], [ChuST92], [Ele95], [ErF96], [ErF97]), rozdelenie vzdialeností a frekventované veľké vzdialenosti ([He56], [Ve85], [Ve87], [Ve96]), vzdialenosti bodov, resp. ich súčtov na sfére ([ChG85], [ChK73], [EHP89]), vzdialenosti medzi vrcholmi konvexných $n-$uholníkov ([Al63], [Al72], [Fi95], [Fi97], [Se03]), *k*-rovnoramennosť ([BáK01], [Fi98], [Koj01], [Koj02], [Wei12], [La*08]), ale aj body v konvexnej polohe, množiny určujúce len dve rôzne vzdialenosti, frekventované malé vzdialenosti, veľké množstvo „grafárskych" prístupov a podobne. (Pozri napr. [Br98], [Br98b], [Er75], [Er82], [Er84], [Er86]). Len málo z tých parciálnych problémov bolo úplne vyriešených, takže záujemca nájde v literatúre niektoré odpovede a *veľmi veľa otvorených otázok*.

* * *

Scott [Sco70] skúmal otázku, aký je minimálny počet $s(n)$ navzájom rôznych (neorientovaných) smerov určených n nekolineárnymi bodmi v rovine, a domnieval sa, že $s(n)=n$ pre n párne, pričom rovnosť sa dosiahne pre pravidelný n-uholník, resp. $s(n)=n-1$ pre n nepárne, pričom rovnosť sa dosiahne pre pravidelný (n–1)-uholník a jeho stred. Tú domnienku dokázal o 12 rokov neskôr Ungar [Un82]. Prekvapujúci je však počet rôznych konfigurácií, ktoré realizujú extremálne hodnoty. V [JaH83] sa nájdu *dve nekonečné triedy* takých konfigurácií a ešte *takmer stovka* nepravidelných.

Analogická otázka pre trojrozmerný euklidovský priestor bola vyriešená len nedávno [PPS04]: n bodov v E^3, ktoré neležia všetky v jednej rovine, určuje aspoň $2n-7$, resp. $2n-5$ smerov pre n párne, resp. nepárne.

* * *

Problém 7.1. ([MoP86], [KlW91]) Určte najväčšie číslo $k(n)$ také, aby sa z každej množiny n bodov v rovine dala vybrať $k(n)$-bodová podmnožina U, ktorej žiadny bod nie je stredom dvoch iných bodov z U.

Najlepšie v súčasnosti známe odhady sú $n^{1-c/\sqrt{\log n}} \le k(n) \le n/\log^d n$, kde c,d sú vhodné kladné konštanty. V [Bá*95], [Bá*97] sú ukázané niektoré presné hodnoty.

* * *

Rozdeliť jednou priamkou konečnú bodovú množinu v rovine na polovice je ľahké. Ak však požadujeme, aby deliaca priamka obsahovala aspoň dva body tej množiny, tak sa to zrejme nemusí dať. Alon [Al02] našiel také množiny pozostávajúce z $8k+4$ bodov, že počet bodov na dvoch stranách každej priamky určenej tými bodmi sa líši aspoň o dva.

Problém 7.2. ([Ku72]) Určuje každá konečná množina bodov v rovine takú priamku, že počet bodov v rôznych polrovinách s hranicou v tej priamke sa líši najviac o dva?

Problém 7.3. ([Pi03]) Určuje každá konečná množina n nekolineárnych bodov v rovine takú priamku, ktorá má v oboch polrovinách s hranicou v tej priamke aspoň $\frac{1}{2}n-3$ bodov?

* * *

Akékoľvek *dva* body v euklidovskej (alebo hyperbolickej) rovine určia *práve jednu* priamku, akékoľvek *tri* nekolineárne body v euklidovskej rovine určia *práve jednu* kružnicu, akékoľvek *dva* body v hyperbolickej rovine určia *práve dva* horocykly, ... Toto prirodzene podsúva myšlienku takého zovšeobecnenia, aby akýchkoľvek r *bodov* určilo práve q rôznych *objektov*. Práve za tým účelom bol v [Bá79] zavedený pojem *abstraktnej* (r, q)-štruktúry.

Definícia 7.1. Nech m, n, q, r sú prirodzené čísla také, že $n \ge 3$, $n \ge r$, $m \ge n+q-1$. Nech množina M má aspoň $n+q-1$ prvkov. Nech $\mathbf{P}=\{P_1,P_2,\dots,P_n\}\subset M$ je n-prvková podmnožina základnej množiny M. Nech 2^M je množina všetkých podmnožín množiny M. Nech m-prvkový systém množín $\mathbf{T}=\{T_1,T_2,\dots,T_m\}\subset 2^M$ spĺňuje nasledovné tri podmienky:

(μ) Každý prvok $T_k \in \mathbf{T}$ pre $k=1,2,\dots,m$ obsahuje aspoň r navzájom rôznych prvkov $P_{i_1}, P_{i_2},\dots, P_{i_r} \in \mathbf{P}$;

(δ) Ak $P_{i_1}, P_{i_2},\dots, P_{i_r}$ je r navzájom rôznych prvkov množiny $\mathbf{P}$, tak existuje práve q navzájom rôznych prvkov $T_{j_1},T_{j_2},\dots,T_{j_q} \in \mathbf{T}$ tak, že pre $p=1,2,\dots,q$ platí $P_{i_s} \in T_{j_p}$ pre každé $s\in\{1,2,\dots,r\}$;

(ι) Pre každých $r+1$ navzájom rôznych prvkov $P_{i_1}, P_{i_2},\dots, P_{i_{r+1}} \in \mathbf{P}$ existuje nanajvýš jeden prvok $T_k \in \mathbf{T}$ taký, že $P_{i_s} \in T_k$ pre každé $s\in\{1,2,\dots,r+1\}$.

Potom usporiadanú trojicu (M, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$) nazveme (r, q)-štruktúrou.

Prvok $T_j \in \mathbf{T}$ nazveme *trieda rádu* k, ak obsahuje práve k navzájom rôznych prvkov množiny $\mathbf{P}$. Trieda rádu r sa nazýva *prostá*. Ak $\mathbf{P} \in \mathbf{T}$, tak ($r$, q)-štruktúra $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ sa nazýva *triviálna*, ak. Prvok $P_i \in \mathbf{P}$ nazveme *prvok stupňa* k, ak je obsiahnutý práve v k navzájom rôznych triedach z $\mathbf{T}$.

Prvky množiny $\mathbf{P}$ budeme nazývať *body*. V prípade konkrétneho geometrického modelu (r, q)-štruktúry budeme pre prvky množiny $\mathbf{T}$, t.j. pre triedy, používať aj príslušný geometrický názov, napr. *priamka*, *kružnica*, *horocykel*, *sféra*, a podobne.

Definícia 7.1 sa stane omnoho prívetivejšou, ak ju vyjadríme pomocou vyššie zavedených pojmov. Axióma (μ) *minimálneho* počtu prvkov v triede vyžaduje, aby každá trieda obsahovala aspoň r rôznych bodov z $\mathbf{P}$. Axióma (δ) *dostatočného* počtu prvkov vyžaduje, aby každá r-tica bodov z $\mathbf{P}$ patrila práve do q tried z $\mathbf{T}$. Axióma (ι) hovorí o *jednoznačnosti*: akákoľvek (r + 1)-tica môže patriť najviac do jednej triedy, t.j. ak nejaká trieda obsahuje $r+1$ rôznych bodov, potom tá trieda je určená jednoznačne.

Takto interpretované vlastnosti už dávajú tušiť existenciu mnohých geometrických modelov (r, q)-štruktúr; niektoré z nich teraz uvedieme. Všimnime si predtým, že pre (r, 1)-štruktúru, teda pre $q=1$, môže byť $M = \mathbf{P}$, pretože $n+q-1=n$. Naviac v prípade $q=1$ platí implikácia (δ)$\rightarrow$(ι), teda podmienku (ι) možno v tomto prípade z definície vynechať.

Príklad 7.1. Nech $M = E^2$, kde E^2 je reálna euklidovská rovina. Nech $\mathbf{P}$ je množina n bodov v E^2. Nech $\mathbf{T}$ je množina všetkých priamok v E^2 určených bodmi z $\mathbf{P}$. Potom $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ je (2, 1)-štruktúra.

Príklad 7.2. Nech $M = E^2$. Nech $\mathbf{P}$ je množina n bodov v E^2 takých, že žiadne tri neležia na jednej priamke. Nech $\mathbf{T}$ je množina všetkých kružníc určených bodmi z $\mathbf{P}$. Potom $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ je (3, 1)-štruktúra.

Príklad 7.3. Nech $M = H^2$, t.j hyperbolická rovina a nech $\mathbf{P}$ je množina n bodov v H^2. Nech $\mathbf{T}$ je množina všetkých horocyklov v H^2 určených bodmi z $\mathbf{P}$. Potom $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ je $(2, 2)$-štruktúra.

Príklad 7.4. Ak vezmeme n-bodovú množinu $\mathbf{P}$ v E^2 takú, že $diam\, \mathbf{P} < 2$ a do $\mathbf{T}$ zaradíme všetky jednotkové kružnice určené bodmi z $\mathbf{P}$ (t.j. tie jednotkové kružnice, ktoré obsahujú aspoň dva body z $\mathbf{P}$), potom $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ je $(2, 2)$-štruktúra.

Príklad 7.5. Nech $M = E^3$. Nech $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ je n-bodová množina v E^3 taká, že žiadne štyri z nich nie sú komplanárne, teda neležia v jednej rovine. Každá trojica bodov $P_i, P_j, P_k \in \mathbf{P}$ jednoznačne určuje kružnicu so stredom $S_{i,j,k}$ a polomerom $r_{i,j,k}$. Označme $n_{i,j,k}$ priamku prechádzajúcu bodom $S_{i,j,k}$ kolmo na rovinu určenú bodmi P_i, P_j, P_k. Označme ďalej $\delta = \max r_{i,j,k}$ a vezmime číslo $D > \delta$ ľubovoľne. Potom každá trojica bodov $P_i, P_j, P_k \in \mathbf{P}$ určuje práve dve sféry s polomerom D, ktorých stredy sú na priamke $n_{i,j,k}$. Ak za $\mathbf{T}$ vezmeme množinu vyššie definovaných sfér, potom $(M, \mathbf{P}, \mathbf{T})$ je $(3, 2)$-štruktúra.

Samozrejme je možné uviesť mnoho ďalších príkladov (r, q)-štruktúr, avšak už vyššie uvedené postačujú k tomu, aby bola zrejmá šírka tohto pojmu, ktorý bol zavedený v [Bá79] (a postupne rozširovaný v [Bá*94], [Bá98], [Bá03], [Bá06]) ako pokus o zjednotenie množstva (najmä) geometrických modelov na základe ich spoločných *kombinatorických* vlastností. Tvrdenie platné pre *abstraktnú* (r, q)-štruktúru zostáva v platnosti aj pre všetky jej konkrétne modely. Je treba si však uvedomiť, že pre konkrétne (napr. geometrické) modely sa neraz dajú odvodiť silnejšie tvrdenia, nakoľko v konkrétnych modeloch okrem axiómov (μ), (δ), (ι) sú splnené – a pri dôkazoch podstatne využiteľné – aj iné vlastnosti. Nič to však nemení na tom, že niektoré tvrdenia o kombinatorických (r, q)-štruktúrach sú najsilnejšie možné.

Ak pre (r, q)-štruktúru ($\mathcal{M}$,$\mathbf{P},\mathbf{T}$) označíme p_k počet bodov stupňa k z množiny $\mathbf{P}$ a t_k počet tried rádu k z $\mathbf{T}$, tak evidentne sú splnené incidenčné rovnosti

$$(5.1) \quad \sum_{k=r}^{n} k \cdot t_k = \sum_{k=q}^{m} k \cdot p_k \,,$$

$$(5.2) \quad \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} \cdot t_k = q \cdot \binom{n}{r}.$$

Základná otázka pre (r, q)-štruktúry je obvykle otázka *Sylvestrovho typu*, teda či vždy je určená nejaká prostá trieda, alebo *Erdősovho typu*, teda aký je minimálny počet tried m, alebo *Elliottovho typu*, teda do koľkých tried musí patriť každý bod.

Začnime jednou odpoveďou na otázku *Erdősovho typu*.

Veta 7.1. ([Bá79]) Počet m tried (2, 2)-štruktúry ($\mathcal{M}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$) je aspoň tak veľký, ako počet bodov, teda $m \geq n$. Tento odhad je v istom zmysle najlepší možný.

Vo svetle vyššie uvedených geometrických modelov (2, 2)-štruktúr uveďme dva dôsledky tejto vety.

Veta 7.2. Počet h horocyklov určených n bodmi je aspoň n.

Veta 7.3. Počet jednotkových kružníc určených n-bodovou množinou $\mathbf{P}$, ktorej priemer je menší ako 2, je aspoň n.

Otázku pre maximálny počet horocyklov určených n bodmi v hyperbolickej rovine postavil Jucovič v [Ju70]. Veta 7.2 dáva lineárny dolný odhad. Kvadratický odhad $h \geq cn^2$ dokázal Beck [Bec83], ale s extrémne malou hodnotou konštanty c. Už v [Bá79] sa však objavila hypotéza, že $h \geq \binom{n-1}{2} + 3$.

* * *

Poznamenajme, že v roku 1999 A. Bezdek v práci [Be99] – okrem iných zaujímavých výsledkov – postavil aj tri problémy; tretí z nich bol Vetou 7.1, presnejšie jej dôsledkom vo Vete 7.3, zodpovedaný 20 rokov pred jeho sformulovaním.

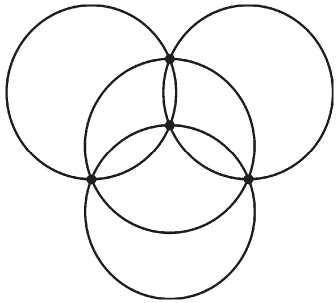
Každé tri nekolineárne body množiny $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ určujú práve jednu kružnicu, dvomi bodmi kružnica nie je určená. Ako ukazuje Príklad 7.2, body a kružnice nimi určené tvoria (3, 1)-štruktúru. Kružnica, ktorá obsahuje práve k bodov z množiny $\mathbf{P}$, sa nazýva *kružnica rádu* k, pričom zmysel majú samozrejme len kružnice rádu $k \geq 3$. Kružnica rádu 3 sa nazýva *prostá*. Pre kružnice určené n bodmi v rovine boli položené a skúmané analogické otázky, ako pre priamky. Existenciu prostej kružnice ako prvý dokázal Motzkin [Mot51], ale podstatný pokrok priniesla až práca Elliotta [El67] o 16 rokov neskôr.

* * *

Na 2. konferencii *Convex and Discrete Geometry*, Bydgoszcz 1998, predložil F. Fodor (v mene trojice autorov A. Bezdek, F. Fodor, I. Talata) nasledovný problém *Sylvestrovho typu*.

Nech $\mathbf{P}$ je množina $n \geq 2$ bodov v euklidovskej rovine E^2 taká, že *diam* $\mathbf{P} < 2$. Usporiadaná štvorica bodov sa nazýva *výnimočná*, ak tri z nich sú vrcholmi ostrouhlého trojuholníka vpísaného do jednotkovej kružnice a štvrtý bod je spoločným bodom troch jednotkových kružníc, ktoré obsahujú práve dva vrcholy toho trojuholníka (*Obr. 7.1*).

Dokážte, že ak **P** nie je výnimočná, potom aspoň jedna z jednotkových kružníc určených bodmi množiny **P** je prostá. (Pozri tiež Bezdek [Be99], Problem 1.)



Obr. 7.1 Výnimočná štvorica bodov

V spoločnej práci [BFT01] spomínaných troch autorov bol ten problém vyriešený pre prípad $diam\,\mathbf{P} \le \sqrt{2}$. Tento výsledok o málo neskôr zosilnil A. Bezdek [Be02] pre množinu $\mathbf{P}$ takú, že $diam\,\mathbf{P} < \sqrt{3}$. Pretože výnimočná štvorica bodov má priemer aspoň $\sqrt{3}$ a ak tri body výnimočnej štvorice tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka, potom má priemer presne $\sqrt{3}$, je táto Bezdekova veta najlepšia možná pre $n \ge 2$, nakoľko pre $n = 4$ výnimočná štvorica bodov neumožní dolný odhad väčší ako $\sqrt{3}$. Nič to však nemení na tom, že pre $n \ge 5$ sa očakávala pozitívna odpoveď pre množiny s vlastnosťou $diam\,\mathbf{P} < 2$. Definitívnu odpoveď na tento problém *Sylvestrovho typu* dal v roku 2002 Rom Pinchasi [Pi02] v duálnom tvare.

Veta 7.4. ([Pi02]) Nech **U** je konečná množina pozostávajúca z aspoň dvoch jednotkových kružníc v rovine, z ktorých každé dve sa pretínajú. Potom existuje bod, ktorý leží práve na dvoch takých kružniciach, pokiaľ **U** nie je výnimočná.

V súvislosti s jednotkovými kružnicami je však mimoriadne zaujímavá aj otázka *Elliottovho typu*: Aký je minimálny počet jednotkových kružníc určených bodmi konečnej množiny, ktoré prechádzajú jedným (ľubovoľným) bodom? Zrejme také body a jednotkové kružnice nimi určené tvoria (2, 2)-štruktúru (Príklad 7.4). Jednotková kružnica, ktorá obsahuje práve k bodov z množiny **P** sa nazýva *kružnica rádu* k. Jednotková kružnica rádu 2 sa nazýva *prostá*.

Tak vznikla (na druhý deň po Fodorovom oznámení problému) nasledovná veta, ktorá bola krátko potom publikovaná v [Bá99].

Veta 7.5. Nech **P** je taká množina $n \ge 2$ bodov v euklidovskej rovine E^2, že $diam\,\mathbf{P} < 2$. Potom každým bodom $P \in \mathbf{P}$ prechádza aspoň $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ jednotkových kružníc určených bodmi danej množiny **P**. Tento dolný odhad je najlepší možný a v extremálnej konfigurácii všetky jednotkové kružnice prechádzajúce bodom P sú rádu $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

Pre jednotkové kružnice je metrika podstatná. Preto je do istej miery prekvapujúce, že dôkaz predošlej bolo možné urobiť pomocou kruhovej inverzie, ktorá *metriku nezachováva*, lebo vzdialenosti sa pri inverzii menia.

Veta 7.6. ([Bá79]) Nech **P** je množina $n \geq 2$ bodov v hyperbolickej rovine H^2. Potom každým bodom $P \in \mathbf{P}$ prechádza aspoň $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ horocyklov. Tento odhad je najlepší možný a v extremálnej konfigurácii všetky horocykly prechádzajúce bodom $P \in \mathbf{P}$ sú rádu $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

Každá nekolineárna *trojica* bodov v rovine určí práve jednu kružnicu. Aký je maximálny počet rôznych *kongruentných* kružníc určených n bodmi v rovine? Bez ujmy na všeobecnosti môžeme skúmať maximálny počet kružníc s polomerom 1.

Problém 7.7. (Erdős) Aký je maximálny počet $u(n)$ jednotkových kružníc určených množinou n bodov v rovine?

Považujem za vhodné zdôrazniť, že teraz kružnica určená bodmi množiny **P** musí obsahovať *aspoň tri* body množiny **P**. Harborth [Har85] a Harborth a Mengersen [HarM86] určili presné hodnoty $u(n)$ pre $n \leq 8$ nasledovne: $u(3)=1$, $u(4)=u(5)=4$, $u(6)=8$, $u(7)=12$ a $u(8)=16$.

Nasledovná úvaha dáva triviálny horný odhad pre $u(n)$. Každá dvojica bodov leží najviac na dvoch jednotkových kružniciach. Ak sčítame jednotkové kružnice cez všetky dvojice bodov, dostaneme maximálny súčet $2 \cdot \binom{n}{2}$. V tomto je každá kružnica zahrnutá aspoň trikrát, teda $u(n) \leq \frac{1}{3}n(n-1)$.

Na druhej strane Elekes [Ele84] ukázal jednoduchú konštrukciu n bodov, ktoré určujú aspoň $n^{3/2}$ jednotkových kružníc.

* * *

Jeden z ústredných problémov kombinatorickej geometrie je dekompozícia, t.j. rozdelenie telesa na menšie časti. Veľmi ľahko sa dá dokázať, že kruh s priemerom D je možné rozdeliť na tri časti s menšími priemermi, ale nedá sa rozdeliť na dve časti s menšími priemermi. Ľahko sa dokáže aj prvá časť 3-dimenzionálneho analógu, teda že guľu s priemerom D je možné rozdeliť na štyri časti s menšími priemermi.

Karol Borsuk v [Bors32] pre každé $d \geq 2$ dokázal, že d-rozmerná guľa s priemerom D sa nedá rozdeliť na d častí s menšími priemermi.

Veta 7.7. ([Bors33]) Každá oblasť v E^2 s priemerom D sa dá rozdeliť na tri časti s menšími priemermi.

V dôkaze Borsukovej vety 7.7 podstatnú úlohu hrá nasledovná (mimoriadne užitočná) geometrická veta.

Veta 7.8. ([Pá21]) Každá rovinná oblasť F s priemerom D sa dá vpísať do pravidelného šesťuholníka, ktorého šírka je D.

Borsukovo číslo $\beta(d)$ je najmenšie číslo také, že každá množina v E^d s priemerom 1 sa dá rozdeliť na $\beta(d)$ častí s priemerom menším ako 1. V dôsledku [Bors32] je jasné, že $\beta(d) \geq d+1$. Dlho však panovala domnienka, že platí aj opačná nerovnosť $\beta(d) \leq d+1$. Túto domnienku podporovalo aj rozšírenie platnosti Borsukovej vety na dimenziu 3, teda že každá oblasť v E^3 s priemerom D sa dá rozdeliť na štyri časti s menšími priemermi (prvý dôkaz, hodne komplikovaný, je v [Eg55], výrazne jednoduchšie dôkazy sú napr. v [Grü57], [He57]). Niekoľko málo matematikov (napr. Erdős, Rogers, Soifer) sa však stavalo skepticky k platnosti tej hypotézy vo vysokých dimenziách. Kontrapríklad k hypotéze našli až Jeff Kahn a Gil Kalai [KaK93] v dimenzii 1326. Potom sa však strhla súťaž v hľadaní najmenšej dimenzie, kde tá hypotéza neplatí: 946 – Nilli [Ni94], 561 – Raigorodskij [Ra97], 560 – Weissbach [We00], 323 – Hinrichs [Hi02], 321 – Pikhurko [Pik02], 298 – Hinrichs [Hi03], pričom Pikhurkov rekord vydržal len 8 dní. Autori týchto zlepšení sa zhodujú v názore, že hľadaná najmenšia dimenzia bude oveľa menšia, možno niekde medzi 4 a 10.

Hypotéza. (Soifer [So10]) Existuje ohraničená množina v E^4, ktorá sa nedá rozdeliť na 5 častí s menšími priemermi.

Je to povzbudivá hypotéza, lebo dimenzia 4 je ešte docela dobre viditeľná. Menej povzbudivé je, že od roku 2002 sa rekord stále drží na 298.

8 Záver

Už názov článku naznačuje, že nejde o históriu celej kombinatorickej geometrie, ale len jej časti: teórie grafov som sa dotkol len okrajovo, aj keď mimoriadne veľa geometricky formulovaných problémov sa dá (aspoň čiastočne) riešiť práve metódami teórie grafov; pokrývacie problémy som ani nespomenul, aj keď majú mnoho praktických aplikácií; on-line verzie ukladacích a pokrývacích problémov som tak isto nespomenul, pričom tieto majú tiež nemálo praktických aplikácií; nespomenul som ani viacnásobné ukladania resp. pokrývania; nespomenul som problémy Hellyho typu; širokú triedu problémov frekventovaných vzdialeností som spomenul len ako heslo, podobne incidencie, smery, uhly, póliace priamky resp. nadroviny, problémy dekompozície ... Určite som mohol na viacerých miestach spomenúť nemálo českých (Chvátal, Matoušek, Nešetřil, Rödl, Valtr) a aj niekoľko slovenských (Božek, Skokan, Širáň, Vrťo) matematikov, ktorí sa týmito a príbuznými problémami zaoberali. Lenže to by tento článok musel byť podstatne dlhší a ja už nemám odvahu ďalej skúšať Vašu trpezlivosť. Ďakujem teda všetkým, ktorí to dočítali až sem!

Všetkým prajem veľa šťastia a mnoho príjemných chvíľ pri riešení otvorených problémov z tejto krásnej oblasti matematiky. Možno bude stačiť skúsiť šťastie pri jednej káve, lebo podľa Rényiho *matematik je stroj, ktorý kávu premieňa na teorémy*.

Literatúra

[AEP91] Avis D., Erdős P., Pach J.: *Distinct distances determined by subsets of a point set in space*. Comput. Geom. Theory. Appl. 1(1991), 1–11.

[AgA92] Agarwal P. K., Aronov B.: *Counting facets and incidences*. Discrete Comput. Geom. 7(1992), 359–369.

[AiZ04] Aigner M., Ziegler G. M.: *Proofs from THE BOOK*. 3.rd. ed., Springer, Berlin, 2004.

[Al02] Alon N.: *Problem* 365: *Splitting lines for planar pointsets*. Discrete Math. 257(2002), 601–602.

[Al63] Altman E.: *On a problem of P. Erdős*. Amer. Math. Monthly 70(1963), 148–157.

[Al72] Altman E.: *Some theorems on convex polygons*. Canad. Math. Bull. 15(1972), 329–340.

[AmB00] Ament P., Blind G.: *Packing equal circles in a square*. Studia. Sci. Math. Hungar. 36(2000), 313–316.

[An04] Anstreicher K. M.: *The thirteen spheres*: *A new proof*. Discrete Comput. Geom. 31(2004), 613–625.

[AnM06] Andreescu T., Mushkarov O.: *A note on the Malfatti problem*. Math. Reflections 4(2006), 1–7.

[Bá79] Bálint V.: *O určitej triede incidenčných štruktúr*. Práce a štúdie Vysokej školy dopravnej v Žiline 2(1979), 97–106.

[Bá90] Bálint V.: *A remark on a packing problem*. Práce a Štúdie Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, séria Mat.-Fyz. 8(1990), 7–12 (in Slovakian).

[Bá90b] Bálint V.: *A packing problem and the geometrical series*. Proc. of 4th Czechoslov. Symp. on Combinatorics, Graphs and Complexity, Prachatice, 1990, 17–21. Též in: Ann. Discrete Math. 51(1992), 17– 21.

[Bá*94] Bálint V., Branická M., Grešák P., Hrinko I., Lauron Ph., Stacho M.: *A little remark about the research of the* (r,q)*- structures*. In: Proc. Sci. Conf. of the Faculty of Electrical Engineering and Informatics of the Technical University of Košice, 1994, 5–8.

[Bá*95] Bálint V., Branická M., Grešák P., Hrinko I., Novotný P., Stacho M.: *Several remarks about midpoint-free subsets*. Studies of the University of Transport and Communications in Žilina, Math-Phys. Series, 10(1995), 3–10.

[Bá*97] Bálint V., Branická M., Grešák P., Novotný P., Stacho M.: *Súčasné najlepšie výsledky o bezstredových množinách*. In: Proc. of 6th Sci. Conf. of the TU Košice, 1997, 54–56.

[Bá98] Bálint V.: *Objects determined by n points*. In: Proc. Sci. Conf. of the University in Žilina, 1998, 13–18.

[Bá98b] Bálint V.: *Two packing problems*. Discrete Math. 178 (1998), 233–236.

[Bá99] Bálint V.: *On a connection between unit circles and horocycles determined by n points*. Period. Math. Hung. 38(1-2)(1999), 15–17.

[BáB01] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Unicity of one optimal arrangement of points in the cube*. In: Proc. of Symposium on Computer Geometry, Bratislava, Slovakia, 2001, 8–10 (in Slovakian).

[BáK01] Bálint V., Kojdjaková Z.: *Answer to one of Fishburn's questions*. Archivum Mathematicum (Brno) 37(4)(2001), 289–290.

[BáB03] Bálint V., Bálint V. Jr.: *On the number of point at distance at least one in the unit cube*. Geombinatorics 12(2003), 157–166.

[Bá03] Bálint V.: *A short survey of (r, q)-structures*. In: Discrete Geometry: *In Honor of W. Kuperberg's 60th Birthday*, Bezdek A. (ed.), Marcel Dekker, 2003, 27–32.

[Bá06] Bálint V.: *Kombinatorický pohľad na geometriu*. In: Sborník 29. konference o matematice na VŠTEZ, Mutěnice, 2006, 5–10.

[BáB07] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Horný odhad pre rozmiestňovanie bodov v kocke*. In: Sborník 5. konference o matematice a fyzice na VŠT. Univerzita obrany, Brno, 2007, 32–35.

[Bá07] Bálint V.: *Kombinatorická geometria – výber niektorých štrukturálnych problémov*. EDIS, Žilina, 2007.

[BáB08] Bálint V., Bálint V. Jr.: *On the maximum number of points at least one unit away from each other in the unit n-cube*. Periodica Mathematica Hungarica 57(1)(2008), 83–91.

[BáB08b] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Placing of points into the unit cube*. Slovak Journal for Geometry and Graphics 5(9)(2008), 5–12 (in Slovakian).

[BáČ07] Bálint V., Čmelková V.: *Ako nájsť presné hodnoty počtu prostých priamok určených n bodmi v rovine*? In: Proc. of Symposium on Comput. Geom. SCG'2007, 16, 5–11.

[Bá10] Bálint V.: *Maximization of the sum of areas*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, 24(2010), 1–8.

[BáB12] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Placing of points into the* 5*-dimensional unit cube*. Periodica Math. Hungarica 65(1)(2012), 1–16.

[BáB12b] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Packing of points into the unit* 6*-dimensional cube*. Contributions to Discrete Mathematics 7(1)(2012), 51–57.

[BáK01] Bárány I., Károlyi G.: *Problems and results around the Erdős-Szekeres convex polygon theorem*. In: JCDCG 00, Jap. Conf. Disc. Comput. Geom., Akiyama J. et al. (eds.), Springer LNCS 2098 (2001), 91–105.

[Bec83] Beck J.: *On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry*. Combinatorica 3(3-4)(1983), 281–297.

[Be99] Bezdek A.: *Incidence problems for points and unit circles. On the intersection points of unit circles*. In: Paul Erdős and His Mathematics, Sali A., Simonovits M., Sós V. T. (eds.), J. Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1999, 33–36.

[Be02] Bezdek A.: *On the intersection points of unit circles*. Amer. Math. Monthly 99(1992), 779–780.

[BeF10] Bezdek A., Fodor F.: *Extremal triangulations of convex polygons*. Symmetry: Culture and Science 21(1-4) (2010), 333–340.

[BFT01] Bezdek A., Fodor F., Talata I.: *Sylvester type theorems for unit circles*. Discrete Mathematics 241(1-3)(2001), 97–101.

[BiF89] Bisztriczky T., Fejes Tóth G.: *A generalization of the Erdős-Szekeres convex n-gon theorem*. J. Reine Angew. Math., 395(1989), 167–170.

[BiF89b] Bisztriczky T., Fejes Tóth G.: *Nine convex sets determine a pentagon with convex sets as vertices*. Geometriae Dedicata 31(1989), 89–104.

[BMP05] Brass P., Moser W. O. J., Pach J.: *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer, New York, 2005.

[Bors32] Borsuk K.: *Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen*. Verh. Internat. Math. Kongr. 2(1932), 192 (German).

[Bors33] Borsuk K.: *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*. Fund. Math. 20(1933), 177–190 (German).

[Bor83] Borwein P. B.: *A conjecture related to Sylvester's problem*. Amer. Math. Monthly 90(1983), 389–390.

[BorM90] Borwein P. B., Moser W. O. J.: *A survey of Sylvester's problem and its generalizations*. Aequationes Math. 40(1990), 111–135.

[Bö03] Böröczky K.: *The Newton-Gregory problem revisited*. In: Discrete Geometry: *In Honor of W. Kuperberg's 60th Birthday*, Bezdek A. (ed.), Marcel Dekker, 2003, 103–110.

[Bö04] Böröczky K. Jr.: *Finite Packing and Covering*. Cambridge Univ. Press, 2004.

[Brk72] Brakke K. A.: *Some new values for Sylvester's function for n non-collinear points*. J. Undergrad. Math. 4(1972), 11–14.

[Br98] Brass P.: *On point sets with many unit distances in few directions*. Discrete Computational Geometry 19(1998), 355–356.

[Br98b] Brass P.: *On the diameter of sets with maximum number of unit distances*. Geombinatorics 8(1998), 149–153.

[BrE48] de Bruijn N. G., Erdős P.: *On a combinatorial problem*. In: Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 51(1948), 1277–1279. Též in: Indagationes Math. 10(1948), 421–423.

[CFG94] Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.: *Unsolved problems in Geometry*. 2nd ed., Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[Ch70] Chakerian G. D.: *Sylvester's problem on collinear points and a relative*. Amer. Math. Monthly 77(1970), 164–167.

[ChK73] Chakerian G. D., Klamkin M. S.: *Inequalities for sums of distances*. Amer. Math. Monthly 80(1973), 1007–1017.

[ChG85] Chakerian G. D., Ghandehari M. A.: *The sum of distances determined by points on a sphere*. Discrete Geometry and Convexity, New York Acad. Sci. 80(1985), 88–91.

[Chu84] Chung F. R. K.: *The number of different distances determined by n points in the plane*. J. Comb. Theory, Ser. A, 36(1984), 342–354.

[ChuST92] Chung F. R. K., Szemerédi E., Trotter W. T.: *The number of different distances determined by a set of points in the Euclidean plane*. Discrete Comput. Geom. 7(1992), 1–11.

[ChuG98] Chung F. R. K., Graham R. L.: *Forced convex n-gons in the plane*. Discrete Comput. Geom. 19(1998), 367–371.

[CoE03] Cohn H., Elkies N. D.: *New upper bounds on sphere packings* I. Ann. Math. (2) 157(2003), 689–714.

[CoS96] Convay J. H., Sloane N. J. A.: *The antipode construction for sphere packings*. Invent. Math. 123(1996), 309–313.

[Cox48] Coxeter H. S. M.: *A problem of collinear points*. Amer. Math. Monthly 55(1948), 26–28.

[Cox89] Coxeter H. S. M.: *Introduction to Geometry*. 2nd ed., John Wiley & Sons, 1989.

[CrM68] Crowe D. W., McKee T. A.: *Sylvester's problem on collinear points*. Math. Magazine 41(1968), 30–34.

[CsS93] Csima J., Sawyer E. T.: *A short proof that there exist* $6n/13$ *ordinary points*. Discrete and Comput. Geom. 9(2)(1993), 187–202.

[De72] Delsarte P.: *Bounds for unrestricted codes by linear programming*. Philips Res. Rep. 27(1972), 272–289.

[Di51] Dirac G. A.: *Collinearity properties of sets of points*. Quarterly Journal of Math. Oxford series, 2(1951), 221–227.

[EdRS98] Edel Y., Rains E. M., Sloane N. J. A.: *On kissing numbers in dimensions* 32 *to* 128. Electron. J. Combin. 5(1988), #R22.

[Ed70] Edelstein M.: *Generalizations of the Sylvester problem*. Math. Magazine 43(1970), 181–188.

[Eg55] Eggleston H. G.: *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*. J. London Math. Soc. 30(1955), 11–24.

[EHK63] Edelstein M., Herzog F., Kelly L. M.: *A further theorem of the Sylvester type*. Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 359–363.

[EHP89] Erdős P., Hickerson D., Pach J.: *A problem of Leo Moser about Repeated Distances on the Sphere*. Amer. Math. Monthly 96(1989), 569–575.

[Ele84] Elekes G.: *n points in the plane can determine* $n^{3/2}$ *unit circles*. Combinatorica 4(1984), 131.

[Ele95] Elekes G.: *Circle grids and bipartite graphs of distances*. Combinatorica 15(1995), 175–185.

[El67] Elliott P. D. T. A.: *On the number of circles determined by n points*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18(1967), 181–188.

[ErS35] Erdős P., Szekeres G.: *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Math. 29(1935), 463–470.

[Er43] Erdős P.: *Problem* 4065. Amer. Math. Monthly 50(1943), 65.

[Er46] Erdős P.: *On sets of distances of n points*. Amer. Math. Monthly 53(1946), 248–250.

[ErS60] Erdős P., Szekeres G.: *On some extremum problems in elementary geometry*. Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 3-4(1961), 53–62.

[Er75] Erdős P.: *On some problems of elementary and combinatorial geometry*. Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV., 103(1975), 99–108.

[Er78] Erdős P.: *Some more problems on elementary geometry*. Australian Math. Soc. Gazette 5(1978), 52–54.

[Er82] Erdős P.: *Problems and results in combinatorial geometry*. Discrete Geometry and Convexity, New York, April 2–3, 1982, Goodman J. E. et al., (eds.), Ann. New York Acad. Sci. 440, 1–11.

[Er83] Erdős P.: *Combinatorial problems in geometry*. Math. Chronicle 12(1983), 35–54.

[Er84] Erdős P.: *Some old and new problems in combinatorial geometry*. Annals Discrete Math. 20(1984), 129–136.

[Er86] Erdős P.: *On some metric and combinatorial geometric problems*. Discrete Math. 60(1986), 147–153.

[ErP95] Erdős P., Purdy G.: *Two combinatorial problems in the plane*. Discrete Comput. Geom. 13(1995), 441–443.

[ErF96] Erdős P., Fishburn P.: *Minimum planar sets with maximum equidistance counts*. Computational Geometry 6(1996), 1–12.

[ErF97] Erdős P., Fishburn P.: *Distinct distances in finite planar sets*. Discrete Math. 175(1997), 97–132.

[EriZ01] Ericson T., Zinoviev V.: *Codes on Euclidean Spheres*. North-Holland/Elsevier, Amsterdam, 2001.

[Fe03] Fejes Tóth L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. 2. Auflage, Springer, 2003.

[FeK93] Fejes Tóth G., Kuperberg W.: *Packing and covering with convex sets*. *Handbook of Convex Geometry,* Vol. B. Gruber P. M., Wills J. M. (ed.), North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1993.

[FeH11] Ferguson S. P., Hales T. C.: *The Kepler Conjecture*: *The Hales-Ferguson Proof*. Springer, New York, 2011.

[Fi95] Fishburn P.: *Convex polygons with few intervertex distances*. Computational Geom. 5(1995), 65–93.

[Fi97] Fishburn P.: *Distances in convex polygons*. In: The Mathematics of Paul Erdős II., Graham R. L. & Nešetřil J. (eds.), Springer, 1997, 284–293.

[Fi98] Fishburn P.: *Isosceles planar subsets*. Discrete Computational Geometry 19(1998), 391–398.

[Fo99] Fodor F.: *The densest packing of* 19 *congruent circles in a circle*. Geometriae Dedicata 74(1999), 139–145.

[Fo00] Fodor F.: *The densest packing of* 12 *congruent circles in a circle*. Beiträge Algebra Geom. 21(2000), 401–409.

[Fo03] Fodor F.: *Packing* 14 *congruent circles in a circle*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, 16(2003), 25–34.

[Fo03b] Fodor F.: *The densest packing of* 13 *congruent circles in a circle*. Beiträge Algebra Geom. 21(2003), 431–440.

[Ga831] Gauss C. F.: *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber, Göttingische gelehrte Anzeigen* 9. Juli 1831, see: Werke, Band 2, 2. Aufl. Göttingen 1876, 188–196; též J. Reine Angew. Math. 20(1840), 312–320.

[Ge08] Gerken T.: *Empty convex hexagons in planar points sets*. Discrete Comput. Geom. 38(1-3)(2008), 239–272.

[GrL95] Graham R. L., Lubachevsky B. D.: *Dense packings of equal disks in an equilateral triangle: from* 22 *to* 34 *and beyond*. Electron. J. Combin. 2 (1995), #A1.

[GRS90] Graham R., Rothschild B., Spencer J.: *Ramsey Theory*. 2nd ed. J. Wiley & Sons, New York, 1990.

[Gr*98] Graham R. L., Lubachevsky B. D., Nurmela K. J., Östergård P. R. J.: *Dense packings of congruent circles in a circle*. Discrete Math. 181(1998), 139–154.

[Grü57] Grünbaum B.: *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*. Proc. Cambridge. Philos. Soc. 53(1957), 776–778.

[Grü72] Grünbaum B.: *Arrangements and Spreads*. In: Regional Conference Series in Mathematics 10, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1972.

[Grü99] Grünbaum B.: *Omittable points*. Geombinatorics 9(1999), 57–62.

[Gu75] Guy R. K.: *Problems in the geometry of linear and metric spaces*. Springer Lecture Notes Math. 490(1975), 233–244.

[Had55] Hadwiger H.: *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*. J. Reine Angew. Math. 194(1955), 101–110.

[Had57] Hadwiger H.: *Über Treffenzahlen bei translationsgleichen Eikörpen*. Arch. Math. 8(1957), 212–213.

[Ha92] Hales T. C.: *The sphere packing problem*. J. Comput. Appl. Math. 44(1992), 41–76.

[Ha94] Hales T. C.: *The status of the Kepler conjecture*. Math. Intelligencer 16(3)(1994), 47–58.

[Ha97] Hales T. C.: *Sphere packings* I. Discrete Comput. Geom. 17(1997), 1–51.

[Ha97b] Hales T. C.: *Sphere packings* II. Discrete Comput. Geom. 18(1997), 135–149.

[Ha00] Hales T. C.: *Cannonballs and honeycombs*. Notices Amer. Math. Soc. 47(4)(2000), 440–449.

[HaF06] Hales T. C., Ferguson S. P.: *The Kepler conjecture*. Discrete Comput. Geom. 36(1)(2006), 21–69.

[Hh55] Hanani H.: *On the number of lines and planes determined by n points*. Technion. Israel Inst. Tech. Sci. Publ. 6(1954/55), 58–63.

[Han65] Hansen S.: *A generalization of a theorem of Sylvester on the lines determined by a finite point set*. Mathematica Scandinavica 16(1965), 175–180.

[Han80] Hansen S.: *On configurations in* 3*-space without elementary planes and on the number of ordinary planes*. Math. Scandinavica 47(1980), 181–194.

[Han81] Hansen S.: *Contributions to the Sylvester-Gallai-Theory*. Doctoral dissertation, University of Copenhagen, 1981.

[Har78] Harborth H.: *Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen*. Elemente der Mathematik, 33(1978), 116–118.

[Har85] Harborth H.: *Einheitskreise in ebenen Punktmengen*. In: 3. Kolloquium über Diskrete Geometrie, Institut für Mathematik der Universität Salzburg, 1985, 163–168.

[HarM86] Harborth H., Mengersen I.: *Points with many unit circles*. Discrete Math. 60(1986), 193–197.

[He56] Heppes A.: *Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7(1956), 463–466.

[He57] Heppes A.: *Térbeli ponthalmazok felosztása kisebb átmérőjű részhalmazok összegére*. Mat. és fiz. tud. közl. 7(1957), 413–416 (in Hungarian).

[HeK60] Herzog F., Kelly L. M.: *A generalization of the theorem of Sylvester*. Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960), 327–331.

[Hi02] Hinrichs A.: *Spherical codes and Borsuk's conjecture*. Discrete Math. 243(2002), 253–256.

[HiR03] Hinrichs A., Richter C.: *New sets with large Borsuk numbers*. Discrete Math. 270(2003), 137–147.

[Ho83] Horton J. D: *Sets with no empty* 7*-gons*. Canad. Math. Bull. 26(1983), 482–484.

[Hor75] Hortobágyi I.: *Über die Scheibenklassen bezügliche Newtonsche Zahl der konvexen Scheiben*. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sect. Math., 18(1975), 123–127.

[Horv10] Horvát G. Á.: *Packing points into a unit cube in higher space*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, 24(2010), 23–28.

[Hou10] Hougardy S.: *On packing squares into a rectangle*. Tech. Report 101007, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, March 2010.

[Hs93] Hsiang W.-Y.: *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*. Internat. J. Math. 4(1993), 739–831.

[Hs95] Hsiang W.-Y.: *A rejoinder to T. C. Hales' article*: *„The status of the Kepler conjecture"*. Math. Intelligencer 17(1)(1994), 35–42.

[JaH83] Jamison R. E., Hill D.: *A catalogue of slope-critical configurations*. Congressus Numerantium 40(1983), 101–125.

[Je94] Jennings D.: *On packing unequal rectangles in the unit square*. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 68(1994), 465–469.

[Je95] Jennings D.: *On packing of squares and rectangles*. Discrete Math. 138(1995), 293–300.

[Jó08] Joós A.: *Pontok elhelyezése egységkockában*. PhD tézisek, 2008 (in Hungarian).

[Jó10] Joós A.: *On the number of points at distance at least* 1 *in the* 5*-dimensional unit cube*. Acta Sci. Math. 76(1-2)(2010), 217–231.

[Ju70] Jucovič E.: *Problem* 24. In: Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1970.

[KaL78] Kabatjanskij G. A., Levenshtein V. I.: *Bounds for packings on a sphere and space*. Problemy Peredachi Informacii 14(1978), 3–24.

[KaK93] Kahn J., Kalai G.: *A counterexample to Borsuk's conjecture*. Bull. Amer. Math. Soc. 29(1993), 60–62.

[KeM58] Kelly L. M., Moser W. O. J.: *On the number of ordinary lines determined by n points*. Canad. J. of Math. 10(1958), 210–219.

[Ke611] Kepler J.: *Srena seu de nieve sexangula*. Tampach, Frankfurt, 1611. English translation: *The Six-Cornered Snowflake*. Oxford, 1966.

[KlK70] Kleitman D. J., Krieger M. M.: *Packing squares in rectangles* I. Ann. New York Acad. Sci. 175(1970), 253–262.

[KlK75] Kleitman D. J., Krieger M. M.: *An optimal bound for two dimensional bin packing*. Proceedings FOCS 1975, IEEE computer Soc.,1975, 163–168.

[KlP98] Kleitman D. J., Pachter L.: *Finding convex sets among points in the plane*. Discrete Comput. Geom. 19(1998), 405–410.

[KlW91] Klee V., Wagon S.: *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*. The Math. Assoc. of America, 1991.

[Koj01] Kojdjaková Z.: *There are* 7*-point* 4*-isosceles planar sets with no* 4 *points on a circle*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, 14(2001), 11–12.

[Koj02] Kojdjaková Z.: 5*-rovnoramenné množiny*. In: Proceedings of the 7th Sci. Conf. of the Technical University of Košice, 2002, 49–50.

[Ko57] Kosiński A.: *A proof of the Auerbach-Banach-Mazur-Ulam theorem on convex bodies*. Colloq. Math. 4(1957), 216–218.

[Kos07] Koshelev V. A.: *On the Erdős-Szekeres problem*. Doklady Mathematics 76(1)(2007), 603–605. Original Russian Text published in Doklady Akademii Nauk 415(6)(2007), 734–736.

[KoP60] Koutský K., Polák V.: *Poznámka o postradatelných bodech v úplných sestavách bodů a přímek v rovině*. Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 60–69.

[Ku72] Kupitz Y. S.: *On a generalization of the Gallai - Sylvester theorem*. Discrete Computational Geom. 7(1972), 87–103.

[La*08] Lan W., Wei X., Ding R.: *On* 5*-isosceles sets in the plane, with linear restriction*. J. Appl. Math. Comput. 28(2008), 381–390.

[La55] Lang G. D. W.: *The dual of a well-known theorem*. Math. Gazette 39(1955), 314.

[Le56] Leech J.: *The problem of thirteen spheres*. Math. Gazette 40(1956), 22–23.

[Le64] Leech J.: *Some sphere packings in higher space*. Canad. J. Math. 16(1964), 657–682.

[Lev79] Levenshtein V. I.: *On bounds for packings in n-dimensional Euclidean space*. Soviet Math. Dokl. 20(1979), 417–421.

[LGS97] Lubachevsky B. D., Graham R. L., Stillinger F. H.: *Patterns and structures in disk packings*. Period. Math. Hungar. 34(1997), 123–142.

[Li88] Lin X. B.: *Another brief proof of the Sylvester theorem*. Amer. Math. Monthly 95(1988), 932–933.

[Ma] Makai E. Jr.: Private communication.

[Ma803] Malfatti G.: *Memoria sopra un problema sterotomico*. Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze 10(1803), 235–244.

[Ma04] Markót M. Cs.: *Optimal packing of* 28 *equal circles in a unit square – the first reliable solution*. Numerical Algorithms 37(2004), 253–261.

[MeM68] Meir A., Moser L.: *On packing of squares and cubes*. J. Combinatorial Theory 5(1968), 126–134.

[Mel41] Melchior E.: *Über Vielseite der projektiven Ebene*. Deutsche Mathematik 5(1941), 461–475.

[Me94] Melissen J. B. M.: *Densest packing of eleven congruent circles in a circle*. Geometriae Dedicata 50(1994), 15–25.

[Mo66] Moser L.: *Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry*. Mimeographed, 1966.

[MoM67] Moon J., Moser L.: *Some packing and covering theorems*. Colloquium Math. 17(1967), 103–110.

[Mo91] Moser W. O. J.: *Problems, problems, problems*. Discrete Applied. Mathematics 31(1991), 201–225.

[MoP86] Moser W. O. J., Pach J.: 100 *Research Problems in Discrete Geometry*. McGill University, Montreal, 1986.

[MoP94] Moser W. O. J., Pach J.: *Research Problems in Discrete Geometry*. Privately published collection of problems, Montreal, McGill University, 1994.

[Mot51] Motzkin T.: *The lines and planes connecting the points of a finite set*. Trans. Amer. Math. Soc. 70(1951), 451–464.

[Mu03] Musin O. R.: *The problem of twenty-five spheres*. Russ. Math. Surv. 58(2003), 794–795.

[Mu05] Musin O. R.: *The kissing number in four dimensions*. arXiv: math.MG/0309430.

[Ni07] Nicolás C. M.: *The empty hexagon theorem*. Discrete Computational Geometry 38(2)(2007), 389–397.

[Nil94] Nilli A.: *On Borsuk's Problem*. Jerusalem Combinatorics '93: Barcelo H., Kalai G. (eds.), Contemporary Mathematics 178, American Math. Society 1994, 209–210.

[No95] Novotný P.: *A note on packing of squares*. Stud. Univ. Transp. Commun. Žilina, Math-Phys. Ser. A, 10(1995), 35–39.

[No96] Novotný P.: *On packing of squares into a rectangle*. Archivum Math. (Brno) 32(1996), 75–83.

[No99] Novotný P.: *On packing of four and five squares into a rectangle*. Note di Math. 19(1999), 199–206.

[No02] Novotný P.: *Use a computer to solve a packing problem*. In: Proc. of Symposium on Comput. Geometry, Kočovce, Slovakia, September 2002, 60–62 (in Slovak).

[NuÖ99] Nurmela K. J., Östergård P. R. J.: *More optimal packings of equal circles in a square*. Discrete Comput. Geom. 22(1999), 439–457.

[OdS79] Odlyzko A. M., Sloane N. J. A.: *New bounds on the unit spheres that can touch a unit sphere in n-dimensions*. J. Combinatorial Theory Ser. A 26(1979), 210–214. Russian: *O granicach dľa upakovok v n-mernom evklidovom prostranstve*. Doklady Akademii Nauk SSSR 245(6)(1979), 1299–1303.

[Ol61] Oler N.: *A finite packing problem*. Canad. Math. Bull. 4(1961), 153–155.

[Ov03] Overmars M. H.: *Finding sets of points without empty convex 6-gons*. Discrete Comput. Geometry 29(2003), 153–158.

[PaP00] Pach J., Pinchasi R.: *Bichromatic lines with few points*. J. Comb. Theory, Ser. A, 90(2000), 326–335.

[PaS04] Pach J., Sharir M.: *Geometric incidences*. In: Towards a Theory of Geometric Graphs, Pach J. (ed.), Contemporary Math. 342(2004), 185–223.

[PaT97] Pach J., Tóth G.: *Graphs drawn with few crossings per edge*. Combinatorica 17(1997), 427–439.

[PaT00] Pach J., Tóth G.: *Erdős-Szekeres-type theorems for segments and non-crossing convex sets*. Geometriae Dedicata 81(2000), 1–12.

[Pa*04] Pach J., Radoičić R., Tardos G., Tóth G.: *Improving the Crossing Lemma by finding more crossings in sparse graphs*. In: SCG 04, Proc. 20th ACM Symp. Comput. Geom. 2004, 68–75.

[PPS04] Pach J., Pinchasi R., Sharir M.: *Solution of Scott's problem on the number of directions determined by a point set in 3-space*. In: SCG 04 (20th ACM Symp. Comput. Geom. 2004), 76–85.

[Pá21] Pál J. F.: *Ein Minimumproblem für Ovale*. Math. Ann. 83(1921), 311–319 (in German).

[Pau98] Paulhus M.: *An algorithm for packing squares*. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 82(1998), 147–157.

[Pay97] Payan Ch.: *Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral. À propos d'une conjecture d'Erdős-Oler*. Discrete Math. 165-166(1997), 555–565.

[Pe*92] Peikert R., Würtz D., Monagan M., de Groot C.: *Packing circles in a square: A review and new results*. In: System Modelling and Optimization 1991, Kall P. (ed.), Springer Lecture Notes Control Inf. Sci. 180(1992), 45–54.

[Pik02] Pikhurko O.: *Borsuk's Conjecture Fails in Dimensions* 321 *and* 322. arXiv: math/0202112v1 [math.CO] February 12, 2002.

[Pi02] Pinchasi R.: *Gallai-Sylvester Theorem for Pairwise Intersecting Unit Circles*. Discrete Comput. Geom. 30(2002), 607–624.

[Pi03] Pinchasi R.: *Lines with many points on both sides*. Discrete Comput. Geom. 30(2003), 415–435.

[Pir69] Pirl U.: *Der Mindestabstand von n in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten*. Math. Nachr. 40(1969), 111–124.

[PóV02] Pór A., Valtr P.: *The partitioned version of the Erdős-Szekeres theorem*. Discrete Comput. Geom. 28(2002), 625–637.

[Pu86] Purdy G.: *Two results about points, lines and planes*. Discrete Mathematics 60(1986), 215–218.

[Ra30] Ramsey F. P.: *On a problem of formal logic*. Proceedings of the London Math. Society 30(1930), 338–384.

[Rai97] Raigorodski A. M.: *On the dimension in Borsuk's problem*. Russian Math. Surveys 52(1997), 1324–1325.

[Ro58] Rogers C. A.: *The packing of equal spheres*. Proc. London Math. Soc., 3. Ser., 8(1958), 609–620.

[Sc65] Schaer J.: *The densest packing of 9 circles in a square*. Canad. Math. Bull. 8(1965), 273–277.

[ScM65] Schaer J., Meir A.: *On a geometric extremum problem*. Canad. Math. Bull. 8(1965), 21–27.

[Sc66] Schaer J.: *On the densest packing of spheres in a cube*. Canad. Math. Bull. 9(1966), 265–270.

[Sco70] Scott P. R.: *On the sets of directions determined by n points*. Amer. Math. Monthly 77(1970), 502–505.

[ScvW53] Schütte K., van der Waerden B. L.: *Das Problem der dreizehn Kugeln*. Math. Ann. 125(1953), 325–334.

[Se03] Sedliačková Z.: *Vertices of the regular polygons as k-isosceles sets*. Studies of Univ. in Žilina, Math. Series, 16(2003), 85–88.

[So10] Soifer A.: *Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics*. 2nd ed., Springer, 2010.

[St44] Steinberg R.: *Solution to Problem* 4065. Amer. Math. Monthly 51(1944), 169–171.

[Sy893] Sylvester J. J.: *Mathematical Question* 11851. The Educational Times 46(1893), 156.

[Sz97] Székely L. A.: *Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry*. Comb. Probab. Comput. 6(1997), 353–358.

[SzT83] Szemerédi E., Trotter W. T.: *Extremal problems in discrete geometry*. Combinatorica 3(1983), 381–392.

[Ta10] Talata I.: *Covering the d-dimensional unit cube by n rectangular boxes of smaller diameter*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, 24(2010), 65–76.

[Th892] Thue A.: *On some geometric number-theoretic theorems*. Forhandlingerne ved de Skandinaviske Naturforskeres 14(1892), 352–353 (in Danish). Též in: Selected Mathematical Papers, Nagell T. et al. (eds.), Universitetsforlaget Oslo, 1977.

[Th10] Thue A.: *On the densest packing of congruent circles in the plane*. Skr. Vidensk-Selsk, Christiania 1(1910), 3–9. Též in: Selected Mathematical Papers, Nagell T. et al. (eds.), Universitetsforlaget Oslo, 1977, 257–263 (in Norwegian).

[TóV98] Tóth G., Valtr P.: *Note on the Erdős-Szekeres theorem*. Discrete Comput. Geom. 19(1998), 457–459.

[TóV05] Tóth G., Valtr P.: *The Erdős-Szekeres theorem*: *upper bounds and related results*. In: Combinatorial and Computational Geometry, Goodman J. E. et al. (eds.), Cambridge Univ. Press, MSRI Publications 52(2005), 557–568.

[Tu77] Turán P.: *A note of welcome*. J. Graph Theory 1(1977), 7–9.

[Un82] Ungar P.: 2*N noncollinear points determine at least* 2*N directions*. J. Combin. Theory, Ser. A, 33(1982), 343–347.

[Va92] Valtr P.: *Convex independent sets and* 7-*holes in restricted planar point sets*. Discrete Comput. Geom. 7(1992), 135–152.

[Var95] Vardy A.: *A new sphere packing in* 20 *dimensions*. Inventiones Math. 121(1995), 119–133.

[Ve85] Vesztergombi K.: *On the distribution of distances in finite sets in the plane*. Discrete Math. 57(1985), 129–145.

[Ve87] Vesztergombi K.: *On large distances in planar sets*. Discrete Math. 67(1987), 191–198.

[Ve96] Vesztergombi K.: *The two largest distances in finite planar sets*. Discrete Math. 150(1996), 379–386.

[Wei12] Wei X.: *No* 4-*isosceles set with eight points on a circle*. Ars Combinatoria 105(2012), 77–81.

[We00] Weissbach B.: *Sets with large Borsuk number*. Beiträge Algebra Geom. 41(2000), 417–423.

[ZaL94] Zalgaller V. A., Los G. A.: *The solution of Malfatti's problem*. Journal of Math. Sciences 72(4)(1994), 3163–3177.

[Zo98] Zong C.: *The kissing numbers of convex bodies – a brief survey*. Bull. London Math. Soc. 30(1998), 1–10.

Adresa

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky
Fakulta PEDAS, Žilinská univerzita
Univerzitná 1
010 26 Žilina
e-mail: *vojtech.balint@fpedas.uniza.sk*

JOSEF KOROUS A JEHO PRÍNOS PRE ROZVOJ TEÓRIE ORTOGONÁLNYCH POLYNÓMOV

MARIANA MARČOKOVÁ

Abstract: Outstanding mathematician and university teacher prof. RNDr. Josef Korous, DrSc., (1906–1981) is well-known in mathematical community of all the world mainly by his scientific results in the theory of orthogonal polynomials. He contributed to Czech and Slovak mathematics a lot also as professor in higher education at universities and colleges, as supervisor of research work of his followers – mathematicians, as helpful supervisor in applied mathematics of young engineers and as a chairman or a member of scientific committees. Many years he worked as the member and a functionary of the Union of Czechoslovak (Czech and Slovak, resp.) mathematicians and physicists. In the article we remind his life and scientific and educational work, especially his contribution to development of the theory of orthogonal polynomials in the last century.

1 Zo života Josefa Korousa[1]

Josef Korous sa narodil 7. februára 1906 v Prahe v rodine stavebného inžiniera, ktorá pochádzala z rodu, z ktorého pochádzal aj vynikajúci matematik – Matyáš Lerch. V rodine bolo neskôr päť detí: Josef, Ladislav, Antonie, Veronika a Karel. Josef bol najstarší z nich. Po absolvovaní základného vzdelania začal študovať v roku 1916 na gymnáziu v Písku, kde sa rodina presťahovala, pretože jeho otec Josef Korous tam vykonával vojenskú službu. Po maturite na Jiráskovom gymnáziu v Prahe začal v roku 1924 študovať matematiku a fyziku na Karlovej univerzite. Počas tohto štúdia sa najviac zaujímal o prednášky a semináre profesora Karla Petra, ktorý ho považoval za jedného zo svojich najlepších študentov. Štúdium na Karlovej univerzite ukončil v decembri 1928, ale už v júni 1928 získal titul RNDr. na základe práce *O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu Hermiteových polynomů* (pozri [1]), ktorá bola uverejnená v *Rozpravách II. třídy České akademie věd v Praze* ešte v tom istom roku. Keď absolvoval Karlovu univerzitu, dosiahol kvalifikáciu pre učiteľstvo matematiky a fyziky vo vyšších triedach stredných škôl, avšak krátko predtým úspešne absolvoval aj štátnu skúšku z poistnej matematiky a matematickej štatistiky. V rokoch 1929–1930 študoval ako štipendista Ministerstva školstva matematiku u Hilberta a Landaua na Univerzite v Göttingen v Nemecku.[1]

Už počas štúdia na Karlovej univerzite pracoval v rokoch 1927 a 1928 ako pomocný asistent jej matematického ústavu a koncom roku 1928 ako pomocný asistent pre výučbu fyziky na Vysokej škole obchodnej. Po návrate z Göttingenu učil v rokoch 1930–1934 na Českom vysokom učení technickom v Prahe. Po absolvovaní základnej vojenskej služby v rokoch 1934–1936 bol učiteľom matematiky a fyziky na niekoľkých českých stredných

---

[1] O živote J. Korousa boli v článku okrem iného použité informácie z článkov [32], [33], [35] a [39] a z kroniky [36], ktorých autormi sú bývalí kolegovia J. Korousa. Ich dávnejšie spomienky a niektoré ďalšie písomné materiály, ktoré autorke tohto článku pri svojom odchode do dôchodku zanechali, boli tiež zdrojmi informácií pri jeho tvorbe a tvorbe článkov [29–31].

školách až do júna 1953 (v Rychnove nad Kněžnou, v Pardubiciach, v Prahe 8 a v Litvínove). Posledných 6 rokov tohto obdobia bol riaditeľom gymnázia v Litvínove.

Oženil sa v roku 1930. Jeho manželka Milada bola jeho spolužiačkou a vyštudovala tiež matematiku a fyziku na Karlovej univerzite. Aj ona učila na rôznych gymnáziách a neskôr na jedenásťročných stredných školách.

1. septembra 1953 začal pracovať na novozaloženej Vysokej škole železničnej (VŠŽ) v Prahe, kde bol hneď menovaný docentom a vedúcim Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie. Ešte predtým sa zúčastňoval prípravných prác na jej založenie. V roku 1959 bol menovaný profesorom pre odbor matematika a o rok neskôr sa presťahoval so školou premenovanou na Vysokú školu dopravnú (VŠD) do Žiliny. V roku 1962 získal vedecký titul DrSc. na základe práce *O jisté třídě ortogonálních polynomů* (pozri [10]).

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie na VŠD v Žiline, ktorú tam viedol od roku 1960, musela byť budovaná od základov, pretože viacerí učitelia tejto katedry pôsobiaci ešte na VŠŽ v Prahe, odmietli nasledovať školu do jej nového pôsobiska na Slovensku. Bola to úloha veľmi náročná, lebo spočiatku bolo nutné prijať na katedru väčší počet učiteľov, ktorí nemali učiteľskú prax na vysokých školách. O ich získanie sa profesor Korous veľmi zaslúžil. A nielen to, vytváral pre nich také podmienky, aby ich pedagogická a vedeckovýskumná činnosť boli na úrovni doby.

Významné bolo aj jeho pôsobenie v akademických funkciách VŠŽ v Prahe, resp. VŠD v Žiline. V školskom roku 1954–1955 bol prodekanom na vtedajšej Elektrotechnickej fakulte VŠŽ. V tejto funkcii sa zaslúžil o jej personálne a materiálne budovanie. Profesor Korous bol prvým profesorom VŠŽ, ktorý sa presťahoval do Žiliny. V prvom školskom roku existencie celej školy v Žiline (1962–1963) bol prodekanom na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy VŠD. Vtedy musel vynaložiť veľké úsilie na prekonanie ťažkostí spojených s premiestnením školy do Žiliny. V tom istom školskom roku sa Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie VŠD rozdelila na dve časti. Profesor Korous sa stal vedúcim tej katedry, ktorá bola na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy, iná časť učiteľov katedry odišla na Fakultu strojnícku a elektrotechnickú. Vedúcim tejto katedry bol až do júna 1966. V rokoch 1953–1966 podstatne prispel k úspešnému rozvoju katedry i celej VŠŽ resp. VŠD, za čo mu bola v roku 1964 udelená pamätná medaila *Za zásluhy pri budovaní VŠD v Žiline* od Mestského národného výboru v Žiline.

Od júla 1966 až do marca 1969 bol vedúcim Katedry matematickej analýzy na Fakulte prírodných vied Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach, kde sa presťahoval s celou svojou rodinou okrem dcéry (mal 2 deti – dcéru Jarmilu a syna Josefa). Po smrti svojej manželky v roku 1968 sa presťahoval do svojho rodiska – Prahy, kde sa stal vedúcim Katedry matematiky Strojníckej fakulty ČVUT. Tam pracoval iba 3 semestre a v októbri 1970 bol naspäť na svojom pôvodnom mieste v Žiline, kde do konca júna 1975 opäť viedol Katedru matematiky a deskriptívnej geometrie na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov a až do svojho odchodu do dôchodku v septembri 1977 pôsobil ako profesor matematiky. Ani ako dôchodca však nezanevrel na svoje učiteľské poslanie, ale od októbra 1977 až do svojej smrti pôsobil ako profesor na Pedagogickej fakulte v Nitre, kde obetavo dochádzal zo Žiliny.

Popri tom neprestával v Žiline viesť Seminár z ortogonálnych polynómov, ktorý založil ešte na VŠŽ v Prahe a viedol ho aj v období rokov 1966–1969, keď v Žiline nepracoval. Naďalej viedol ašpirantov, z ktorých do úspešnej obhajoby kandidátskej dizertačnej práce v rokoch 1970–1981 doviedol celkom desať svojich mladších kolegov a jedenásta (autorka týchto riadkov) ju obhájila dva roky po jeho smrti. Zomrel v Žiline v auguste 1981, pochovaný je vo Visolajoch neďaleko Považskej Bystrice. Smrť ho zastihla nečakane, uprostred ďalších tvorivých plánov. Napísať monografiu o ortogonálnych polynómoch bol jeden z nich.

Doslova celý svoj život zasvätil škole a matematike. Počas viac než tridsaťročného pôsobenia na vysokých školách prešli jeho rukami tisícky neskorších inžinierov a desiatky neskorších učiteľov matematiky, ktorí na neho spomínajú ako na prísneho a svedomitého učiteľa, láskavého človeka. Bol vzorom pracovitosti, skromný a vždy ochotný pomôcť a poradiť.

2 Profesor Korous a ortogonálne polynómy

Ťažiskom vedeckej práce profesora Korousa je teória ortogonálnych polynómov a matematické oblasti jej príbuzné. Jeho články sa týkajú klasických a zovšeobecnených Hermiteových, Laguerreových a Jacobiho polynómov. Zaoberal sa rôznymi vlastnosťami ortogonálnych polynómov, a to najmä polohou ich nulových bodov, odhadmi pre veľkosti ich najmenších a najväčších nulových bodov, ich asymptotickými vlastnosťami pre $n \to \infty$ (kde n je stupeň polynómu), diferenciálnymi rovnicami, ktorých riešeniami sú systémy ortogonálnych polynómov, rozvojmi funkcií reálnej premennej do radov ortogonálnych polynómov a ich sčítateľnosťou.

Jeho práce o ortogonálnych polynómoch možno rozdeliť do dvoch skupín. Sú to práce zaoberajúce sa polynómami ortogonálnymi v neohraničenom intervale a práce o polynómoch ortogonálnych v ohraničenom intervale. Do prvej skupiny možno zaradiť práce [1], [2], [3], [4], [9], [10], [14] a [15], do druhej patria práce [5], [7], [8] a [12]. Okrem toho napísal 12 vysokoškolských učebných textov (pozri [17–23]), z ktorých niektoré majú charakter monografie, napr. skriptá [22], ktoré sú tiež o ortogonálnych polynómoch, a ktoré boli alfou a omegou pre všetkých ašpirantov profesora Korousa.

Už prvá dvojica jeho prác znamenala významný prínos do teórie ortogonálnych polynómov. V práci [1] odvodzuje najskôr odhady pre veľkosť najmenšieho a najväčšieho kladného nulového bodu Hermiteovho polynómu, ako aj pre veľkosť rozdielu dvoch za sebou nasledu-júcich jeho nulových bodov. Potom nasleduje odhad veľkosti funkčných hodnôt Hermiteových polynómov na danom intervale. Tieto výsledky používa ďalej na dôkaz ekvikonvergencie rozvoja funkcie $f(x)$ do radu Hermiteových polynómov v bode x a Fourierovho rozvoja funkcie, ktorá je v okolí bodu x totožná s $f(x)$ za predpokladu, že konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad .$$

V úvode tejto práce sám autor – vtedy asi 22-ročný – porovnáva dovtedy známe výsledky o konvergencii radov Hermiteových polynómov so svojimi výsledkami týmito slovami:

„*Výsledek tento* (t. j. výsledok Galbruna – poznámka autorky) *jakož i všechny starší jsou neuspokojivé, dokazujíce konvergenci řad Hermiteových polynomů pro poměrně úzkou třídu funkcí a řešíce otázku rozvoje pro interval nekonečný způsobem málo šťastným, takže např. ani o funkci vytvořující nebylo možno podle dosavadních kriterií rozhodnouti, zda ji lze rozvinouti v řadu Hermiteových polynomů čili nic. I rozhodl jsem se, maje za úkol v semináři* *p. prof. dra Petra pojednati o Hermiteových polynomech, řešiti zmíněné otázky, a to na podkladě jiném, než se dosud dálo. Jak z následujících statí vysvitne, dospěl jsem k výsledkům mnohem obecnějším ve všech směrech než byly dosud známy.*" (Pozri [1, s. 2]).

V práci [2] odvodil analogické výsledky pre Laguerreove polynómy a okrem iného zovšeobecnil Szegöovo kritérium pre konvergenciu radu Laguerreových polynómov a dokázal analógiu Fejérovej vety pre sčítanie týchto radov podľa aritmetických stredov.

Obe tieto pomerne obsiahle práce – [1] aj [2] – zrejme písal ešte v čase, keď bol študentom Karlovej univerzity. Týkajú sa klasických ortogonálnych polynómov. Výsledky v nich obsiahnuté ďalej zovšeobecnil v prácach [3], [4], [9], [10], [14] a [15], kde už možno hovoriť o zovšeobecnených ortogonálnych polynómoch.

V práci [3] skúma vlastnosti polynómov ortogonálnych na intervale $(0,\infty)$ s váhovou funkciou $x^{\alpha}(a+x)^{\beta}e^{-x}$, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $a>0$ a získané výsledky používa v práci [4], v ktorej ide o polynómy ortogonálne na tom istom intervale s váhovou funkciou $x^{\alpha}(a+x)^{\beta}e^{-x}\,G(x)$, kde funkcia $G(x)$ je viazaná len týmito podmienkami: $G(x)>k>0$ pre $x \geq 0$, k je konštanta, $G(x)=o(x^{\frac{1}{2}})$ pre $x \to \infty$ a

$$\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}G(x)dx < \infty .$$

V tejto práci okrem iného odvodil diferenciálnu rovnicu pre uvedené polynómy, vyšetril ich vlastnosti a odvodil podmienky, za ktorých možno danú funkciu rozvinúť do radu takýchto polynómov. V oboch týchto prácach – [3] aj [4] – ide o zovšeobecnenie klasických Laguerreových polynómov vzhľadom na váhovú funkciu.

V prácach [9] a [10] sa zaoberal zovšeobecneniami klasických Hermiteových polynómov. V práci [9] vyšetroval polynómy ortogonálne na intervale $(-\infty,\infty)$ s váhovou funkciou $(a+x^2)^{\alpha}\exp(-x^2+\beta x)$, kde $a>0$, α, β sú reálne čísla. Touto prácou sa problematika takýchto polynómov po prvý raz objavuje v matematickej literatúre. Okrem iných pozoruhodných výsledkov sa v nej dokazuje veta o sčítateľnosti radov týchto polynómov podľa Cesàra. Vo svojej doktorskej dizertačnej práci [10] sa zaoberá ešte náročnejšou problematikou. Skúma v nej polynómy ortonormálne na intervale $(-\infty,\infty)$ s váhou $\exp[P(x)]$, kde $P(x)$ je polynóm tvaru $-x^{2r}+Q(x)$, pričom $Q(x)$ je polynóm stupňa najviac $2r-2$, r je číslo prirodzené. Vyšetril rad vlastností týchto polynómov a odvodil podmienky pre ich použitie na vyjadrenie istých funkcií pomocou nich.

Práce [14] a [15] sú tiež venované zovšeobecneným Hermiteovým polynómom. Vyšli až po smrti profesora Korousa, avšak práve z týchto dvoch prác môžeme zistiť, že autor mal ešte ďalšie námety i plány na pokračovanie svojho bádania v teórii ortogonálnych polynómov. V oboch týchto článkoch sa odvodzujú diferenciálne rovnice pre príslušné zovšeobecnené Hermiteove polynómy. V [14] sú to polynómy ortogonálne na intervale $(-\infty,\infty)$ s váhovou funkciou $\exp(-x^6)$ a v [15] polynómy ortogonálne na tom istom intervale s váhou

$\exp[-x^2 + u(x)]$, kde $u(x)$ je reálna funkcia, ktorá má v intervale $(-\infty, \infty)$ spojitú tretiu deriváciu a splňuje podmienku $u(x) = o(x^2)$ pre $x \to \pm\infty$.

V prácach druhej skupiny sa zaoberá prevažne rozvojom funkcií do radov polynómov ortonormálnych na intervale $(-1, 1)$ a asymptotickými vzorcami pre tieto polynómy. Skúma aj ďalšie vlastnosti týchto polynómov, napr. vlastnosti súčtu mocnín ich nulových bodov a podobne. Ide prevažne o zovšeobecnenia klasických Jacobiho polynómov a ich špeciálnych prípadov, ako sú napr. Legendreove polynómy alebo ultrasférické polynómy.

V práci [5] dokázal vetu, ktorá sa v literatúre často cituje ako *Korousova veta*. Obsahuje významný výsledok o hornom ohraničení hodnôt polynómov ortogonálnych v intervale $(-1, 1)$ s váhovou funkciou $w(x) = \widetilde{w}(x)k(x)$, kde $\widetilde{w}(x)$ je váhová funkcia iného systému polynómov ortogonálnych v tom istom intervale a $k(x) \geq k > 0$, k je konštanta.

V prácach [8] a [12] odvodil okrem iného asymptotické vzorce pre polynómy ortonormálne v ohraničenom intervale za podstatne všeobecnejších predpokladov než za akých sa až do toho času vôbec študovali a odvodil podmienky ekvikonvergencie radov dvoch navzájom rôznych úplných systémov ortonormálnych polynómov.

Drobná poznámka [16] a práce [6], [11], [13] a [24] sú venované odlišnej problematike. Článok [16] zrejme vznikol z jeho niekdajšieho záujmu o poistnú matematiku, s ktorou sa zoznámil ešte počas svojho vysokoškolského štúdia. V [24] sa venoval vedeckej práci svojho obľúbeného učiteľa Karla Petra.

V práci [6] skúmal rozvoje funkcií s konečnou variáciou v intervale $\langle \alpha, \alpha + \pi \rangle$ do radov tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x),$$

kde koeficienty a_n, b_n sú dané vzťahmi

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = k_n \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \cos \lambda_n t \\ \sin \lambda_n t \end{Bmatrix} dt,$$

k_n závisí na voľbe λ_n a $\limsup_{n \to \infty} |\lambda_n - n| < a$, pričom a je daná reálna konštanta. Čísla λ_n sú teda viazané – zhruba povedané – podmienkou, že výraz $|\lambda_n - n - a|$ má byť v istom zmysle „malý“. Sú tu štyri stupne tejto „malosti“, ktorým zodpovedajú štyri rôzne výsledky. Za ďalších obmedzujúcich predpokladov pre λ_n dokázal ekvikonvergenciu týchto rozvojov s príslušným Fourierovým radom pre funkcie lebesgueovsky integrovateľné.

V práci [11] sa zaoberal riešeniami $\varphi(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice

$$y'' + [q(x) - \lambda] y = 0,$$

kde $q(x)$ je funkcia spojitá v intervale $\langle 0, \pi \rangle$, ktoré splňujú okrajové podmienky

$$\varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \ \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha,$$
$$\varphi(\pi, \lambda) = \sin \beta, \ \varphi'(\pi, \lambda) = -\cos \beta,$$

pričom α, β sú reálne čísla. Odvodil v nej aj kritériá konvergencie pre rozvoj funkcie s konečnou variáciou v intervale $\langle 0,\pi\rangle$ do radu tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi\left(x, \ell_n^2\right),$$

kde ℓ_n^2 sú čísla blízke k vlastným hodnotám uvedenej diferenciálnej rovnice.

Predmetom práce [13] je vyšetrovanie asymptotických hodnôt funkcie $\varphi(x,\lambda)$ pre $\lambda \to \infty$, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice

$$y'' + p(x,\lambda)y = 0,$$

kde $p(x,\lambda)$ je istá reálna funkcia definovaná na intervale $\langle 0,\infty)\times\langle 0,\infty)$. Vyjadrené sú tu aj vzťahy medzi nulovými bodmi riešení uvedenej diferenciálnej rovnice a nulovými bodmi Airyho funkcií a ich derivácií.

3 Ohlas na vedeckú prácu profesora Korousa

Niektoré najvýznamnejšie výsledky vedeckej práce profesora Korousa sú v literatúre pomenované po ňom, napr. spomínaná *Korousova veta* alebo už v tomto storočí citovaná *Korousova metóda*. Nechajme však o týchto výsledkoch hovoriť významných matematikov tohto a minulého storočia.

Jedným z nich bol akademik Vojtěch Jarník, ktorý vo svojom *Posudku o vedeckej činnosti RNDr. Josefa Korousa* v novembri 1953 napísal:

„Práce Dr. Korouse se týkají problémů analysy, důležitých jak pro vnitřní rozvoj matematiky, tak pro aplikace. Obsahují podstatně nové methody a ukazují též velkou kombinační schopnost autorovu při přemáhání nemalých technických obtíží při důkazech. Jsou to práce, které přinesly mnoho nového. Jako doklad stačí uvésti standardní knihu Gabora Szegö „Orthogonal polynomials“ (1939), kde je Korous často citován. Při sepisování této knihy měl Szegö vlastně jen práce [1], [2]. Práce [3], [4], [5] – jak sám píše – dostal po ukončení rukopisu. Přes to je dodatečně cituje (na str. 306) a uvádí, že Korousovy výsledky jsou obecnější než výsledky uvedené v knize a také dokázány docela jinou methodou. Také např. Natanson ve své znamenité knize „Konstruktivnaja teorija funkcij“, ač tato kniha se jen málo stýká s oborem Korousových prací, uvádí obšírně jednu jeho větu i s důkazem. Z původních prací Dr. Korouse je jasno, že jde o matematika nadaného tvůrčí schopností i velkou bystrostí v provádění nesnadných úvah i výpočtů. Pro jeho použití na škole technického směru je výhodou jeho zájem o matematickou analysu – obor, s nímž technické vědy nejčastěji přicházejí do styku. Přes to, že počet jeho prací není velký, jejich vynikajíci kvality jej plně kvalifikují pro jmenování profesorem matematiky na vysoké škole především technického směru.“ (Pozri [26, s. 3]).

V spomínanej monografii Gábora Szegö sú Korousove výsledky uvedené na ôsmich miestach [38, s. 140, 141, 169, 175, 220, 259, 351, 454], *Korousova veta* je v nej uvedená aj s podrobným dôkazom a v referenciách knihy môžeme nájsť celkom 5 raných prác profesora Korousa z rokov 1928–1938. Sú to už spomínané práce [1–5]. Práve tieto práce mu priniesli medzinárodnú slávu – sú najčastejšie citované. *Korousovu vetu* aj s dôkazom môžeme nájsť aj v dodatkoch knihy *Klasičeskije ortogonaľnyje mnogočleny* od P. K. Sujetina (pozri [37,

s. 307–309]), ktoré sa týkajú rôznych transformácií váhovej funkcie pre ortogonálne polynómy. Z ďalších autorov, ktorí pripisujú veľký význam Korousovým výsledkom spomeňme maďarského matematika G. Alexitsa, ktorý uvádza *Korousovu vetu* v [25, s. 52] a ruského matematika N. N. Lebedeva (pozri [27, s. 98]).

Škoda, že sa profesor Korous nikdy nedozvedel o ohlase na svoj výskum v prácach Paula Nevaia z Ohio State University. Vo svojej štúdii *Géza Freud, Orthogonal Polynomials and Christoffel Functions* v roku 1985 Paul Nevai napísal:

„Now let us return to equiconvergence of orthogonal Fourier series. In his seminar paper, A. Haar proved that orthogonal Legendre series and Chebyshev series of integrable functions are equiconvergent; i.e., the difference of the corresponding appropriate partial sums converges to 0. In fact, Haar's method is directly applicable to all classical orthogonal polynomial series, such as Jacobi, Hermite, and Laguerre series. The real fun starts when one leaves the road covered by remnants of classical orthogonal polynomials and starts to examine general orthogonal polynomial series. Here the glory belongs to Szegö, whose results were later recast and generalized by J. Korous, Geronimus and Freud." (Pozri [34, s. 71]).

Z toho je vidieť, že vedecká práca profesora Korousa je v matematickej komunite hodnotená vysoko, pretože jeho meno sa spomína v rade veľkých matematikov rozvíjajúcich teóriu ortogonálnych polynómov. Na začiatku 90-ych rokov minulého storočia prebehla medzi súčasnými organizátormi *Seminára z ortogonálnych polynómov* na Žilinskej univerzite a Paulom Nevaiom – pôvodom maďarským matematikom, krátka korešpondencia a výmena publikácií. Paul Nevai sa zaujímal hlavne o všetky Korousove publikácie. Vtedy sme sa dozvedeli, že 13-ročný Nevai bol raz v lete na návšteve v Žiline. Bolo to v roku, keď sa Vysoká škola železničná sťahovala z Prahy do Žiliny. Zapôsobilo na mladého Nevaia „fluidum" ortogonálnych polynómov, ktoré do Žiliny priniesol profesor Korous? Isteže, je to málo pravdepodobné, veď medzi maďarskými matematikmi je väčší počet „ortogonálnych polynomialistov", na ktorých Nevai nadväzuje alebo s nimi spolupracuje (Szegö, Freud, Alexits, Máté, Totik, ...). Na druhej strane, práve maďarskí matematici ukázali svetovej matematike význam Korousových výsledkov pre teóriu ortogonálnych polynómov.

Napokon, treba ešte spomenúť *Korousovu metódu*, ktorá sa objavuje v dôkaze jednej vety o rovnomernej ohraničenosti istého systému funkcií spojených s istou triedou ortogonálnych polynómov, publikovanej v tomto storočí (roku 2001) v knihe *Orthogonal Polynomials for Exponential Weights* od autorov Eli Levin a Doron Shaul Lubinsky (pozri [28, s. 415]). Korousove metódy a výsledky z prvej polovice minulého storočia teda žijú a sú prospešné aj v 21. storočí.

4 Záver

V roku 2006 sme si pripomenuli 100. výročie narodenia profesora Korousa a v auguste toho istého roku aj 25 rokov od jeho smrti. Čas beží, onedlho bude o 10 rokov viac. Pri takýchto príležitostiach býva zvykom vyzdvihnúť prínos bývalého kolegu pre nás, ktorí pokračujeme v ním začatom diele. Zhodujeme sa v tom, že počas viac než tridsaťročného pôsobenia profesora Korousa na vysokých školách v Čechách a na Slovensku nebol síce počet jeho publikácií príliš veľký, ale je treba vyzdvihnúť najmä ich význam. Skutočnosť, že vo svojom pracovnom živote prešiel obrovskými zmenami (dlhoročné pôsobenie na stredných školách, prípravné práce pri zakladaní novej vysokej školy v Prahe, písanie učebných textov pre zabezpečenie štúdia na tejto novej vysokej škole literatúrou, premiestnenie vysokej školy, na ktorej pôsobil z Prahy do Žiliny, pričom vykonával akademické funkcie, vedecká výchova mladších kolegov, atď.) zrejme ovplyvnila aj jeho publikačnú činnosť. Profesor Korous nerád rozprával o sebe, nerád sa chválil svojimi vedeckými výsledkami, čo možno tiež malo vplyv na to, že od vzniku VŠŽ v Prahe publikoval len v zborníkoch vysokých škôl, na ktorých práve pracoval. Napriek tomu pre českú a slovenskú matematiku urobil veľa – ako profesor vysokých škôl, ako školiteľ ašpirantov – matematikov, ale aj ako pomocný školiteľ ašpirantov – inžinierov, ako predseda vedeckých komisií a výborov a ako dlhoročný člen a funkcionár JČSMF a JSMF. Hoci výskum profesora Korousa bol hlavne teoretický, jeho výsledky sú zaujímavé pre teóriu aproximácie funkcií, matematickú fyziku, kvantovú mechaniku, elektrooptiku, teóriu signálov, štatistiku a podobne. To je odkaz profesora Korousa pre celú matematiku a jej aplikácie.

Literatúra

Vedecké práce J. Korousa

[1] *O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu Hermiteových polynomů*. Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze 11(1928), 1–34.

[2] *O řadách Laguerrových polynomů*. Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze 40(1928), 1–23.

[3] *Über Reihenentwicklungen nach verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen mit drei Parametern*. Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká XIV(1937), 1–26.

[4] *Über Entwicklungen der Funktion einer reellen Veränderlichen in Reihen einer gewissen Klasse orthogonaler Polynome im unendlichen Intervalle*. Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká XV(1938), 1–19.

[5] *O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů*. Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze 1(1938), 1–12.

[6] *On a generalization of Fourier series*. Časopis pro pěst. mat. a fys. 71(1946), 1–15.

[7] *O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů*. In: Strojnický sborník technicko-vědecké práce pracovníků Vysoké školy železniční v Praze 17, SNTL, Praha, 1957, 45–52.

[8] *O asymptotických vzorcích pro ortogonální polynomy v konečném intervalu*. In: Bidlo V. (ed.): Sborník Vysoké školy železniční, stavební fakulta, Dopravní nakladatelství, Praha, 1957, 61–109.

[9] *O jistém zobecnění Hermiteových polynomů*. In: Sborník Vysoké školy dopravní, fakulta provozu a ekonomiky, SPN, Praha, 1960, 49–117.

[10] *O jisté třídě ortogonálních polynomů*. Doktorská dizertačná práca, Žilina, 1961 (obhájená v roku 1962 v Prahe).

[11] *Teorie disperse charakteristických hodnot operátorů*. In: Hořejší J. (ed.): Sborník Vysokej školy dopravnej v Žiline, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy, Zväzok 4 – Práce prednesené na vedeckej konferencii Vysokej školy dopravnej v septembri 1963, SNTL, Bratislava, 1965, 11–21.

[12] *O konvergenci řad ortogonálních polynomů*. In: Moravčík J. (ed.): Zborník IV. vedeckej konferencie VŠD v Žiline, sekcia matematika-fyzika-kybernetika, SNTL, Praha, 1973, 25–35.

[13] *On the solutions of a second order differential equation*. In: László B. (ed.): Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 1, Matematika, SPN, Bratislava, 1980, 51–78.

[14] *On the polynomials orthogonal in the interval* $(-\infty,\infty)$ *with the weight* $\exp(-x^6)$. In: László B. (ed.): Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 2, Matematika, SPN, Bratislava, 1982, 81–100.

[15] *O diferenciálních rovnicích zobecněných Hermiteových polynomů*. (Spoluautor: O. Šedivý). In: László B. (ed.): Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 3, Matematika, Pedagogická fakulta, Nitra, 1984, 1–15.

Vysokoškolské učebné texty a iné publikácie, ktoré napísal J. Korous

[16] *Remarque à propos de l'article de M. Pólya concernant la déduction de la loi des erreurs de Gauss*. Aktuárske vědy 1(1930), 37–41.

[17] *Matematika, díl I – VI*. SNTL, Praha, 1954–1956.

[18] *Úvod do vyšší matematiky*. SNTL, Praha, 1957.

[19] *Počet diferenciální*. SNTL, Praha, 1957.

[20] *Úvod do nauky o funkcích komplexní proměnné*. SNTL, Praha, 1957.

[21] *Lebesgueův integrál a Fourierovy řady*. SNTL, Praha, 1958.

[22] *Vybrané stati z matematiky. Ortogonální funkce a ortogonální polynomy*. SNTL, Praha, 1958.

[23] *Základy vyšší matematiky*. SNTL, Praha, 1962.

[24] *The work of Karel Petr in mathematical analysis*. Čas. Pěst. Mat. 96(1971), 104–108.

Ďalšia literatúra

[25] Alexits G.: *Problemy schodimosti ortogonaľnych rjadov*. Izdateľstvo inostrannoj literatury, Moskva, 1963 (ruský preklad z originálu v angličtine z r. 1961).

[26] Jarník V.: *Posudek o vědecké činnosti RNDr. Josefa Korouse, v Praze v listopadu 1953*.

[27] Lebeděv N. N.: *Speciální funkce a jejich použití*. SNTL, Praha, 1956 (český preklad z ruského originálu z r. 1953).

[28] Levin E., Lubinsky D. S.: *Orthogonal Polynomials for Exponential Weights*. CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[29] Marčoková M.: *Professor Korous – his Place in the History of Mathematics and our University*. In: Zborník 11. vedeckej konferencie Žilinskej univerzity v Žiline – „Veda, vzdelávanie a spoločnosť", sekcia č. 7 – „Matematika v interdisciplinárnom kontexte", Žilinská univerzita v Žiline, 2003, 25–28.

[30] Marčoková M.: *Uplynulo 100 rokov od narodenia profesora Josefa Korousa*. Pokroky matematiky, fyziky a informatiky 51(2006), No. 4, 343–346.

[31] Marčoková M.: *Josef Korous and his place in history of mathematics*. In: Šedivý O., Vallo D., Vidermanová K. (ed.): Acta mathematica 15: zborník príspevkov z X. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre dňa 13. septembra 2012, FPV UKF v Nitre, 2012, 5–10.

[32] Moravčík J., Púchovský F.: *Za prof. RNDr. Josefom Korousom, DrSc. (1906–1981)*. Čas. Pěst. Mat. 107(1982), No. 3, 315–325.

[33] Moravčík J., Púchovský F.: *In Memoriam Professor Josef Korous*. Czechoslovak Mathematical Journal 32(1982), No. 3, 495–497.

[34] Nevai P.: *Géza Freud, Orthogonal Polynomials and Christoffel Functions. A Case Study*. Reprinted from Journal of Aproximation Theory, Vol. 48, No. 1, September 1986, 3–167.

[35] Púchovský F.: *70 rokov prof. RNDr. Josefa Korousa, DrSc*. Čas. Pěst. Mat. 101(1976), No. 3, 319–320.

[36] Sikora J.: *Kronika Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy (a spojov) VŠŽ (VŠD a VŠDS) v Žiline, 1953–1987* (rukopis uložený na Katedre matematiky Fakulty humanitných vied Žilinskej univerzity v Žiline).

[37] Sujetin P. K.: *Klasičeskije ortogonaľnyje mnogočleny*. Nauka, Moskva, 1979.

[38] Szegö G.: *Ortogonaľnyje mnogočleny*. Nauka, Moskva, 1962 (ruský preklad z originálu v angličtine z r. 1959).

[39] Šindelář K.: *60 let prof. dr. Josefa Korousa*. Čas. Pěst. Mat. 91(1966), 113–117.

Grantová podpora

Podporené projektom č. 057ŽU-4/2012 grantovej agentúry KEGA Slovenskej republiky.

Adresa

Doc. RNDr. Mariana Marčoková, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta humanitných vied, Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
010 26 Žilina
Slovenská republika
e-mail: *mariana.marcokova@fpv.uniza.sk*

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

AL-KASHI, NASLEDOVNÍK PYTAGORA

ANNA BÁLINTOVÁ, ROD. TROJÁČKOVÁ

Abstract: The Persian mathematician and astronomer, named al-Kashi, is one of the best Arab scientist of the last period of *Golden age of Arab science*. His most well known the result is the generalisation of the Pythagorean Theorem, called in France the a*l-Kashi Theorem* and the *Cosines Law* in the rest of the world.

1 Úvod

1.1 Súčasný stav

Perzský matematik a astronóm, plným menom Ghayath al-Din Massud al-Kashani (r. 1380?, Kashan, Irán – r. 1429?, Samarkand, Uzbekistan), nazývaný krátko al-Kashi, patrí medzi významné vedecké osobnosti obdobia, ktoré uzatvára tzv. *Zlatý vek arabskej vedy.* Toto obdobie je historikmi určené v časovom intervale približne od polovice VIII. storočia až do polovice XV. storočia. Je mu venovaná putovná výstava, ktorej vedeckým komisárom je profesor histórie Ahmed Djabbar, bývalý minister školstva a poradca prezidenta Alžírska. Bližšie sme sa so spomínanou výstavou zoznámili v príspevku *Al-Biruni, súputník Avicenu* (pozri [2]).

Najznámejším matematickým výsledkom spomínaného vedca je bezpochyby *Zovšeobecnenie Pytagorovej vety,* používané bežne pod názvom *Kosínusová veta.* Čo sa týka označenia, veľmi zaujímavá situácia nastala v roku 1990, keď vo francúzskych učebniciach bolo dlhodobo zaužívané označenie *Kosínusová veta* celoplošne nahradené označením *Veta al-Kashi.* Tento zásah do odbornej terminológie vyvolal okamžite búrlivú reakciu nielen odborníkov, ale aj širokej verejnosti – požadovali vysvetlenie tejto zmeny. Oficiálne zdôvodnenie tejto zmeny nie je k dispozícii, môžeme však zapojiť svoje logické myslenie a predstavivosť, aby sme sa k nemu priblížili. V ostatných krajinách zostalo naďalej zaužívané označenie *Kosínusová veta.*

1.2 Východiskové poznatky

Životná púť al-Kashiho začala na území vtedajšej Perzie v prostredí, ktoré bolo v danej dobe priaznivo naklonené vedeckému bádaniu, samozrejme včetne matematiky a astronómie. Bohatí mecenáši krajiny, zanietení pre rozvoj vedy, zakladali vedecké inštitúcie nazývané *Medersy*. Ich súčasťou bývalo spravidla aj observatórium, slúžiace k pozorovaniu hviezdnej oblohy. A tak sa matematika a astronómia rozvíjali súčasne, vzájomne sa doplňujúc.

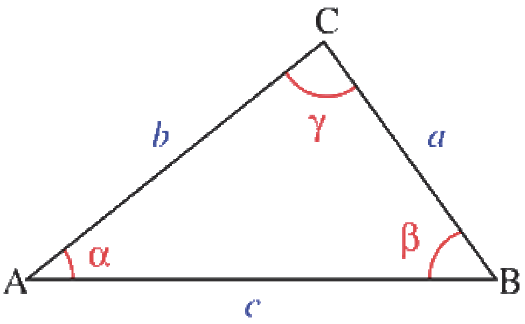
Napriek tomu, že v začiatkoch svojej kariéry al-Kashi nevynikal zvláštnym nadaním pre matematiku tak ako tomu bolo napríklad v prípade arabského vedca al-Biruniho, pod trpezlivým vedením svojich učiteľov a vedúcich osobností *Medersy* sa nakoniec naplno prejavili jeho mimoriadne schopnosti a zaradil sa medzi najvýznamnejšie osobnosti *Zlatého veku arabskej vedy*. Naviac, máme pred sebou ukážkový príklad toho, aké dôležité je pôsobenie na študentov zo strany ich pedagógov.

2 Dielo

2.1 Matematika

Ako už bolo spomínané v úvode, najznámejším matematickým výsledkom al-Kashiho je zovšeobecnenie Pytagorovej vety. Je potrebné poznamenať, že s jej zovšeobecnením sa stretneme už v Euklidových *Základoch* [4], knihy II, veta 12. a 13., a to samostatne pre trojuholník ostrouhlý a tupouhlý. Tomuto rozsiahlemu dielu venovali arabskí vedci mimoriadnu pozornosť, v priebehu VII. až IX. storočia ho preložili minimálne trikrát, uvedomujúc si jeho kolosálny význam nielen pre geometriu, ale i matematiku vôbec. Toto zovšeobecnenie je však formulované pomerne zdĺhavým spôsobom nakoľko bolo vyjadrené pomocou plošných obsahov štvorca a obdĺžnika. Ďalšie zjednodušenie formulácie si muselo počkať až na trigonometriu používanú v stredoveku. Na začiatku X. storočia arabský matematik a astronóm al-Batani aplikoval Euklidov výsledok do sférickej geometrie, čo mu umožnilo počítať uhlové vzdialenosti medzi hviezdami. Približne v tom istom období sa objavili prvé tabuľky s hodnotami trigonometrických funkcií sínus a kosínus. Práve znalosť trigonometrie umožnila al-Kashimu vyjadriť zovšeobecnenie Pytagorovej vety v jednoduchom tvare – zostalo používané bezo zmeny až do XV. storočia.V XIX. storočí nadobudlo svoju súčasnú podobu ako aj označenie *Kosínusová veta* (obr. 1). Čo sa týka dôkazu, existuje tak ako v prípade Pytagorovej vety viacero spôsobov jej dokazovania, dostupných napríklad v [6] a [8].

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$



Obr. 1: Kosínusová veta (al-Kashi) pri klasickom označení ľubovoľného trojuholníka.

Veta al-Kashi je potvrdením toho, že práve trigonometria, ako špeciálna časť geometrie, predstavuje jeden z troch základných kameňov prínosu arabských matematikov pre jej celkový rozvoj.

Poznámka 1: O popularizáciu zovšeobecnenia Pytagorovej vety v Európe sa zaslúžil francúzsky matematik François Viète (1540–1603) a je dosť pravdepodobné, že jej tvrdenie objavil celkom nezávisle od perzského matematika.

Ďalším pozoruhodným matematickým výsledkom al-Kashiho je určenie hodnoty čísla π z roku 1424 a to s presnosťou na 16 desatinných miest (!) – neprekonané v priebehu ďalších dvoch storočí. Jeho hodnota ja nasledovná:

$$\pi = 3{,}14159265358979325.$$

Pre porovnanie uveďme hodnotu dovtedy známeho ohraničenia čísla π z r. 450, ktoré je určené nasledovnými nerovnosťami:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Al-Kashi publikoval určenie hodnoty čísla π v práci *Miftah al-Hissab* [Klúč k aritmetike] a taktiež v *Risalat al-muhitiyya* [Pojednanie o kružnici]. Použil rovnakú metódu ako svojho času Archimedes, založenú na použití vpísaného a opísaného pravidelného mnohouholníka vzhľadom k danej kružnici. Podstatný rozdiel bol v počte strán použitých pravidelných mnohouholníkov, boli nasledovné:

$3 \cdot 2^5 = 96$ = počet strán mnohouholníkov, ktoré použil Archimedes,
$3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,368$ = počet strán pravidelných mnohouholníkov, ktoré použil al-Kashi.

S rovnakou presnosťou ako určil hodnotu čísla π, určil al-Kashi aj hodnotu čísla sin 1°. Použil k tomu zaujímavý algoritmus, ktorý podrobne študovali vo svojich dielach Woepcke (pozri [5]) a Aaboe (pozri [1]). Hodnota čísla π bola určená ako riešenie kubickej rovnice nasledovného tvaru:

$$x = (x^3 + \mathrm{N}) / \mathrm{D}, \text{ pričom } \mathrm{N} = 15.60 \sin 3^{\circ} \text{ a } \mathrm{D} = 45.60.$$

Je cenné, že v pojednaní *Moqalet* al-Kashi vyjadril množstvo otvorených (neriešených) problémov (pozri [7]), ako napríklad:

1) Určiť tri čísla tvaru a^3, b^3, c^3 tak, aby platila rovnosť $a^3 + b^3 = c^3$,
2) Určiť pravouhlý trojuholník so stranami a, b, c tak, aby platila rovnosť $a^4 + b^4 = c^4$.

Prvý z nich musel počkať so svojím riešením až na európskych matematikov P. Fermata a L. Eulera. Čo sa týka druhého problému, dnes vieme zásluhou matematika Wilesa (r. 1955), že daný problém nemá riešenie.

Najvýznamnejšie vedecké práce, ktoré publikoval al-Kashi, sú podľa súčasnej autorky El Ghari (pozri [3]) nasledovné:

– *Rissalat fil Hissab* [Pojednanie o aritmetike],
– *Rissalat fil Handasa* [Pojednanie o geometrii],
– *Rissalat al-Djib wal Watar* [Pojednanie o stranách v trojuholníku],
– *Rissalat an Ihliliji al-Qamar wa Utared* [Pojednanie o dráhach Mesiaca a Merkúra],
– *Miftah al-Hissab* [Klúč k aritmetike],
– *Sullamu al-Samaa* [Nebeské schody].

Vedecké práce al-Kashiho sa vyznačujú pozoruhodnou presnosťou výpočtov, čo bolo zároveň jedným z charakteristických znakov vtedajšieho vedeckého centra v Samarkande, s ktorým sa zoznámime bližšie v nasledujúcej časti venovanej astronómii.

2.2 Astronómia

Veľmi dôležitú úlohu zohral al-Kashi aj pri určovaní koncepcie observatória v Samarkande, ktoré bolo otvorené v roku 1429. Redigoval astronomické články a sám prispel zaujímavým výsledkom, a síce presným určením ekliptiky mesiaca. Práve v Samarkande prežil al-Kashi podstatnú časť svojho tvorčieho života.

Observatórium založil nemenej významný vedec tej doby, Ulugh Beg (1394–1449), vlastným menom Muhamed Taragy (od roku 1409 vládca Samarkandu). Jeho meno nieslo nielen observatórium ale aj *Medersa,* ktorú založil v roku 1420. V tom istom roku pozval do Samarkandu al-Kashiho a ponúkol mu spoluprácu v tomto vedeckom centre. Ako sa ukázalo neskôr, bola to mimoriadne šťastná voľba. V observatóriu zhromaždil Ulugh Beg (pozri [9]) okolo seba 60–70 vynikajúcich matematikov a astronómov. Práce pod jeho vedením vyvrcholili vydaním tzv. *Sultánskych tabuliek* v roku 1439. Tabuľky boli následne vylepšené v roku 1449 a potom ich presnosť nebola prekonaná dve nasledujúce storočia! K vysokej úrovni observatória a jeho všeobecnej popularite prispelo aj to, že v ňom v rokoch 1072–1074 pôsobil všestranný arabský učenec Omar Khayyan. Do dnešných dní je *Observatórium Ulugh Beg* (obr. 3), nesúce meno jej zakladateľa, pýchou Samarkandu a obľúbeným cieľom návštevníkov Uzbekistanu z celého sveta. Poctu Ulugh Beghovi vzdala i medzinárodná astronomická únia a to tým, že pomenovala v roku 1966 jeho menom jeden z kráterov na mesiaci. Prečo vlastne venujeme popri al-Kashim takú pozornosť tomuto učencovi? Okrem toho, ze boli obaja určite dominantnými osobnosťami vedeckého centra v Samarkande, al-Kashi a Ulugh Beg, vytvorili pozoruhodnú dvojicu vzájomného rešpektu, úcty a bezpochyby aj skutotocneho priateľstva – vzácny a obdivuhodný to priklad vedeckej spolupráce. Prežili vedľa seba podstatnú časť svojho plodného života. A opäť vedľa seba ich vidíme na obr. 2a a 2b.

Obr. 2a: al-Kashi.

Obr. 2b: Ulugh Beg.

Poznámka 2: Cenným historickým prínosom sú aj listy, ktoré písal al-Kashi v perzštine svojmu otcovi, ktorý bol taktiež uznávaný matematik a astronóm. Popisujú totiž detailne vedecký život tej doby v Samarkande. Spomína v nich aj svojich spolupracovníkov, ale obrazne povedané, milosť v jeho očiach našli len Ulugh Beg a Qadi Zada al-Roumi. Prvému z nich sa pripisuje výrok hodný zamyslenia:

Ríše sa rozpadnú, náboženstvá pominú ako hmla, len veda žije a je večná.

Obr. 3: Observatórium Ulugh Beg v Samarkande (foto z roku 2006).

Poznámka 3: Napriek vynikajúcim výsledkom jeho vedeckej práce, bolo dielo al-Kashiho dôkladne študované v Európe až v priebehu XIX. a XX. storočia. Podobná situáciu, týkajúca sa oneskoreného záujmu, nastala aj v prípade ďalšieho významného arabského matematika známeho pod menom al-Biruni (pozri [2]).

3 Záver

Štúdium života a diela al-Kashiho nám opäť poskytuje možnosť zamyslieť sa nad vedeckým prínosom arabských učencov, a to hlavne z obdobia, ktoré je známe ako *Zlatý vek arabskej vedy*. V tejto súvislosti sa stretávame aj s označením arabsko-moslimská veda. Toto označenie má svoje opodstatnenie v prípade, že ho chápeme ako zvýraznenie dvoch základných prvkov (arabský jazyk a islam) spájajúcich v danej dobe obrovské územie siahajúce od Pyrenejského polostrova až po Indiu. Pre nás sú však podstatné vedecké výsledky z tohto obdobia, ktoré obohatili a rozšírili hranice ľudského skúmania. A tak je tomu aj v prípade matematika zo Samarkandy, známeho pod menom al-Kashi, ktorému sme práve venovali svoju pozornosť.

Literatúra

[1] Aaboe A.: *Al-Kashi's Iteration Method for the Determinantion of Sin 1^o*. Scripta Mathematica 20(1954), 24–29.

[2] Bálintová A.: *Al-Biruni, súputník Avicenu*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, 183–186.

[3] El Ghabri H.: *Les promoteurs de l'esprit scientifique dans la civilisation Islamique*. ISESCO – Sciences, 2003.

[4] Eukleidés: *Základy. Knihy I–IV*. OPS, Nymburk, 2008.

[5] Woepcke F.: *Sur les traduction arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*. Journal asiatique18(1851), 217–247; anglický preklad in Claggett M.: *The Sciences of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, 1959, 24–30.

[6] Wikipedia (The free encyclopedia): *al-Kashi* [online]. Posledna revízia 14. marca 2013 [cit. 30. 4. 2013].

http://en.wikipedia.org/wiki/Al_Kashi

[7] Chronomath (The free encyclopedia): *al-Kashi* [online, cit. 30. 4. 2013].

http://en.sergemehlfree/chrono/Al_Kashi

[8] Wikipedia (The free encyclopedia): *al-Kashi* [online]. Posledna revízia 14. frebruára 2005 [cit. 30. 4. 2013].

http://enwikipedia.org/wiki/Théorème d'Al-Kashi

[9] Wikipedia (The free encyclopedia): *Ulugh Beg* [online]. Posledna revízia 13. marza 2013 [cit. 30. 4. 2013].

wikipediahttp://en.org/wiki/ulugh_beg

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Monastir
5019 Monastir
Tunisie
e-mail: *abalintova@seznam.cz*

J. S. VANĚČEK A L. CREMONA

(NOVĚ OBJEVENÁ KORESPONDENCE)

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: In this article we want to draw attention to the *Legato Itala Cremona Cozzolino of the Mazzini Institute of Genoa*, which is a large but little known archive containing the correspondence between Luigi Cremona (1830–1903) and many world famous mathematicians. We will describe the content and importance of the archive for the studies of historians as well as mathematicians. We will give Cremona's short biography to show his scientific achievement and his role in the development of the Italian scientific community in the second half of the 19th century. We will focus on the correspondence written by the mathematicians and physicists from the Czech lands (A. R. Harlacher, M. Kantor, S. Kantor, J. S. Vaněček, Em. Weyr). In more detail, we will analyze the letters of Josef Sylvestr Vaněček (1848–1922), a mostly forgotten Czech geometer. On the background of his life, studies, work, scientific as well as pedagogic activities,[1] we will discuss his information given in his letters.

1 Úvod

Dochování rozsáhlejší a ucelené odborné, institucionální a osobní korespondence světových matematiků, která by pomohla objasnit šíření a vliv nových matematických myšlenek, teorií a výsledků, umožnila hlouběji pochopit souvislosti vývoje matematiky, politického, vědeckého, kulturního a společenského života, je poměrně vzácné. Zajímavý soubor více než 6000 dokumentů, sestávající převážně z korespondence Luigi Cremony s evropskými vědci a politiky, univerzitami a polytechnikami, odbornými spolky a společnostmi, redaktory časopisů, nakladateli a překladateli apod.,[2] je uložen v knihovně *Istituto Mazziniano di Genova* (Mazziniho institut v Janově).[3]

Dopisy dokumentují, jak v průběhu dvaceti až třiceti let po sjednocení Itálie poměrně malá skupina italských matematiků vytvořila, téměř z ničeho, matematickou komunitu světového významu a úrovně. Ukazují, jak se v Itálii rozšiřovaly ideje neeukleidovské geometrie (zejména Riemannovy myšlenky), rozličné metody algebraické geometrie (např. práce M. Chaslesa, J. Steinera, K. G. Ch. von Staudta a A. F. Möbia), studie o algebraických, diferenciálních a diferenčních rovnicích, výsledky matematické

[1] Based on the extensive original archival research and studies, we will correct the old traditional information about Vaněček's life story.

[2] Cremonova bohatá pozůstalost obsahuje mimo jiné dopisy, které napsali matematici F. Amodeo, A. Armenante, C. Arzelà, G. Ascoli, G. Battaglini, G. Bellavitis, E. Beltrami, E. Bertini, E. Betti, F. Brioschi, E. Caporali, F. Casorati, E. Catalan, A. Cayley, V. Ceruti, E. Cesàro, U. Dini, M. D'Ocagne, Ch. L. Dodgson, F. D'Ovidio, A. Genocchi, G. B. Guccia, Ch. Hermite, T. A. Hirst, G. Jung, F. Klein, L. Kronecker, E. E. Kummer, S. Lie, J. Lüroth, G. Mittag-Leffler, V. M. A. Mannheim, M. Noether, E. Picard, H. Poincaré, T. Reye, R. Rubini, G. Salmon, L. Schläfli, W. Spottiswoode, R. Sturm, J. J. Sylvester, P. Tait, P. Tardy, P. Trudi, H. G. Zeuthen. Více viz [1] a http://www.luigi-cremona.it. Cremonovy dochované dopisy a místa jejich uložení jsou popsány v [1].

[3] Knihovna *Istituto Mazziniano di Genova* se specializuje na historii italského obrození (*Risorgimento*); Cremonova korespondence je její nedílnou součástí a důležitým zdrojem informací pro obecné historiky, historiky vědy i matematiky.

fyziky apod., a naopak jak Evropa reagovala na matematické výsledky italské geometrické školy (Cremonův vliv na A. Cayleyho, R. F. A. Clebsche, T. A. Hirsta, F. Kleina, S. Lie, M. Noethera aj.). Obsahují informace o tom, jak italští matematici navazovali kontakty s evropskými matematiky, jak budovali lokální odborné spolky a společnosti, knihovny a školy (např. *Accademia dei Lincei* a *Circolo Matematico di Palermo*, *Politecnico di Milano*, *Politechnico di Roma* a *Università di Roma*) a zakládali národní časopisy (např. *Annali di matematica pura ed applicata* a *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*), jak vedli diskuse o didaktických problémech, které souvisely se sestavováním nových studijních programů pro různé typy škol a s pokusy o modernizaci vyučování matematice (nový obsah a rozsah učiva, nové učebnice, zavádění aplikací apod.). Naznačují také jejich snahy o vytváření nové vědecké elity tvořené nejenom tradičními právníky, lékaři a humanitně vzdělanými odborníky, ale také inženýry a techniky.

Doplňme pro úplnost, že Itala Cremona Cozzolino, Cremonova dcera, darovala (pravděpodobně v roce 1939) otcovu pozůstalost janovskému institutu.[4] Tzv. fond *Legato Itala Cremona Cozzolino* je nyní pečlivě katalogizován, studován a analyzován předními italskými historiky a historiky matematiky.[5] V rámci náročného několikaletého projektu vzniká rozsáhlá webová stránka,[6] na níž jsou vystavovány práce o Cremonově životě a díle, seznam jeho bibliografie doplněný o odkazy na jeho již digitalizované práce, soupis jeho recenzí, základní informace o jednotlivých dopisech (jméno a příjmení pisatele, datum a místo sepsání/odeslání dopisu, archivní katalogizační číslo, katalogizační číslo digitalizované verze, rozsah dopisu, jména osob zmíněných v dopise, digitální kopie první stránky dopisu v malém rozlišení).[7] Webová stránka umožňuje díky bohatým a propracovaným odkazům nejrůznější vyhledávání a poskytuje mnoho podnětů a inspirací pro další výzkumnou práci.[8]

---

[4] Archiv Mazziniho institutu nedisponuje žádným oficiálním dokumentem vztahujícím se k tomuto daru.

[5] Více viz [1].

[6] Viz http://www.luigi-cremona.it.

[7] Kvalitní digitální verze dopisů lze získat se svolením Paoly Testi Saltini, která spravuje Cremonovu pozůstalost.

[8] Poznamenejme pro úplnost, že rozsáhlá Cremonova pozůstalost je uložena také v *Istituto Matematico „Guido Castelnuovo“ Università di Roma*. Popis pozůstalosti lze najít v článku G. Israel, L. Nurzia: *Correspondence and manuscripts recovered at the Istituto Matematico "G. Castelnuovo" of the University of Rome*, Historia Mathematica 10(1983), 93–97.

Velká část Cremonovy „římské“ korespondence již byla zpracována a uveřejněna. Viz A. Millán Gasca (ed.): *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830–1903)*, vol. I, Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, 1, con una premessa di G. Israel, Roma, 1992; M. Menghini (ed.): *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830–1903*), vol. II, Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, 3, con una premessa di G. Israel, Roma, 1994; M. Menghini (ed.): *Per l'Archivio della corrispondenza dei Matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830–1903)*, vol. III, Quaderni P.RI.ST.EM., Università Bocconi, con una premessa di G. Israel, Palermo, 1996; L. Nurzia (ed.): *Per l'Archivio della corrispondenza dei Matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830–1903)*, vol. IV, Quaderni P.RI.ST.EM., Università Bocconi, con una premessa di G. Israel, Palermo, 1999.

Část korespondence zůstala ještě nezpracovaná; je v ní obsaženo mimo jiné 27 dopisů Emila Weyra z let 1870 až 1891, 2 dopisy Eduarda Weyra z roku 1878 a 1879, 1 dopis Františka Houdka z roku 1874. První dopisy psal Emil Weyr jako Cremonův „stipendista“, jsou formální, velmi zdvořilé a neosobní. Pozdější dopisy psal jako Cremonův přítel, kolega a obdivovatel. Obsahují informace o Weyrových matematických studiích a článcích, aktivitách v *Jednotě českých mathematiků* a na české polytechnice, o Weyrově rodině a jeho italských přátelích. Dopisy dokládají celoživotní přátelství obou matematiků, ukazují, že Em. Weyr uzavřel během svých studijních pobytů v Itálii (školní rok 1870/1871, krátký pobyt roku 1873) přátelství s různými italskými vědci a umělci. Můžeme v nich také najít matematické problémy, s nimiž se na L. Cremonu obracel, poděkování za rady a podněty, za pomoc s gramatickými opravami článků apod. Poznamenejme, že Weyrův italský pobyt byl nesmírně důležitý a inspirativní pro jeho další vědeckou práci, neboť se při něm seznámil s nejnovějšími

2 Luigi Cremona – adresát

Luigi Cremona (nar. 7. prosince 1830 v Pavii, zem. 10. ledna 1903 v Římě) byl významným, světově známým a uznávaným italským matematikem, fyzikem a politikem. Když roku 1848 ukončil středoškolská studia na gymnáziu v Pavii, vypukla v Itálii revoluce, která usilovala o osvobození a sjednocení země, liberalizaci politického, společenského a kulturního života. L. Cremona, mladý a nadšený vlastenec, se jako dobrovolník účastnil bojů proti rakouské okupaci Lombardie a Benátska. Po potlačení protirakouského povstání, porážce piemontských vojsk a kapitulaci Benátek svlékl uniformu, vrátil se do Pavie a na univerzitě začal studovat pozemní stavitelství a architekturu. Roku 1853 pod vedením Francesca Brioschiho (1824–1897) obhájil doktorát „civilního inženýrství“. Pak téměř dva roky nemohl obdržet žádné místo, neboť rakouská policie ho evidovala jako „nedůvěryhodného revolucionáře“, který vůči říši pozvedl zbraň. Pracoval proto jako soukromý učitel a vychovatel v několika rodinách v Pavii. Ve volných chvílích se věnoval studiu matematiky a grafické statiky. Teprve roku 1855 dostal povolení, aby mohl po přechodnou dobu pracovat jako suplující učitel v Pavii. Během krátkého času se osvědčil jako vynikající pedagog a plodný autor odborných prací a pomocných učebních textů, proto mohl začít působit na místě řádného středoškolské profesora. Postupně vystřídal střední školy v Pavii (1855 až 1857), Cremoně (1857 až 1859) a Milánu (*Liceo S. Alessandro*, 1859 až 1860). Teprve když Rakušané v roce 1859 definitivně opustili Lombardii,[9] byl jmenován profesorem vyšší geometrie na univerzitě v Bologni. Roku 1867 byl na podnět F. Brioschiho povolán na techniku v Miláně (*Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano*), kde začal přednášet vyšší geometrii a grafickou statiku. Řádným profesorem těchto předmětů se stal až roku 1872. Boloňské a milánské období je považováno za nejplodnější část jeho života.[10]

V roce 1873 bylo L. Cremonovi nabídnuto místo generálního sekretáře nové italské vlády, což bylo chápáno jako pocta jeho odvaze a vlastenectví a současně i jako ocenění jeho odborné práce. Nabídku odmítl, neboť se nechtěl vzdát svého matematického bádání a pedagogického působení. Přijal však post ředitele a profesora grafické statiky na nově zřízené inženýrské škole v Římě (*Scuola degli ingegneri in Roma*). Brzy se ukázalo, že mu většinu času zabírají řídící, organizační a společenské povinnosti.[11] Politické tlaky ho nakonec přiměly, aby definitivně ukončil matematickou a pedagogickou aktivitu a vstoupil do služeb italského státu. Roku 1879 byl zvolen senátorem Spojeného italského království, a tak zahájil mnohaletou politickou kariéru.[12] V té době byl již uznávaným

výsledky projektivní i syntetické geometrie. Napsal několik odborných prací, které mu umožnily zapsat se do povědomí evropských geometrů. Více viz J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.

[9] Dne 11. 7. 1859 byla podpisem míru ve Villafranca ukončena válka za nezávislost Itálie. Italské království bylo oficiálně vyhlášeno dne 17. 3. 1861.

[10] V Bologni se věnoval zejména problematice rovinných algebraických křivek, prostorových křivek třetího řádu, kubik a biracionálních transformací. Jeho práce vyvrcholila studií *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 68(1868), 1–133, též Opere III, Hoepli, Milano, 1–121), za niž obdržel roku 1866 Steinerovu cenu (společně s R. Sturmem). V Miláně se zabýval především grafostatikou a aplikovanou matematikou. Více viz [1].

[11] Poznamenejme, že v letech 1855 až 1867 L. Cremona publikoval 75 odborných prací, v letech 1867 až 1873 uveřejnil 27 prací a v letech 1874 až 1903 už jen 45 prací, z nichž pouze 15 bylo vědeckých. Více viz [1].

[12] Luigi Cremona byl od mládí v kontaktu s předními italskými revolucionáři, politiky a právníky (např. Benedetto Cairoli (1825–1889), Enrico Cairoli (1840–1867), Luigi Cairoli (1838–1860), Camillo Cavour (1810–1861), Napoleone Ferrari (1802–1882), Nicolao Ferrari (1827–1855), Giuseppe Garibaldi (1807–1882), Guiseppe Mazzini (1805–1872), Antonio Di Rudini (1839–1908), Quintino Sella (1827–1884), Vittorio Emanuele II. (1820–1878)).

představitelem italské matematiky, který díky svému politickému vlivu prosadil hodinově bohatě dotovanou výuku projektivní a deskriptivní geometrie na všech italských technikách, výrazně ovlivnil vývoj vědeckého a kulturního života Itálie. V roce 1898 byl dokonce po dobu jednoho měsíce ministrem školství[13] a od téhož roku i místopředsedou senátu. Roku 1880 byl jmenován ředitelem největší italské knihovny – knihovny Vittorio Emanuele v Římě.

L. Cremona se věnoval projektivní geometrii (popis vlastností projektivně sdružených útvarů, projektivní prostory), algebraické geometrii (kuželosečky, rovinné a prostorové křivky třetího a čtvrtého stupně, racionální plochy, rozvinutelné plochy, zborcené kubiky, singularity křivek a ploch), geometrickým transformacím projektivní roviny (kvadratické transformace, biracionální transformace neboli Cremonovy transformace,[14] obecné geometrické transformace libovolného stupně apod.), syntetické geometrii (nové jednoduché a názorné důkazy starších tvrzení syntetické a elementární geometrie), „grafostatice" (grafické metody řešení problémů statiky a rovnováha sil), diferenciálnímu a integrálnímu počtu (eliptické funkce a integrály) a aplikacím algebraických metod v geometrii. Sepsal více než stovku časopiseckých prací a téměř desítku monografií, které byly přeloženy do světových jazyků.[15] Výrazně ovlivnil rozvoj italské matematiky, je považován za zakladatele prestižní italské školy algebraické geometrie. Mezi jeho přímé spolupracovníky, resp. pokračovatele patřili např. Eugenio Bertini (1846–1933), Guido Castelnuovo (1865–1952), Federigo Enriques (1871–1946), Giuseppe Giovanni Battista Guccia (1855–1914), Corrado Segre (1863–1924), Francesco Severi (1876–1961) a Giuseppe Veronese (1854–1917).

Doplňme pro úplnost, že L. Cremona byl prvním zahraničním čestným členem *Jednoty českých mathematiků* (1871). Roku 1879 byl jmenován členem *Královské společnosti v Londýně*, roku 1883 členem *Královské společnosti v Edinburghu*. Byl dlouholetým generálním tajemníkem *Královské lombardské akademie věd v Miláně*, členem italské společnosti „čtyřiceti" (*Società Italiana dei Quaranta*) a členem učených společností v Bologni, Neapoli, Göttingen, Lisabonu, Benátkách a Praze.[16]

---

[13] V květnu roku 1898 byla jmenována vláda ministerského předsedy A. Di Rudiniho, záhy však vypukly dělnické nepokoje a došlo k srážkám s policií, jejichž výsledkem bylo mnoho mrtvých a zraněných. V červnu byla vláda přinucena odstoupit.

[14] *Biracionální transformací v rovině* rozumíme transformaci definovanou rovnicemi $x' = \varphi(x, y)$, $y' = \psi(x, y)$, kde x, y, x' a y' jsou homogenní souřadnice, φ a ψ jsou racionální funkce proměnných x a y, které lze vyjádřit jako racionální funkce v proměnných x' a y'. *Cremonovou transformací* rozumíme každou biracionální transformaci projektivního prostoru dimenze n nad daným tělesem. Nejjednodušším příkladem Cremonovy transformace je kruhová inverze v rovině.

[15] Například *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1862), *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Bologna, 1863, 1865; pojednání o tzv. Cremonových transformacích), *Preliminari di una teoria geometrica della superficie* (Milano, Bologna, 1867), *Elementi di geometria projettiva* (Torino, 1873), *Elementi di calcolo grafico* (Torino, 1874), *Collectanea mathematica nunc primum edita* (spoluautor E. Beltrami, Milano, 1881), *Elements of Projective Geometry* (Clarendon Press, Oxford, 1885), *Graphical Statics. Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics* (Clarendon Press, Oxford, 1890).

[16] O Cremonově životě a díle viz např. G. Castelnuovo: *Luigi Cremona nel centenario della nascita*, Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei 12 (6) 1930, 613–618; G. Loria: *Luigi Cremona et son oeuvre mathématique*, Bibliotheca Mathematica 5 (3) 1904, 125–195; L. Berzolari: *Della vita e delle opere di Luigi Cremona*, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere 39 (2) 1906, 95–155; U. Bottazzini, L. Rossi: *Cremona Luigi*, Dizionario Biografico degli Italiani, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 30, 1960, 606–611; G. Veronese: *Commemorazione del socio Luigi Cremona*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 12 (5) 1903, 664–678.

3 Luigi Cremona a česká matematika

V české matematické komunitě, která se zajímala o geometrickou problematiku,[17] nebylo Cremonovo jméno neznámé. L. Cremona v šedesátých letech 19. století v souvislosti se snahou definovat transformace algebraických křivek projektivní roviny tak, aby se zmenšila míra jejich singularity, učinil rozhodující objev, neboť definoval a popsal základy teorie biracionálních transformací, které dnes nesou jeho jméno. Jeho autorita i světová proslulost přispěly k tomu, že se biracionální transformace proměnily z pomocného studijního nástroje v samostatný objekt matematického zkoumání a pozitivně ovlivnily rozvoj algebraické geometrie.

Cremonovy matematické práce výrazně ovlivnily celoživotní odborné zaměření Emila Weyra (1848–1894) i dalších našich matematiků.[18] Em. Weyr byl prvním českým matematikem, který rozeznal a pochopil význam Cremonových geometrických prací a jeho biracionálních transformací pro další rozvoj projektivní geometrie. V letech 1872 a 1873 přeložil dvě Cremonovy knížky; vyšly pod názvem *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*[19] a *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*.[20] Své překlady s L. Cremonou konzultoval jednak při svých pobytech v Itálii, jednak v korespondenci.[21] Cremonův vliv u nás doznníval ještě na počátku 20. století v pracích Bohumila Bydžovského (1880–1969).

4 Autoři dopisů z Čech

V Cremonově pozůstalosti dochované v knihovně *Istituto Mazziniano di Genova* jsou uloženy dopisy pouze pěti autorů spjatých s našimi zeměmi. V níže uvedené tabulce je jejich základní charakteristika.[22] V následujících odstavcích pak podrobněji přiblížíme jen Vaněčkovu korespondenci.

[17] V centru pozornosti českých geometrů byla deskriptivní a projektivní geometrie. Jejich zájem se soustřeďoval především na studium vlastností speciálních algebraických křivek a ploch, projektivních příbuzností a později na základy kinematické geometrie. Tato tématika v 70. a 80. letech 19. století již neodpovídala hlavním trendům rozvíjeným v zahraničí. Téměř stranou zájmu našich matematiků zůstaly základy geometrie (M. Pasch, D. Hilbert), neeukleidovské geometrie (J. Bolyai, N. I. Lobačevskij, B. Riemann), vícerozměrné geometrie (H. Grassmann, B. Riemann) a klasifikace geometrií s využitím teorie grup transformací a teorie invariantů (F. Klein). O tzv. *české geometrické škole* viz J. Folta: *Česká geometrická škola – Historická analýza*, Studie Československé akademie věd, Academia, Praha, 1982. Viz též M. Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008; L. Nový a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1961.

[18] Podobnou problematikou se zabývali S. Kantor, K. Küpper, M. Lerch, F. Machovec, K. Pelz, J. S. Vaněček, M. N. Vaněček, Ed. Weyr, K. Zahradník aj.

[19] Živa. Sborník vědecký Musea království Českého. Odbor přírodovědecký a mathematický č. X. V Praze, 1872, 47 stran. V originále Luigi Cremona: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, Tomo II, 1863, Tomo V, 1865.

[20] České, spisovatelem rozmnožené a opravené vydání, jež uspořádal Emil Weyr. V Praze, 1873. Majetkem a nákladem Jednoty českých mathematiků, 176 stran. V originále: Luigi Cremona: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Bologna, 1862.

[21] O Weyrově životě a díle, jeho studijním pobytu v Itálii a spolupráci s L. Cremonou viz J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.

[22] Korespondence A. R. Harlachera (1842–1890) se týká výměny publikací, jeho odborných hydrometeorologických měření v povodí Labe a činnosti v hydrologické sekci *Hydrografické komise Království českého*, která byla založena roku 1875 a uveřejňovala pravidelné roční zprávy o hydrografickém výzkumu.

Jediný dochovaný dopis Emila Weyra obsahuje základní charakteristiku zaměření časopisu *Monatshefte der Mathematik und Physik*, který ve Vídni roku 1891 založil Em. Weyr a Gustav von Escherich (1849–1935).

Odesílatel	Období	Jazyk	Počet	Charakter
Andreas Rudolf Harlacher	1881–1883	francouzský	4	odborná (nematematická) a organizační
Moritz Kantor	1879	německý	2	osobní
Seligman Kantor	1878–1892	německý francouzský italský	25	odborná (matematická) a osobní
Josef Sylvestr Vaněček	1882–1885	italský francouzský	7	odborná (matematická) a osobní
Emil Weyr	1892	německý	1	organizační

5 Josef Sylvestr Vaněček – autor dopisů[23]

Josef Sylvestr Vaněček (nar. 7. 3. 1848 v Táboře, zem. 13. 8. 1922 v Praze)[24] studoval od roku 1861 do roku 1867 na reálce v Táboře, od roku 1867 do roku 1870 na reálce v Praze. V té době byla sice reálka jen šestitřídní, ale J. S. Vaněček studia pro nedostatek finančních prostředků opakovaně přerušoval, pomáhal svému otci Matějovi vykonávat zednické řemeslo, a dokonce se sám vyučil zedníkem. Po absolvování reálky studoval na technice v Praze.[25] Roku 1873 přijal nabídku chorvatské vlády a odešel do

Je doplněn prosbou, zda by Luigi Cremona (nebo jiný italský matematik) pro výše uvedený časopis nesepsal nějaký článek a zda by nemohl zprostředkovat jeho výměnu za časopis *Annali di matematica pura ed applicata*.

Rozsáhlá, čistě odborná korespondence Seligmana Kantora (1857–1902) a dva soukromé dopisy jeho otce Moritze Kantora budou analyzovány v budoucnu.

[23] Psaní křestního jména kolísalo; objevují se varianty Sylvestr, Sylvester, Silvestr a Silvester.

[24] Životním osudům a dílu Josefa Sylvestra Vaněčka dosud nebyla věnována větší pozornost. Existuje pouze jeden rozsáhlejší nekrolog: J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151. Dále byly uveřejněny dva nepříliš rozsáhlé články pojednávající o bratrech Vaněčkových (viz J. Folta: *Dva představitelé "České geometrické školy" (K 40. výročí úmrtí J. S. a M. N. Vaněčků)*, Zprávy Komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd ČSAV, č. 12, 1962, 13–21; J. Folta: *Čtyřicet let od smrti bratří Vaněčků*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 8(1963), 28–30).

[25] J. S. Vaněček zahájil vysokoškolská studia ve školním roce 1871/1872, když se zapsal jako řádný student *odboru stavitelství vodního a silničního* (viz A. A. Velflík: *Dějiny technického učení v Praze*, 2. díl, Praha, 1910, str. VII). V prvním ročníku poslouchal následující povinné přednášky: *Mathematika 1. běh* (6/1, 6/1; Gabriel Blažek), *Deskriptivní geometrie 1. běh* (4/8 a 4/8; František Tilšer), *Fysika* (7/0 a 7/0; Karel Václav Zenger) a *Mineralogie 1. běh* (6/1 a 6/1; Jan Krejčí). Ze všech zkoušek získal hodnocení „eminente"; tj. s vynikajícím prospěchem absolvoval všechny povinné přednášky a cvičení předepsané *pro odbor stavitelství vodního a silničního*. Navíc si zapsal mimořádnou přednášku *Geologie a paleontologie* (1/0 a 1/0; Antonín Frič, zkouška byla opět hodnocena známkou „eminente"). Ve druhém ročníku (školní rok 1872/1873) přestoupil na *odbor strojnictví*; zapsal si pouze dvě povinné přednášky (*Deskriptivní geometrická perspektiva* (2/4 a 2/4; F. Tilšer) a *Technická mechanika* (5/0 a 5/0; Čeněk Haussmann), které zakončil zkouškami s hodnocením „eminente"). Neabsolvoval však dvě povinné přednášky (*Mathematika 2. běh* (6/1 a 6/1; G. Blažek) a *Geodesie* (4/6 a 4/6; František Müller). Viz *Katalog posluchačů 1871/72, C. k. česká vysoká škola technická v Praze* a *Katalog posluchačů 1872/73, C. k. česká vysoká škola technická v Praze*, Archiv ČVUT v Praze. Viz též *Přehled osob a přednášek na Českém polytechnickém ústavu Království českého v Praze pro školní rok 1871–72*, Praha, 1871; *Přehled osob a přednášek na Českém polytechnickém ústavu Království českého v Praze pro školní rok 1872–73*, Praha, 1872.

J. S. Vaněček pocházel z velmi chudé rodiny (měl osm sourozenců) a neměl žádnou finanční podporu, proto nemohl vysokoškolská studia dokončit. Nesplnil všechny předměty požadované k ukončení 2. ročníku, studium 3. a 4. ročníku ani nezahájil. Během studií se živil jako domácí učitel nebo byl zaměstnán jako pomocný technik v různých pražských stavebních kancelářích. O jeho životě J. Sobotka napsal: *V. vyšel z doby, kdy chudému českému studentu bylo po většině vésti těžký boj o hmotnou záchranu. Boj ten pro V. jakožto jihočeského rodáka byl zvláště tuhý. Ano i v pozdějším věku bylo mu zápasiti s mnohými překážkami, které mu*

Osijeku, kde do roku 1875 působil jako suplující středoškolský učitel matematiky.[26] V roce 1875 získal místo středoškolského profesora na reálce v Jičíně, na níž vyučoval matematiku a deskriptivní geometrii až do svého penzionování v roce 1906.[27] Na odpočinek se odstěhoval do Prahy, kde od roku 1904 působil na české technice jeho mladší bratr Matěj Norbert.[28] Brzy však Prahu opustil a vrátil se do svého rodného domku v Táboře.

J. S. Vaněček se od konce sedmdesátých let 19. století věnoval moderní geometrii (Cremonovy transformace, reciproké Chaslesovy a Hirstovy transformace, vlastnosti kři-

---

kladl život na cestách k dosažení cílů, jež si vytýčil. Není tudíž divu, že nezůstaly tyto okolnosti bez vlivu na jeho povahu, a že jistá nezaobalená přímost nebyla s to získávati mu přízně aneb dokonce obliby v rozhodujících kruzích úředních. (J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151, citát ze str. 139.)

[26] Poznamenejme, že v Osijeku bylo vyšší gymnázium, které vydávalo výroční zprávy (viz *Izvěšće o kralj. velikoj gimnaziji u Osěku koncem školske godine 1872/3*, U Osěku, 1873; *Izvěšće o kralj. velikoj gimnaziji u Osěku koncem školske godine 1873/4*, U Osěku, 1874; *Izvěšće o kralj. velikoj gimnaziji u Osěku koncem školske godine 1874/5*, U Osěku, 1875; *Izvěšće o kralj. velikoj gimnaziji u Osěku koncem školske godine 1875/6*, U Osěku, 1876), v nichž není Vaněčkovo jméno uvedeno. Je pravděpodobné, že J. S. Vaněček vyučoval na nižší reálce, která výroční zprávy nepublikovala; informace o jeho pedagogickém působení v Chorvatsku se nepodařilo dohledat.

[27] J. S. Vaněček obdržel místo na městské nižší reálce, která byla roku 1884 „zestátněna" a po dlouhých diskusích a jednáních byla teprve roku 1896 rozšířena na úplnou (tj. sedmitřídní) školu. J. S. Vaněček na ní vyučoval od 18. srpna 1875 do 31. prosince 1906. V letech 1875/1876 až 1895/1896 učil na nižší reálce (zeměpis, matematika, měřictví, deskriptivní geometrie a krasopis); týdně míval 18 hodin. Viz V. Hátle: *Z pamětí jičínské reálky*, *Výroční zpráva c. kr. vyšší reálky v Jičíně za školní rok 1896–97*, Jičín, 1897, 3–16. Od školního roku 1896/1897 učil v nižších i vyšších třídách reálky; obvykle míval 18 hodin týdně (matematika, měřictví a rýsování, deskriptivní geometrie, krasopis). Pravidelně býval třídním učitelem, spravoval rozsáhlou sbírku modelů pro výuku geometrie a organizoval školní výlety a exkurze. Viz *Výroční zpráva c. kr. vyšší reálky v Jičíně za školní rok 1896–7*, Jičín, 1897, …; *Výroční zpráva c. kr. vyšší reálky v Jičíně za školní rok 1905–6*, Jičín, 1906.

Na konci září roku 1906 J. S. Vaněček onemocněl, vzal si dovolenou na zotavenou a již v listopadu téhož roku požádal o penzionování; jeho žádosti bylo vyhověno: *Josef Vaněček, c. k. profesor 7 třídy hodnostní, koncem měsíce prosince 1906* [ukončil činnost na škole], *byv touž dobou dán ke své žádosti na trvalý odpočinek vynesením c. k. min. k. a v. ze dne 10. prosince 1906 č. 44.562 (C. k. z. šk. r. 20/12 1906 čísl. 62.023.).* Viz Výroční zpráva c. kr. vyšší reálky v Jičíně za školní rok 1906–7, Jičín, 1907.

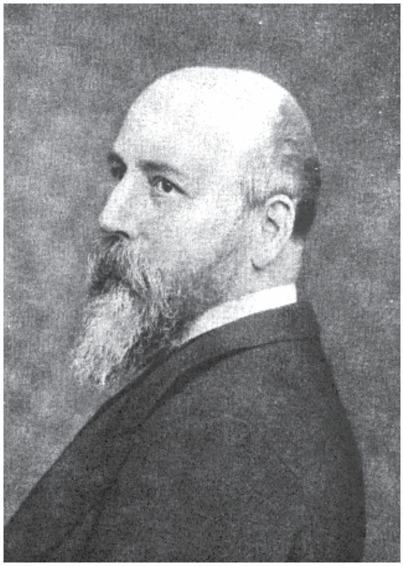
J. S. Vaněček po mnoho let také řídil pokračovací průmyslovou školu, resp. pokračovací školu průmyslovou a obchodní, která byla umístěna v budově reálky, a vyučoval krasopis v celoročních kurzech pro učitele měšťanských škol, které byly zřizovány při jičínské reálce.

[28] Matěj Norbert Vaněček (nar. 30. ledna 1859 v Táboře, zem. 15. září 1922 v Nemyšli u Tábora) studoval po dokončení táborské reálky na české technice v Praze, kde ho zaujala matematika a deskriptivní geometrie. Ve školním roce 1883/1884 působil jako suplent vyšší české reálky v Havlíčkově Brodě. Od roku 1884 až do roku 1889 byl asistentem G. Blažka, profesora matematiky na české technice v Praze. V době, kdy G. Blažek zasedal v říšském sněmu ve Vídni, vedl M. N. Vaněček výuku matematiky sám. Roku 1886 složil zkoušku učitelské způsobilosti, která ho opravňovala k výuce matematiky a deskriptivní geometrie na českých reálkách. Od roku 1889 až do roku 1893 učil na reálce v Hradci Králové, od roku 1893 do roku 1903 na reálce v Českých Budějovicích a od roku 1903 do roku 1904 na reálce v Táboře. V roce 1904, když byly na české technice zřízeny paralelní přednášky, byl pověřen suplováním matematických přednášek. V roce 1906 se na výše uvedené škole habilitoval pro obor vyšší matematiky a roku 1908 (po penzionování G. Blažka) byl jmenován řádným profesorem matematiky. Toto místo zastával až do smrti. Viz J. Folta: *Dva představitelé "České geometrické školy" (K 40. výročí úmrtí J. S. a M. N. Vaněčků)*, Zprávy Komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd ČSAV, č. 12, 1962, 13–21; J. Folta: *Čtyřicet let od smrti bratří Vaněčků*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 8(1963), 28–30; V. Hruška: *Posmrtná vzpomínka na Mat. Norb. Vaněčka*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 52(1923), 313–319; F. Balada, K. Koutský, J. Rádl: *Kalendář českých matematiků*, Matematika ve škole 3(1952/1953), předsádka.

Zmínky o bratrech Vaněčkových jsou i v encyklopediích (viz *Ottův slovník naučný*, díl 26, str. 391–392, J. C. Poggendorff: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, Bd. III, str. 1385, Bd. IV, str. 550, Bd. V, str. 1294 a Bd. VI, str. 2735).

vek a ploch vyšších řádů, klasifikace křivek vyšších řádů a stupňů, speciální křivky a jejich konstrukce, projektivní geometrie, kinematická geometrie, historie matematiky apod.).

Josef Sylvester Vaněček



Luigi Cremona

Ve školním roce 1878/1879 absolvoval studijní stipendijní pobyt v Paříži, kde se seznámil s Victorem Mayerem Amédéem Mannheimem (1831–1906), profesorem na École Polytechnique, Jeanem-Gastonem Darbouxem (1842–1917), profesorem na École Normale Supérieure, a Jeanem-Claudem Bouquetem (1819–1885), profesorem na Sorbonně. Zejména pod Mannheimovým vlivem se zabýval reciprokými transformacemi a základy kinematické geometrie.[29]

Poznatky z Paříže shrnul v knížce *Pošinování geometrických útvarův*,[30] která přitáhla pozornost našich geometrů ke kinematické geometrii[31] a přivedla je k hlubšímu

[29] Kinematická geometrie se zrodila z úvah G. Monge, J. N. P. Hachetta a L. N. M. Carnota. Roku 1859 vytvořil A. Terquem první ucelenější teorii o pohybech určených předem stanovenými geometrickými podmínkami a dal jí název *géométrie cinématique* (kinematická geometrie). Rozvoj strojírenské výroby si žádal hlubší znalosti o geometrických tvarech, převodových soustavách, konstrukci mechanismů ozubených kol apod., proto roku 1867 zavedl V. M. A. Mannheim do učebního plánu École Polytechnique povinné přednášky z „geometrie pohybu". Na konci 60. let a zejména na počátku 70. let 19. století se objevily první učebnice kinematické geometrie, které se opíraly o Chaslesovy a Mannheimovy články uveřejněné v Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris) a ve zprávách École Polytechnique.

[30] Nákladem vlastním, Jičín, 1880, 184 stran. J. S. Vaněček knihu věnoval Karlu knížeti z Trauttmansdorff-Weinsbergu, svému mecenáši. Přeložil a přepracoval Mannheimovy přednášky z kinematické geometrie, které se konaly na pařížské polytechnice ve školním roce 1878/1879. Jedná se o první monografii pojednávající pouze o kinematické geometrii, neboť ve francouzské verzi vyšly Mannheimovy přednášky roku 1880 pod názvem *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique, comprenant les éléments de la géométrie cinématique* (Gauthier-Villars, Paris, 1880, 480 stran + 256 obrázků), avšak kinematické geometrii v nich byla věnována jen jedna kapitola. Teprve roku 1888 byla vytištěna obsáhlá monografie L. E. H. Burmestera: *Lehrbuch der*

studiu různých druhů křivek, vyšetřování jejich vlastností a pokusům o zobecňování konstruktivních postupů.[32] Svůj pohled na kinematickou geometrii charakterizoval takto:

> *Spis tento vzešel ze zápisek, které autor, obcovav přednáškám z deskriptivní geometrie professora Mannheima na polytechnice Pařížské, si byl učinil. Mnohé doplňky pocházejí od autora.*
>
> *Prof. Mannheim vydal později přednášky své přeměněné a doplněné. Autor spisu ››Pošinování‹‹ neuznává ani onen ve formě Mannheimem uveřejněný za dílo toho druhu, aby nahradilo deskriptivní geometrii, nýbrž za její velmi cennou větev, prospěšnou zejména mechanikům.*[33]

V roce 1881 J. S. Vaněček publikoval rozsáhlou syntetickou studii o vlastnostech křivek nazvanou *Křivé čáry rovinné i prostorové*.[34] Práce sice nepřinášela ani původní

Kinematik für Studirende der Maschinentechnik, Mathematik und Physik geometrisch Dargestellt. Band 1. Die ebene Bewegung (2 díly, A. Felix, Leipzig, 1888, 941 stran + 57 tabulek obrázků), která se stala na více než dvě desetiletí základním pramenem ke studiu kinematické geometrie.

První česká monografie o základech kinematické geometrie sepsaná J. S. Vanečkem se skládá ze dvou částí – *Pošinování v rovině* a *Pošinování v prostoru*. První část je rozdělena na pět kapitol: *Úvod*, *Pošinování nekonečně malé (principy)*, *Pošinutí ukončené* (*O vlastnostech pošinování jakéhokoliv obrazce*, *Vlastnosti dvou geometricky stejných křivých čar*, *Ukončené pošinutí v rovině, které se skládá z otočení a přenesení*, *Vlastnosti dvou stejných symmetrických obrazců, v rovině jakkoliv rozložených*), *Pošinování podobných obrazců*, *Sestrojování středů křivosti křivých čar, vytvořených při pohybu rovinného obrazce v téže rovině*. Druhá část je rozdělena na čtyři dílčí části. První je tvořena pěti kapitolami (*Úvod*, *Geometrické vlastnosti nekonečně malého pošinutí obrazce formy neproměnné*, *Aby bylo pošinování obrazce formy neproměnné určito, jest zapotřebí pěti podmínek*, *Redukce rozličných podmínek, které přicházejí při definici pošinování obrazce v tomto samotném případě: bod jest nucen zůstati na dané ploše*, *Nový způsob normál*). Druhá část se skládá z pěti kapitol (*Pošinování přímé čáry; upotřebení při plochách přímočarých*, *O pošinování dvojstěnu*, *O pošinování některých zvláštních trojstěnů*, *O pošinování plochy a obrazce jakéhokoliv, který podléhá několika podmínkám*, *Plochy šroubové*). Třetí část nazvaná *Pošinutí ukončené* obsahuje čtyři kapitoly (*Pošinutí přímé čáry v prostoru*, *Pošinutí rovinného obrazce v prostoru*, *Pošinutí sférického obrazce na ploše kulové; pošinutí tělesa, jehož jeden bod jest stálým*, *O pošinutí obrazce formy neproměnné v prostoru*). Čtvrtá část nazvaná *Pošinování podobných obrazcův* má dvě kapitoly (*Základní úvahy*, *Pošinování obrazce v prostoru, když zůstává sám sobě podobným*).

[31] Zájem o kinematickou geometrii se u nás objevil již v 60. letech 19. století v německy psaných pracích K. Küppera a poté na začátku 70. let 19. století v několika článcích Ed. Weyra, který studoval vlastnosti úpatnic, evolut a dalších speciálních křivek. Oba ve svých pracích sice užívali kinematickou terminologii, neužívali však kinematické metody. První česky psané práce o kinematické geometrii se objevily na počátku 70. let 19. století a přispěly ke zrodu české terminologie (viz F. Hora: *Příspěvek k dějepisu trochoid*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1(1872), 54–60; F. J. Studnička: *Poznámka k theorii trochoid*, tamtéž, 252–253).

[32] Knížka více či méně ovlivnila některé práce českých geometrů, např. F. Machovce, B. Procházky, A. Suchardy a Ed. Weyra.

[33] J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 15.

[34] Nákladem vlastním, Jičín, 1881, 117 stran. V první části spisu J. S. Vaněček vyložil problematiku a konstrukci tečen, normál a polár křivek, výpočet poloměru křivosti a rektifikaci křivek. Druhou část věnoval algebraickým a transcendentním čarám. Popsal konstrukce, analytická vyjádření a základní vlastnosti obyčejných a konfokálních kuželoseček, křivek třetího řádu, křivek třetího stupně, křivek čtvrtého řádu a křivek vyšších řádů (např. semikubická parabola, kubická parabola, kubická hyperbola, kisoida, Descartův list, Pascalova závitnice, kardioida, konchoida, lemniskáta, cykloida, epicykloida, hypocykloida, sinusoida, kosinusoida, logaritmická lemniskáta, řetězovka, spirály). Ve třetí části vyložil základní vlastnosti prostorových algebraických i transcendentních křivek (např. sférické kuželosečky, sférické bikvadriky, geodetické linie, tečné čáry, asymptotické linie, linie stejného spádu, linie největšího spádu, konturové čáry, čáry světlosti, loxodroma, polodie, cyklocylindrika, kotálnice, šroubovice, spirály, evolventy, evoluty). Poznamenejme, že v úvodu uvedl francouzské, německé, italské i české zdroje, z nichž při sepisování vycházel (např. J. de la Gournerie, M. Chasles, V. M. A. Mannheim, T. Olivier, W. Fiedler, R. F. A. Clebsch, T. Reye, C. Rümpler, G. Salmon, W. Schell,

výsledky, ani zásadní nové myšlenky, ale byla ve své době užitečná, neboť přehledně shrnovala všechny základní typy známých křivek a vykládala jejich vlastnosti, většinou však bez uvedení důkazů. Obsahovala též popis základních druhů pohybů a Vaněčkův pokus o jejich klasifikaci doplněný řadou názorných příkladů a kapitolou o konstrukci středů křivosti kotálnic. Právě tato tématika, důležitá pro konstruktivní teorii křivek, měla ohlas a motivovala ke studiu křivek a ploch, kterému se v poslední třetině 19. století úspěšně věnovalo několik našich vysokoškolských i středoškolských učitelů.[35]

V roce 1882 vydal J. S. Vaněček půvabnou, populárně napsanou knížečku nazvanou *O dějinách geometrie*,[36] jejíž obsah charakterizoval těmito slovy:

> *Ve spisku tomto pokusil se autor podati stručné dějiny vývinu vědy geometrické až na naši dobu. Z dobře uvážených, avšak od jiných nedosti pochopených a oceněných příčin nebylo v něm psáno o geometrech českých posud žijících, což bylo autoru s mnoha stran ve zlé vykládáno.*[37]

Roku 1885 publikovali bratři Vaněčkové společnou studii nazvanou *Svazkové vytvořování křivek rovinných*, která je souborem pěti článků vydaných v letech 1884 až 1885 ve Zprávách ze zasedání Královské české společnosti nauk,[38] a její krátké pokračování nazvané *Nové vytvořování svazku kuželoseček*.[39]

Od počátku osmdesátých let až do poloviny devadesátých let publikoval J. S. Vaněček, sám nebo s bratrem, více než 20 odborných časopiseckých prací,[40] které ukazují,

---

R. Staudigl, L. Cremona, Em. Weyr a Ed. Weyr). Je pozoruhodné, jaký měl J. S. Vaněček přehled o naší i zahraniční soudobé literatuře.

[35] Kinematická geometrie zaujala F. Machovce, A. Suchardu, Ed. Weyra, K. Zahradníka; v první třetině 20. století i J. Sobotku a M. Pelíška. Na Vaněčkovy *Křivé čáry rovinné i prostorové* přímo navazovala Machovcova práce *Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody* (Jednota českých mathematiků, Praha, 1883, 139 stran + 84 obrázků v textu + 8 tabulek obrázků).

[36] F. & V. Hoblík, Pardubice, 1882, 40 stran.

[37] J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 15.

[38] J. S. Vaněček, M. N. Vaněček: *Svazkové vytvořování křivek rovinných*, Královská česká společnost nauk, Praha, 1885, 106 stran. Práce získala roku 1889 tzv. *Šetkovu cenu*, jež byla udělena za nejlepší česky psanou matematickou studii vydanou v letech 1883 až 1888. Lze ji považovat za vrchol jejich odborné práce. Bratři Vaněčkové v ní rozvinuli Steinerovy a Reyeovy syntetické úvahy a principy projektivního vytváření složitějších geometrických útvarů z útvarů jednoduchých a dobře známých. Pro ilustraci postupu bratrů Vaněčkových uveďme jejich dva typické způsoby vytváření nových křivek. Za prvé uvažují tři svazky $[R]$, $[F_1]$ a $[F_2]$ algebraických křivek n-té mocnosti (tj. n libovolnými body roviny prochází právě jediná křivka svazku) a dvě pevné algebraické křivky p_1 a p_2. Libovolná křivka R ze svazku $[R]$ protíná křivku p_1 v určitém počtu bodů, těmito body prochází právě jediná křivka F_1 ze svazku $[F_1]$. Tatáž křivka R ze svazku $[R]$ protíná křivku p_2 v určitém počtu bodů, jimiž prochází jediná křivka F_2 ze svazku $[F_2]$. Křivky F_1 a F_2 se protínají v bodech, které vytvářejí novou křivku, probíhá-li křivka R svazek $[R]$. Za druhé uvažují jeden svazek $[R]$ algebraických křivek n-té mocnosti a jednu algebraickou křivku K. V průsečících křivek R svazku $[R]$ a křivky K sestrojují tečny ke křivce R. Nová křivka vzniká jako obálka výše uvedených tečen, pokud vezmeme všechny křivky R ze svazku $[R]$. Bratři Vaněčkové použili tyto dva konstrukční způsoby ke studiu křivek čtvrtého řádu se třemi dvojnými body. Poznamenejme, že roku 1887 byl J. S. Vaněček spolu s F. Machovcem vyznamenán tzv. *Weyrovou cenou* určenou jako odměna za nejlepší geometrickou česky psanou práci. Viz J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151, str. 150.

[39] J. S. Vaněček, M. N. Vaněček: *Nové vytvořování svazku kuželoseček*, Královská česká společnost nauk, Praha, 1885, 16 stran.

[40] Práce sepisoval francouzsky (25 prací), česky (21), chorvatsky (5) a německy (2). Uveřejňoval je v následujících časopisech a zprávách: Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Sitzungsberichte der königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag (resp. Zprávy ze zasedání Královské české

že i jako středoškolský profesor v malém provinčním městě pečlivě sledoval zahraniční matematické časopisy a monografie, které se věnovaly moderní projektivní a kinematické geometrii. Ze všech jeho prací je patrné, že se nechtěl spokojit jen s místem „obyčejného středoškolského profesora“, ale usiloval o místo na vysoké škole v Praze, kde by mohl přednášet, odborně působit na své žáky a vědecky pracovat. Po celý život však byl v jisté izolaci od domácího českého matematického prostředí, v němž nenacházel prakticky žádnou podporu a inspiraci.

Roku 1884 se neúspěšně pokusil o habilitaci na české Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze.[41] Roku 1895 se přihlásil do konkurzu na místo řádného profesora deskriptivní geometrie na české technice v Praze, které se uvolnilo penzionováním Františka Tilšera (1825–1913). Ani v tomto konkurzu neuspěl; místo získal Karel Pelz (1845–1908), geometr uznávaný v celém Rakousku-Uhersku.[42] Po těchto neúspěších J. S. Va-

společnosti nauk, resp. Věstník Královské české společnosti nauk v Praze), Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění, Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien, Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bulletin de la Société Mathématique de France, Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (Roma), Annali di matematica pura ed applicata, Proceedings of the London Mathematical Society, Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du Bulletin de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.

[41] J. S. Vaněček se na podzim roku 1884 obrátil na profesorský sbor české filozofické fakulty pražské univerzity s žádostí o zahájení habilitačního řízení, ačkoli neměl maturitní zkoušku složenou na klasickém gymnáziu, nedokončil vysokoškolské studium techniky a neměl řádný vysokoškolský diplom, nestudoval na univerzitě a neměl doktorát, tudíž nesplňoval základní formální požadavky kladené na uchazeče o soukromou docenturu. Jeho žádostí se zabýval profesorský sbor na svém zasedání dne 30. října 1884:

Žádost prof. Jos. Vaněčka za připuštění k docentuře s prominutím doktorátu. Děkan [L. Čelakovský] *upozornil na rozhodnutí ministerské ze dne 12. června 1884 č. 9579 a tázal se, nemá-li* [se] *žadatel, poněvadž nebydlí v místě a limine odmítnout. Prof. Frič namítá, že tímto rozhodnutím ministerským se omezuje svoboda ucházeti se o docenturu a že jest možná, že docent bude dojížděti do Prahy přednášet. Naproti tomu tvrdí prof. Kvíčala, že rozhodnutí ministerské jest pro sbor závazné a že nelze proti němu jednati. Konečně většinou přijat návrh prof. Rezka, aby žádost Vaněčkovi byla vrácena.* (Viz *Protokol I. o sezení sboru profesorů c. k. české fakulty filosofické university Karlo-Ferdinandovy dne 30. října 1884*, VIII. bod jednací, fond Zápisy ze zasedání profesorského sboru české FF UK, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.)

Profesorský sbor tedy vůbec nejednal o odborné kvalitě uchazeče, o jeho habilitační práci, vědecké, publikační a pedagogické činnosti. Žádost byla zamítnuta z čistě formálních důvodů; všechny materiály byly J. S. Vaněčkovi vráceny.

Doplňme pro úplnost, že výše zmíněný ministerský výnos nařizoval, že uchazeč o habilitaci musí bydlet v místě nebo na předměstí místa, v němž příslušná škola sídlí, tj. v takové vzdálenosti, aby mohl vykonávat pravidelné přednášky a cvičení. Toto opatření mělo zabránit „inflaci docentur“. J. S. Vaněček nebyl jediný, jehož habilitace byla ve školním roce 1884/1885 na základě tohoto výnosu odmítnuta (např. dne 19. 3. 1885 byla ze stejného důvodu zamítnuta žádost Dr. Práška a dne 9. 7. 1885 žádost Dr. Sklenáře).

[42] J. Sobotka o konkurzu napsal: *V roce 1895 účastnil se soutěže o místo profesora deskriptivní geometrie na české vysoké školy technické v Praze, jež se uprázdnilo odchodem prof. F. Tilšera na odpočinek a jež uděleno bylo K. Pelcovi, řádnému profesoru vysoké školy technické ve Štýrském Hradci. Vzpomínám nerad vypsání veřejné soutěže na místo to. Bylo dobře známo, že prof. Pelc toužil po Praze; hlavní příčina toho byla ta, že podnebí ve Štýrsku jeho zdraví nesvědčilo. Mohlo se očekávati, že sbor profesorský české vysoké školy technické použije této příležitosti, aby jej povolal zpět do vlasti; nestalo se ale tak. To však Pelce neodradilo, aby se o místo neucházel. Byl to hlavně vliv prof. Ed. Weyra, že přišel do návrhu na první místo a že jeho jmenování do Prahy se uskutečnilo. V. sám v návrhu nebyl ...* (J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151, citát ze str. 151.)

Průběh konkurzu je podrobně popsán v protokolech nazvaných *Schůze profesorského sboru 1895/6* (8. 10., 19. 11. a 3. 12. 1895, 8. 3. a 23. 6. 1896, Archiv ČVUT v Praze). Poznamenejme, že konkurzní komise (profesoři Ed. Weyr a J. Šolín) navrhla na první místo Karla Pelze, na druhé místo Bedřicha Procházku, na třetí Antonína Suchardu společně s Aloisem Strnadem. Proti návrhu se vzedmula vlna neobvyklého odporu mladých docentů a profesorů, kteří prosazovali jmenování B. Procházky, pražského středoškolského profesora, jenž výuku deskriptivní geometrie na české technice v Praze již několik semestrů úspěšně suploval. Ostře kritizovali něček vědecké práce zanechal a věnoval se výhradně výrobě svých zámečnických vynálezů. V Jičíně si založil strojní zámečnickou dílnu, která mu však přinesla značné finanční problémy.[43]

Poznamenejme na okraj, že vztahy mezi bratry Vaněčkovými a českou matematickou komunitou, zejména mezi nimi a Eduardem Weyrem (1852–1903), nebyly asi příliš dobré a přátelské.[44] *Jednota českých mathematiků* a *Královská česká společnost nauk* vydávaly různé monografie, učebnice, rozsáhlejší odborné studie i překlady významných zahraničních prací, ale bratři Vaněčkové museli své práce obvykle publikovat vlastním nákladem nebo v zahraničí. O nepříznivé situaci jistě mnoho vypovídají Vaněčkova kritická slova:

> *Jak rádi bychom psali o pěstování vědy geometrické i u nás. Avšak pohříchu národ náš neměl českých škol, z nichž by byli vyšli učenci, kteří by opět vědu dále rozšiřovali a pěstovali. V nejnovější době se sice poměry v tomto směru zlepšily, avšak o českých soustavných spisech z oboru geometrie z příčin nasnadě ležících pomlčeti dlužno.*[45]

O vztahu J. S. Vaněčka k české společnosti J. Sobotka napsal toto:

> *... Nesl-li těžce, že uznání doma neprojevilo se v té míře, jak po tom toužil, nebyla toho příčinou zaujatost osobní v kruzích vědeckých, která se projevila proti němu, spíše u nadřízených mu úřadů středoškolských, ačkoliv na*

---

návrh na Pelzovo jmenování, protože K. Pelz nikdy neučil na české škole, česky nepublikoval jedinou práci, nedoložil znalost českého jazyka a na úřední dopisy zásadně odpovídal německy. Hlavní důvodem však mohlo být to, že jeho švagrem byl neblaze proslulý pražský vrchní policejní komisař Václav Olič, který se angažoval i v procesu s *Omladinou*. Ed. Weyrovi se nakonec podařilo prosadit K. Pelze jako prvního a nejlepšího kandidáta na uvolněné profesorské místo. Návrh profesorského sboru byl zaslán c. k. ministerstvu kultu a vyučovaní, které dekretem č. 11641 ze dne 20. května 1896 jmenovalo K. Pelze řádným profesorem deskriptivní geometrie.

Vaněčkovou kandidaturou se konkurzní komise vůbec nezabývala, neboť nesplňovala základní formální požadavky (např. řádně ukončené vysokoškolské studium). J. S. Vaněček ke konkurzní přihlášce připojil tištěný seznam publikací nazvaný *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze* (vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran), který obsahoval stručnou charakteristiku 51 tištěných prací a tří rukopisů. Poznamenejme, že práce *Svazky orthogonálných hyperboloidů* a *Plocha kardioido-hypreboloidová* byly otištěny až po konkurzu v roce 1895 v *Rozpravách České akademie pro vědy, slovesnost a umění* (viz 4(1895), č. 28, 4 strany a 4(1895), č. 30, 5 stran). Práce *Osvětlení orthogonálného hyperboloidu a plochy kardioido-hyperboloidové* zůstala jen v rukopise; její obsah J. S. Vaněček popsal takto: *Při sestrojování intensivních čar dané plochy užívá se rozličných ploch pomocných. Pohodlný způsob sestrojování tečných rovin a dotyčných bodů při plochách orthogonálných přímkových, při nichž je možno užiti dotyčných orthogon. hyperboloidů, vede k upotřebení způsobu, jakého se užívá při osvětlení šikmého kužele.*

Probráno tu především sestrojení intensitních bodů na dvou rovnoběžných přímkách tvořících orth. hyperboloidu. Lesklé body a křivka vlastního stínu sestrojí se velmi snadno.
Totéž dá se provést na ploše kardioido-hyperboloidové, při čemž stačí obrazy určovacích částek této plochy. (J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 15–16.)

[43] Viz J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran. Viz též J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151.

[44] Viz J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151.

[45] J. S. Vaněček: *O dějinách geometrie*, Pardubice, 1882, str. 40.

škole samé nebylo si mu stěžovati ani co se osobních ani co se služebních poměrů týče na nic, co by mu působení jeho bylo znepříjemňovalo.[46]

6 Podrobnější charakteristika Vaněčkových dopisů

V letech 1882 až 1885 J. S. Vaněček, v době svého působení na reálce v Jičíně, napsal L. Cremonovi 7 krátkých dopisů (2 italsky a 5 francouzsky). První dopisy jsou formální, velmi zdvořilé a neosobní.[47] Pozdější mají osobní charakter, obsahují Vaněčkovy zprávy o tom, že byl jmenován dopisujícím členem *Královské české společnosti nauk* a *Société Philomatique de Paris*,[48] gratulace k opakované Cremonově volbě senátorem,[49] žádost o Cremonovu fotografii s podpisem[50] a blahopřání k Novému roku.[51]

Všechny Vaněčkovy dopisy dokládají jeho odbornou práci v geometrii, zájem o Cremonovy názory na jeho geometrické výsledky, touhu studovat Cremonovy originální práce v italštině a snahu publikovat své práce v italských časopisech. Ukazují též Vaněčkovu znalost zahraniční literatury.[52]

S prvním dopisem datovaným 4. 7. 1882 J. S. Vaněček pravděpodobně zaslal L. Cremonovi své dvě stejnojmenné práce *Sur l'inversion générale*,[53] v nichž reagoval na práci britského matematika T. A. Hirsta.[54] Snažil se najít obecnou inverzi roviny a popsat její vlastnosti. V úvodu článku napsal:

---

[46] J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151, citát ze str. 150.

[47] Dopisy začínají oslovením *Molto illustre Signore* nebo *Illustre Monsieur*, později se objevuje civilnější oslovení *Monsieur*.

[48] Viz dopis ze dne 14. 7. 1883. Roku 1885 byl J. S. Vaněček zvolen dopisujícím členem Královské belgické společnosti nauk v Liège (*Société Royale des Sciences de Liège*). Na počátku 90. let 19. století se J. S. Vaněček stal dopisujícím členem *České akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění*, přespolním členem *Société mathématique de la France* a *Circolo Matematico di Palermo*.

[49] Viz dopis ze dne 13. 12. 1884.

[50] Viz dopis ze dne 12. 11. 1884, 3. 12. 1884 a 13. 12. 1884. Jako perličku můžeme připojit, že v dopise ze dne 3. 12. 1884 J. S. Vaněček poděkoval L. Cremonovi za zaslání fotografie. V dopise ze dne 3. 12. 1884 mu oznámil, že *Královská česká společnost nauk* chystá fotografické album svých členů a požádal ho jejím jménem o zaslání fotografie s vlastnoručním podpisem. Dne 13. 12. 1884 L. Cremonovi napsal, že Karel František Edvard Kořistka (1825–1906), sekretář společnosti, obdržel jeho pěknou fotografii, že se mu však natolik zalíbila, že si ji rozhodl ponechat. *Královská česká společnosti nauk* tak zůstala bez Cremonova portrétu. J. S. Vaněček proto poprosil o zaslání nové fotografie, tentokrát však na jeho osobní adresu. V dopise napsal: *Monsieur la Secrétaire général, Dr. Ch. de Kořistka, ayant reçu votre très jolie photographie, qui avait été destinée pour la Société Royale, il l'a conservée pour lui-même, parce qu'il là trouve très belle. ... Seulement je pense que Vous auriez de la bonté de renouveler Votre hommage en l'adressant à moi; je m'empresserai de l'envoyer au lieu destiné.*

[51] Viz dopis ze dne 27. 10. 1885, který má pravděpodobně chybné datování.

[52] V dopise ze dne 3. 12. 1884 J. S. Vaněček gratuloval L. Cremonovi k publikování článku *Sopra una trasformazione birazionale del sesto grado delle spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del quinto grado*, Proceedings of the London Mathematical Society 15(1884), 242–246.

[53] J. S. Vaněček: *Sur l'inversion générale*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 94(1882), 1042–1044, resp. J. S. Vaněček: *Sur l'inversion générale*, Proceedings of the London Mathematical Society 33(1882), 29–31. Poznamenejme, že bratři Vaněčkové zaslali práci do soutěže o cenu francouzské akademie věd: *MM. J.-S. et M.-N. Vaněček adressent à l'Académie, pour le concours du prix Francouer, un Mémoire intitulé »Sur l'inversion générale«. (Renvoi à la Commission du prix Francouer.)* Viz Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 98(1884), 1318.

[54] J. S. Vaněček reagoval na článek T. A. Hirst: *On the quadric inversion of plane curves*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 17(1881), 301–311.

M. Hirst, dans son Mémoire On the quadric inversion of plane curves, a généralisé la théorie de transformation par rayons vecteurs réciproques de telle sorte, qu'il a pris une conique générale C et une point d pour éléments de la transformation. Par se point d, on mème un rayon à chaque point a de la figure proposée, et l'on prend sur ce rayon le point a' conjugué de a par rapport à la conique. Ces points a' forment la nouvelle figure. Nous allons donner, dans cette Note, l'idée d'une transformation plus générale.

Vlastní zobrazení J. S. Vaněček definoval takto:

Considérons une conique C, que nous appelons fondamentale, et une droite D dans le plan de la conique C. La droite D est la directrice de la transformation. Supposons que la figure proposée soit une droite L. La polaire A d'un point a de la droite L, par rapport à la conique C, coupe la directrice D en un point a_1, dont la polaire A, passe par le pôle d de la droite D et par a. Le point d'intersection a_2 de ces deux polaires est le transformé du point a. La transformée de la droite L est une conique (a_2), qui passe par les points d'intersection des droites D, L avec la conique fondamentale C et par les pôles de ces deux droites.[55]

V dalších čtyřech částech článku popsal speciální případy výše uvedené inverze.[56] Jeho záměr se však nezdařil; nalezl pouze ekvivalentní vyjádření již známé Hirstovy inverze, jak správně napsal F. Meyer, autor recenze Vaněčkovy práce uveřejněné v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.[57] Cremonův názor na zaslané práce se nedochoval.[58]

---

[55] J. S. Vaněček: *Sur l'inversion générale*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 94(1882), 1042–1044, citát ze str. 1042–1043.

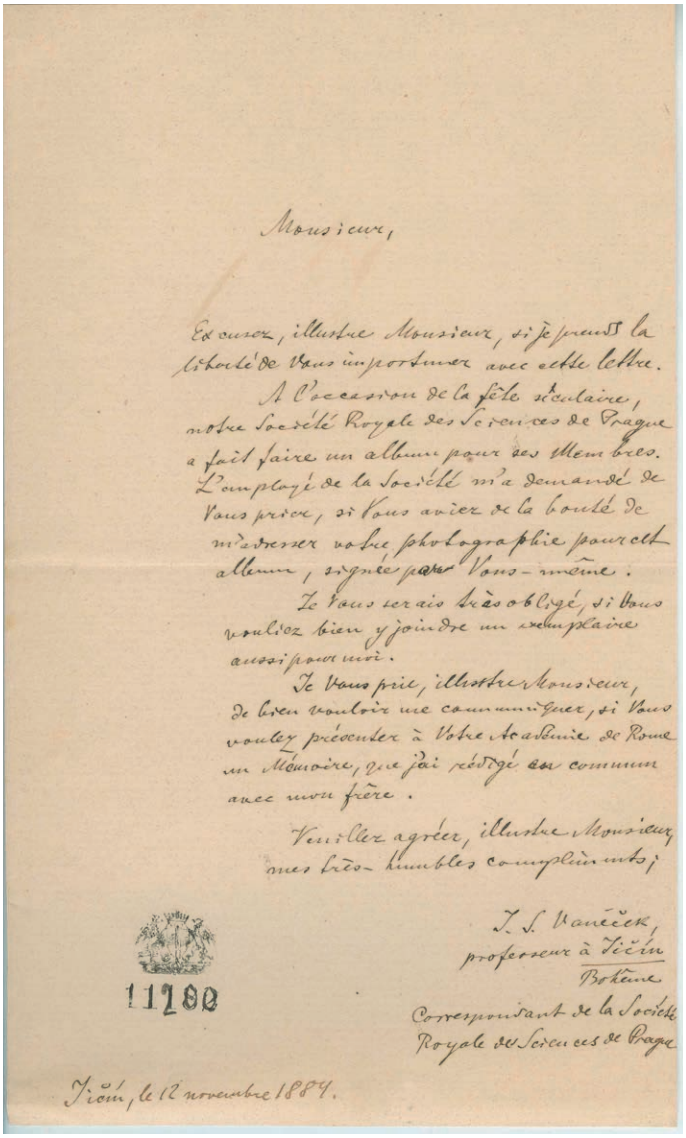
[56] J. S. Vaněček obsah článku charakterizoval takto: *V tomto článku je podána základní myšlénka o všeobecné inversi vzhledem k základní kuželosečce a řídící křivce n-tého řádu a dokázáno, že kterákoliv křivka m-tého řádu přetvoří se v křivku* 2*mn-tého řádu.*

Dále jsou určeny mnohonásobné body na odvozené křivce, jakož i počet jejích inflekčních bodů mn (*m*+*n*–2). (J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 3.)

[57] *Herr Hirst hatte eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Inversion (in der Ebene) angegeben, nach der zwei Punkte x, y Bilder von einander sind, wenn sie in Bezug auf einen festen Kegelschnitt conjugirt sind, und wenn noch ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt geht. Der Herr Verfasser will eine Idee von einer Verallgemeinerung dieser Hirst'schen Transformation geben, es entgeht ihm aber, dass seine Transformation mit der Hirst'schen völlig identisch ist. Es folgen Anwendungen auf verschiedene besondere Fälle.* (Viz http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/quick.html, recenze JFM 14.0723.01.)

[58] Stručně řečeno, J. S. Vaněček vycházel ze vztahu pevné kuželosečky (resp. pevné plochy druhého stupně) a jejích proměnlivých polárních trojúhelníků (resp. polárních trojhranů). V několika po sobě následujících článcích (částečně se překrývajících) studoval vlastnosti křivek vytvářených vhodně zvolenými body výše uvedených proměnných útvarů; podařilo se mu vytvořit a popsat několik speciálních ploch vyšších řádů. Výsledky a význam těchto prací výstižně zhodnotil J. Sobotka:

... Podstatu této transformace [metoda recipročních průvodičů a kvadratická transformace] *uveřejňuje* [J. S. Vaněček] *na různých místech téměř současně, takže úvahy v řadě pojednání jedněch jsou částečně aneb v podstatě převzaty do pojednání jiných, kdežto v celé řadě pojednání, jež jsou většinou prací společnou obou bratří, jsou podrobně provedeny různými směry úvahy, jichž výsledek jest dříve podán v pojednáních jiných. Volbou rozmanitých útvarů řídících při zmíněném pohybu vznikají útvary speciální, které se stávají předmětem společného zpracování v řadě pojednání uveřejněných ve spisech společností učených domácích i zahraničních; mám za to, že by jisté omezení v tomto směru bylo bývalo věci na prospěch. Snaha chtíti vyvoditi vlastnosti útvarů geometrických na základě jednoho principu obsahuje nebezpečí jednostrannosti a vede někdy k známým vlastnostem a ke konstrukcím, které na základě jiných známých method lze obdržeti cestou kratší a v uspořádání*


Monsieur,

Excusez, illustre Monsieur, si je prends la liberté de Vous importuner avec cette lettre.

A l'occasion de la fête séculaire, notre Société Royale des Sciences de Prague a fait faire un album pour ses Membres. L'employé de la Société m'a demandé de Vous prier, si Vous aviez de la bonté de m'adresser votre photographie pour cet album, signée par Vous-même.

Je Vous serais très obligé, si Vous vouliez bien y joindre un exemplaire aussi pour moi.

Je Vous prie, illustre Monsieur, de bien vouloir me communiquer, si Vous voulez présenter à Votre Académie de Rome un Mémoire, que j'ai rédigé en commun avec mon frère.

Veuillez agréer, illustre Monsieur, mes très-humbles compliments;

J. S. Vaněček,
professeur à Jičín
Bohême
Correspondant de la Société
Royale des Sciences de Prague

Jičín, le 12 novembre 1884.

Vaněčkův dopis ze dne 12. 11. 1884

---

přehlednějším a jednodušším. (J. Sobotka: *Josef Silvestr Vaněček*, Almanach České akademie věd a umění 33(1922), 138–151, citát ze str. 148–149.)

Opakované publikování téměř totožných prací či jejich částí nebo zkrácených verzí dokládá i referativní časopis *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Poznamenejme, že to nebyl nijak výjimečný případ, obvykle však naši autoři publikovali totožné práce v různých jazykových mutacích. J. S. Vaněček, sám nebo spolu s bratrem, publikoval téměř totožné práce (nebo jejich části) opakovaně nebo jen s drobnými úpravami v různých časopisech, které otiskovaly francouzsky psané články.

Ve druhém dopise ze dne 29. 7. 1882 J. S. Vaněček napsal, že získal Cremonovu práci *Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung*,[59] a požádal ho o zaslání jejího originálu, neboť nechtěl studovat německý překlad. Poznamenejme, že J. S. Vaněček se výrazně orientoval na Francii a Rusko, resp. Itálii, tj. na země, kde byla odborná literatura publikována francouzsky, resp. italsky. Pootevřel tak cestu naší matematice do jiného vědeckého prostředí. K této orientaci jistě přispěl jeho pobyt v Paříži a přátelství s předními francouzskými matematiky, což nebylo v našich zemích v 80. letech 19. století vůbec typické, neboť naši matematici se obvykle soustřeďovali na německé prostředí, resp. německy psanou literaturu.

Ke třetímu dopisu ze dne 14. 7. 1883 J. S. Vaněček přiložil rukopis článku, který napsal spolu s bratrem pro italskou akademii věd Římě. Prosil L. Cremonu o posouzení práce a v případě, že ji shledá zajímavou a publikovatelnou o její předložení k otištění.[60]

---

[59] Berlin, 1870, 228 stran. Jedná se o překlad tří Cremonových prací (*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 12(1862), 305–436; *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Rendiconti dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 1865/1866, 76–77, a Memoire dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 6, 1867, 29–78; *Mémoire de géométrie pure sur le surfaces du troisième ordre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 68(1868), 1–133), který udělal Maxmilian Curtze (1837–1903), slavný německý filolog, překladatel a historik matematiky, velký znalec Koperníkova, Oresmova a Bradwardinova díla.

[60] Název práce není v dopise uveden, její téma a obsah nejsou blíže specifikovány. Není zřejmé, o jakou práci bratří Vaněčků se jednalo a jaký byl její další osud. J. S. Vaněček se o ní pravděpodobně zmiňoval ještě v dopise ze dne 12. 11. 1884, když se tázal, zda a s jakým výsledkem byla akademii věd předložena. Cremonova odpověď se nedochovala.

V této době se bratři Vaněčkové intenzívně zabývali problémem involuce, snažili se zobecnit Weyrovu definici obecné involuce rovinných útvarů na útvary prostorové.

Připomeňme Weyrovu definici involuce vyššího stupně a vyšší třídy: *Involucí n-tého stupně k-té třídy nazýváme takový vztah mezi prvky daného geometrického útvaru rodu nula, při němž vhodnou volbou k prvků je stanoveno n–k prvků* (*n* > *k*) *tohoto útvaru tak, že kterýkoliv z k-prvků lze považovat za prvek určující všechny prvky tohoto n-členného souboru.* (Více viz Em. Weyr: *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. Mit 5 Figurentafeln*, Druck und Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1869, 156 stran; *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Druck und Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1870, 175 stran; *Beiträge zur Curvenlehre*, Alfred Hölder, K. k. Hof- und Universitätsbuchhändler Wilhelm Braumüller, Wien, 1880, 64 stran. Viz též Em. Weyr: *Ueber Involutionen höherer Grade*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 72(1870), 285–292; *Zur Vervollständigung der Involution höherer Ordnung. (Mit zwei Holzschnitten)*, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 61(1870), 2. Abth., April-Heft, 488, 600–606; *Ueber höhere Involutionen*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1870, 1. Abth., Februar, 14–18; *Z novější geometrie. O involuci*, Druhá zpráva Jednoty českých mathematiků, Praha, 1870, 10–21; *Zur Theorie der Involutionen höherer Grade*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 16(1871), 353–354; *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1874, VI. Folge, 7. Band, 56 stran; *Über die projectivische Beziehung zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution*, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 73(1876), 2. Abth., Mai-Heft, 654–656; *Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe*, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 79(1879), 2. Abth., April-Heft, 680–698.) O Weyrových výsledcích viz J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006; M. Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008, a J. Folta: *Česká geometrická škola – Historická analýza*, Studie Československé akademie věd, Academia, Praha, 1982.

V časopise Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris bratři Vaněčkové uveřejnili sérii článků nazvanou *Sur l'involution des dimensions supérieures* (99(1884), 742–744, 856–857, 909–911). Jejich úsilí však končilo uvedením definice involuce a popisem několika speciálních příkladů. Poznamenejme, že tato práce nebyla recenzována v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Je bezesporu zajímavé uvést Vaněčkovo vlastní hodnocení výše uvedené série prací: *Sur l'involution des dimensions supérieures.*

Ve čtvrtém dopise ze dne 3. 12. 1884 J. S. Vaněček uvedl, že tento měsíc zaslal článek italské akademii věd v Římě, který sepsal opět se svým bratrem. Pravděpodobně se jednalo o práci *Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces*.[61] Zmínil se o ní a o jejích úpravách v dopise ze dne 13. 12. 1884, v němž mimo jiné prosil o vytištění 50 separátů pro své a bratrovy potřeby. Práce byla otištěna roku 1885.

Další Vaněčkovu korespondenci a jeho rukopisnou pozůstalost se nepodařilo ani u nás, ani v zahraničí dohledat; pravděpodobně se nedochovala.

Involuce v tomto článku nastíněná je všeobecnější oné, která až posud ve vědeckých článcích projednávána byla. Involuce tato uveřejněná nazvána druhého rozměru oproti obyčejné, jež je prvého rozměru.
Jsou tu rozlišeny dva případy
1. involuce druhého rozměru a $(2n+1)$*-ho řádu*
2. involuce druhého rozměru a $2n$*-ho řádu.*

Sur l'involution des dimensions supérieures.
Článek tento obsahuje následující definici:
Jednoduše nekonečné množství měřických míst n-tého rozměru nazváno budiž měřickým místem $(n+1)$*-ho rozměru.*
Z toho je odvozeno:
Budiž γ *počet bodů, jež určují jedinou křivku C řádu c; křivky C určené* $\gamma - \gamma_1$ *body vytvořují měřické místo* $(2\gamma_1+1)$*-ho rozměru.*
Budiž dále σ *počet bodů určujících jedinou plochu S řádu s; plochy S určené body* $\sigma - \sigma_1$ *tvoří měřické místo* $(\sigma+2)$*-ho rozměru.*
Na základě těchto pouček jsou odvoděny involuce vyšších rozměrů.

Sur l'involution des dimensions supérieures.
Zde jsou podána tato pojmenování při involucích: Počet bodů tvořících skupinu je nazván stupněm involuce. Řád měřického místa vyššího je řádem involuce. Rozměr nosiče je rozměrem involuce. Rozdíl řádů obou měřických míst stanovících involuci je schodkem involuce.
Po tuto uvedeném označení je poukázáno k involuci vyšších rozměrů v rovině, při čemž dostává se tato poučka. Tato involuce je stupně $c_1 c_2$ *-tého, rozměru* (γ'_2-1)*-ho a řádu* γ'_1*-ho. Schodek její je* $\gamma'_1 - \gamma'_2$ *. Z toho se pak dá přejíti na známé involuce prvního rozměru.* (J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 5–6.)

[61] J. S. Vaněček, M. N. Vaněček: *Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei di Roma, 1885, 130–133. Podrobnější charakteristiku této práce lze najít v recenzi, kterou napsali C. Segre z Turína a A. Lampa z Berlína. (Viz http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/quick.html, JFM 17.0667.01.)

V časopise „Rendiconti" byl uveřejněn pouze stručný výtah obsahující základní výsledky práce bratří Vaněčků. J. S. Vaněček na to poukazuje ve svém soupisu publikací těmito slovy: *Professor Cremona podal akademii* [římské] *výtah z práce ››sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces‹‹, která pro svou objemnost nemohla býti ve zprávách této akademie uveřejněna.* (J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze*, vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran, citát ze str. 6.)

Celá studie byla otištěna v časopise Annali di matematica pura ed applicata (viz *Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces*, Annali di matematica pura ed applicata, 2. série, 14(1886), 73–114). O rok později byla doplněna rozsáhlým pojednáním nazvaným *Contact des faisceaux de surfaces* (Annali di matematica pura ed applicata, 2. série, 15(1887), 73–114), které opět sepsali bratři Vaněčkové společně. Pojednali v něm o bodech dotyku ve vícemocných svazcích s danými přímkami, resp. rovinami, resp. mezi vlastními prvky svazku a popsali útvary (křivky i plochy), které vytvářejí dotykové body.

Vaněčkova vlastní podrobná charakteristika obsahu a významu práce je uvedena na stranách 12 až 14 jeho bibliografie *Přehled prací geometrických, které sepsal J. S. Vaněček ... Příloha při ucházení o stolici professury deskriptivní geometrie na c. k. české vysoké škole technické v Praze* (vlastním nákladem, Jičín, 1895, 16 stran).

7 Závěr

Na příkladu L. Cremona – J. S. Vaněček jsme se pokusili stručně naznačit, jaké možnosti a inspirace přináší historikům vědy studium rozsáhlejších kolekcí odborné i institucionální korespondence a dalších osobních materiálů významných matematiků.

Literatura

[1] Brigaglia A., Di Sieno S.: *The Luigi Cremona Archive of the Mazzini Institute of Genoa*. Historia Mathematica 38(2011), 96–110.

[2] Dopisy J. S. Vaněčka L. Cremonovi z let 1882 až 1885, fond *Legato Itala Cremona Cozzolino*, Knihovna *Istituto Mazziniano di Genova*.

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz*

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz*

TEORIA GALOIS W SPUŚCIŹNIE KRETKOWSKIEGO

DANUTA CIESIELSKA

Streszczenie: In the legacy of Władysław Kretkowski we found a notebook. There are handwritten notes in Polish (made probably by Kretkowski) on Galois theory. The notes were written in the sixties of the 19th century. In the paper, we start with a biography of Kretkowski. Next, a short introduction to the history of Galois theory and its classical form, and the history of the reception of Galois theory up to 1870 is given. Four section of the notes are briefly discussed and some definitions, theorems and examples from the notes are presented. The copy of the first page of the fundamental section of the theory is also given.

1 Wstęp

1.1 Władysław Kretkowski i jego spuścizna

Władysław Kretkowski herbu Dołęga urodził się 20 grudnia 1840r. w Wierzbinku na Kujawach w Królestwie Polskim. Jego rodzicami byli Emilian oraz Izabela z domu Chrząszczewska. Naukę początkowo pobierał w domu, następnie w szkole Jana Nepomucena Leszczyńskiego w Warszawie oraz Instytucie Szlacheckim, by ostatecznie w roku 1857 zostać uczniem gimnazjum realnego w Warszawie. W czasie swej nauki miał okazję zetknąć się z wynalazcą i konstruktorem Stanisławem Lilpopem[1] oraz nauczycielem matematyki Janem Pankiewiczem[2]. Lata sześćdziesiąte XIX wieku (usunąć przecinek) to dla Kretkowskiego głównie czas studiów i podróży naukowych.[3] Władysław odwiedził Wystawę Światową w Londynie. W roku 1865 rozpoczął studia w Paryżu w École Imperiale des Ponts et Chauseés (Szkoła Dróg i Mostów).[4] Prawdopodobnie już rok wcześniej Kretkowski rozpoczął studia z zakresu matematyki na Sorbonie. Władysław Kretkowski 11 kwietnia 1868r. otrzymał stopień licencjata nauk matematycznych paryskiej Sorbony, dyplom Szkoły Dróg i Mostów zaś 6 listopada 1868r (dodać kropkę). Został członkiem Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu. Publikował prace i opracowania matematyczne, większość w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych (dalej TNŚ). Bezpośrednio po powrocie z Francji Kretkowski mieszkał w Warszawie, był inżynierem, uczestniczył w budowie kolei warszawsko-wiedeńskiej oraz warszawsko-bydgoskiej. W roku 1878 Kretkowski uzyskał *veniam legendi* w zakresie matematyki w Szkole Politechnicznej[5] we Lwowie i rozpoczął pracę jako docent prywatny (dodać kropkę). Wiosną roku 1879 rozpoczął starania o uzyskanie praw

---

[1] Stanisław Lilpop (1817–1866), przemysłowiec, wybitny konstruktor, współwłaściciel *Fabryki Machin* (następnie LRL) oraz dyrektor *Fabryki Machin i Odlewów*, popularyzator techniki.
[2] Jan Pankiewicz (1816–1899), absolwent Uniwersytetu w Petersburgu, inspektor gimanazjum realnego, członek oraz przewodniczący Komisji Egzaminacyjnej dla kandydatów na nauczycieli, współredaktor *Encyklopedii* Orgelbranda, tłumacz *Planimetrii* Lagrange'a.
[3] W roku 1863 Kretkowski brał udział w powstaniu styczniowym. W następnym roku zdobył, we Włocławku, uprawnienia nauczyciela matematyki w gimnazjach.
[4] Biblioteka Naukowa PAU i PAN, Rkps. 9507, spisy wykładów z lat 1865/66 – 1867/68.
[5] Z. Popławski: *Dzieje Politechniki Lwowskiej 1844–1945*, Ossolinemum, Wrocław, 1992.

wykładania na Uniwersytecie we Lwowie. Starania zakończyły się częściowym sukcesem, gdyż uzyskał na Uniwersytecie we Lwowie *veniam legendi*, jednak ograniczone do teorii wyznaczników (zamienić przecinek na średnik); zrezygnował wtedy ze stanowiska w Szkole Politechnicznej, równocześnie podjął starania o uzyskanie doktoratu. W roku 1882 uzyskał doktorat z matematyki. Rozprawę *O niektórych wzorach rachunku różniczkowego* przedstawioną w rękopisie do oceny w celu uzyskania stopnia naukowego na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego opiniowali Franciszek Mertens i Franciszek Karliński.[6] Starania o stopień rozpoczął w tajemnicy przed profesorami Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu we Lwowie, gdyż wcześniejsze starania we Lwowie zakończyły się, ze względu na porażkę na egzaminie z filozofii, niepowodzeniem. Ostatecznie, pod presją profesorów Uniwersytetu Lwowskiego: Żmurki i Fabiana, Władysław Kretkowski zrezygnował ze stanowiska docenta Uniwersytetu. Entuzjazm Kretkowskiego, który wnioskował o utworzenie seminarium matematycznego we Lwowie, współredagował lwowskie *Czasopismo Techniczne* i starał się wprowadzić nowe wyniki matematyki do wykładów uniwersyteckich, nie zgasł zupełnie. Kretkowski przeniósł się do Krakowa, fundował nagrody w konkursach matematycznych.[7] Po blisko dziesięcioletnim pobycie w szpitalach psychiatrycznych, gdzie został skierowany na wniosek rodziny, skłócony ze spadkobiercami[8] w testamencie zapisał cały majątek na potrzeby matematyki krakowskiej, seminarium matematycznemu przekazał swą bibliotekę, decyzję o takim rozporządzeniu majątkiem przekazał prezesowi Akademii Umiejętności w Krakowie.[9] Prywatne archiwum Władysława Kretkowskiego znajduje się obecnie w Bibliotece Naukowej PAU i PAN w Krakowie. Zbiór dokumentów liczy kilkanaście tomów zawierających zdjęcia, rękopisy prac matematycznych oraz prywatne dokumenty, takie jak korespondencja z rodziną, telegramy, rachunki, wizytówki. Wśród zgromadzonych materiałów znalazły się również notatki z czasów pa-ryskich.

2 Teoria Galois[10]

2.1 O historii teorii Galois i jej klasycznej formie

W ważnym, dla rozwoju teorii, 1799 roku niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss (1777–1855) udowodnił zasadnicze twierdzenie algebry, a Paulo Rufiini (1765–1822) udowodnił, że równanie algebraiczne stopnia większego niż 4 nie musi być rozwiązalne przez pierwiastniki (zob. [10]). Do historii teorii należą także wyniki Nielsa Henrika Abela (1802–1829): pierwszy z roku 1824 – dowolne równanie stopnia piątego nie jest rozwiązalne przez pierwiastniki (zob.[2]) oraz dwa lata późniejszy (uzyskany niezależnie od Ruffiniego) – dowolne równanie stopnia większego niż 4 nie jest rozwiązalne przez pierwiastniki (zob. [1]). Odpowiedź na pytanie o warunki jednoznacznie określające możliwość uzyskania rozwiązania równania stopnia wyższego niż 4 przez pierwiastniki czekało aż do pojawiania się wyników Évariste Galois. Dwie prace zatytułowane: *Recherches algébriques* oraz *Recherches sur les équations algébriques de degré premier*

---

[6] Franciszek Karliński (1830–1906), polski astronom, meteorologi i matematyk, dyrektor Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego, profesor i doktor honoris causa UJ.

[7] Najbardziej znany jest konkrus ogłoszony przez Akademię Umiejętności w Krakowie. Jeden z postawionych wówczas problemów, to III problem Hilberta. Do konkursy stanął Ludwik Birkenmajer, a jego odpowiedź została pozytywnie oceniona.

[8] Kretkowski był kawalerem i nie miał dzieci, dziedziczyli po nim bracia.

[9] Archiwum PAN i PAU, 219/07.

[10] Wykorzystano informacje zawarte w pracach: L. Martini [6] , I. Rudloffa [8], W. Więsława [14] i [13] oraz książkach J. Rotmana [9] i H. Wussinga [15].

przedstawił do oceny Paryskiej Akademii Nauk 25 maja oraz 1 czerwca 1829 roku. Prace przesłano Augustinowi Luisowi Cauchy'emu (1789–1857) do oceny oraz ewentualnego przedstawienia na cotygodniowym posiedzeniu Akademii. Prezentacja prac została zaplanowana na 30 stycznia 1830. Niestety w tym posiedzeniu Cauchy nie uczestniczył, prac Galois nigdy już nie przedstawił Akademii, a rękopisy jemu powierzone prawdopodobnie zaginęły. Już w lutym 1830 roku Galois przesłał do Akademii nowy rękopis, którego recenzentem miał zostać Joseph Fourier (1768–1830); recenzent z powodu śmierci nie wywiązał się zadania, a rękopisów również nie odnaleziono. Po raz trzeci Galois przesłał rękopis do Akademii 17 stycznia 1831 roku, nowa rozszerzona wersja została zatytułowana *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (opublikowana jako: [5]). Recenzentami pracy byli Sylvester Lacroix (1765–1843) oraz Siméon Denis Poisson (1781–1840). Praca została przekazana autorowi do poprawy, bo jak to wyraził Poisson „była kompletnie niezrozumiała". Wiadomo, że rękopis został przekazany autorowi, który dokonał zmian oraz uzupełnień, a dodatkowo w noc przed słynnym pojedynkiem, Galois napisał list do swego przyjaciela A. Chevaliera, w którym krótko opisał swe rezultaty z teorii równań algebraicznych. Chevalier i inni przyjaciele Galois przez lata czynił starania o zainteresowanie rękopisami.W roku 1843 Joseph Liouville (1809–1882), zdecydował się opublikować rezultaty Galois w grudniowym numerze *Journal des mathematiques pures et appliquées*. Niestety, przygotowany już do druku artykuł został wycofany z tego, ukazał się dopiero w roczniku 1846. Dołączono do niego inne niepublikowane prace Galois oraz list do Chevaliera. Szczegółowo wydania oraz wydawców teorii Galois omawia Neumann (zob. [7]).

Klasyczna teoria Galois znacznie różni się od współcześnie wykładanej teorii. Wiele na ten temat pisali: Więsław (zob. [14], [13]) oraz Radolff (zob. [8]). W nowocześnie prowadzonym wykładzie Rotmana (zob. [9]), znajduje się dodatek, Appendix D, zatytułowany *Old-fashioned Galois theory*, w którym krótko zreferowano historię oraz klasyczną postać teorii.

2.2 Wykłady z teorii Galois do 1870 roku

Pierwszy wykład z teori Galois odbył się w Getyndze w zimowym semestrze roku akademickiego 1856/1857 (zob. [6]). Uniwersytecki wykład prowadził Richard Dedekind (1831–1910); wykład został powtórzony w zimowym semestrze następnego roku akademickiego. W roku 1862 odbył się kolejny wykład z teorii Galois, na Uniwersytecie w Christianie (obecnie Uniwersytet w Oslo) wykładał Ludvig Sylow (1832–1918); wśród słuchaczy był Sophus Lie (1842–1899). Pierwszy francuski akademicki tekst zawierający elementy teorii Galois to trzecie wydanie monografii *Cours d'algèbre supérieure* (zob. [11]) Josepha Alfreda Serreta (1819–1885). Dzieło Serreta budziło duże zainteresowanie. Już rok później ukazało się w Stanach Zjednoczonych jego angielskie tłumaczenie; w roku 1868 ukazało się niemieckie tłumaczenie dzieła. Kolejny wykład z teorii Galois, który odbył się w roku akademickim 1886/1887 na Uniwersytecie w Bolonii, a był prowadzony przez Cesare Arzelę, oparty został na trzecim wydaniu dzieła Serreta z roku 1866– pisze o tym L. Martini (zob. [6]).

Zajmijmy się polskim wątkiem wykładów z teorii Galois. W roku 1866 Władysław Kretkowski był słuchaczem Sorbony. W zachowanych dokumentach brak informacji o przebiegu matematycznych studiów Kretkowskiego, jednak w księgozbiorze przekazanym przez Kretkowskiego Seminarium Matematycznemu UJ znajduje się egzemplarz trzeciego wydania monografii Serreta (numer katalogowy K-286) oraz wydań z lat 1849, 1854, 1877 i 1879. Świadczy to o dużym zainteresowaniu Kretkowskiego algebrą, również po powrocie z Francji. Poza wieloma wydaniami monografii Serreta w bibliotece Kretkowskiego znajduje się także dzieło Camilla Jordana (1838–1922) *Traité des substitutions et des équations algébriques* z 1870 roku.

3 Pierwsze polskie notatki z teorii Galois

3.1 Informacje wstępne

W ogromnej spuściźnie Władysława Kretkowskiego znajduje interesujący nas zeszyt. Ma on standardowe wymiary (w przybliżeniu B5); liczący prawie 160 stron. Zapisanych zostało 131 nieliczbowanych stron. W zeszycie nie ma informacji ani o autorze notatek – jednak prawdopodobnie jest nim Władysław Kretkowski, ani o czasie ich powstania. Można dobrze oszacować czas powstania notatek. Inne materiały sąsiadujące, w skatalogowanej spuściźnie, z interesującym nas zeszytem powstały w okresie paryskich studiów Kretkowskiego (dodać przecinek), czyli w latach 1865–1871, zatem notatki te zapewne powstały w tym samym czasie. Treść notatek dotyczy podstaw teorii grup oraz teorii Galois wraz z przykładami jej zastosowań. Treść została podzielona na cztery rozdziały. Wypowiedziane definicje oraz twierdzenia mają ciągłą numerację od 141 do 224; kolejne numery zapiano z lewej strony. Zaskakuje, że numerację rozpoczyna liczba 141, fakt ten sugeruje, że odnalezione notatki stanowią kontynuację innych notatek. Zapewne były to notatki z zakresu algebry. Trudno jednoznacznie wskazać cel sporządzenia notatek. Najbardziej prawdopodobna wydaje się teza, że jest to polskie tłumaczenie notatek spisanych na podstawie wykładu wysłuchanego na Sorbonie, jednak możliwe jest, że notatki to przygotowana do druku praca. W latach 60. i 70. XIX wieku Towarzystwo Przyjaciół Nauk Ścisłych w Paryżu, z pomocą fundacji Działyńskich, prowadziło bardzo rozbudowaną działalność wydawniczą. Również Kretkowski, pod pseudonimem Władysława Trzaski, opublikował dzięki fundacji *Krótkie wiadomości o wyznacznikach*, wydane jako dodatek do znakomitego dzieła Władysława Folkierskiego *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*.[11] Teza o przygotowaniu monografii z algebry zawierającej podstawy teorii grup oraz teorii Galois jest zatem prawdopodobna. Staranne pismo, wyróżnianie słów definiowanych, wyróżnianie dużych liter, stanowiących oznaczenia, przez dodanie szeryfów zdają się potwierdzać tę możliwość.

3.2 Rozdziały wstępne

Dwa wstępne rozdziały: pierwszy rozdział „O podstawieniach w ogólności. – Porządek podstawień" oraz drugi rozdział „Podstawienia zespolone albo grupy. – Twierdzenie Lagrange'a" zawierają elementarne wiadomości z teorii permutacji oraz teorii grup skończonych. Notatki rozpoczyna definicja *podstawienia*. Ze względu na jej duże znaczenie przytoczymy ją w całości:[12] „Z funkcji n ilości można otrzymać inną przez zamianę tych ilości; w ten sposób powstaje $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ z funkcji $x_2 + 2x_3 + 3x_1$ gdy podstawimy x_1 na miejsce x_2, x_2 na miejsce x_3 i x_3 na miejsce x_1. – Działanie które wykonujemy, gdy w ten sposób pewne głoski przez inne zastępujemy, nazywa się podstawieniem; oznaczamy je przez dwa rzędy głosek, które tak rozumieć należy że każda głoska dolnego (niższego) rzędu wchodząca do funkcji powinna być zastąpiona

---

[11] W. Folkierski: *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, Nakładem Biblioteki w Kórniku, Paryż, 1870.
[12] Przyjęto współczesną polską ortografię.

przez głoskę nad nią znajdującą się w rzędzie górnym (drugim). Wyżej wykonane podstawienie wyrazi się przez $\begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.“

Następnie zostało określone: „Ogólne oznaczenia podstawienia

$$S = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

gdzie A_1 i A_0 oznaczają dwa przestawienia (permutacje) z n głosek. A_0 nazywa się mianownikiem, a A_1 licznikiem; głoskę którą kładziemy przy podstawianiu w miejscu innej nazywamy *podstawną*.“[13] Zgodnie z klasyczną formą teorii Galois wprowadzono podstawienia oraz przestawienia (zwane też czasem permutacjami). Określone obiekty, chociaż podane w innej kolejności, są identyczne z obiektami wprowadzonymi przez Galois w *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (zob. także: [9], [13]) gdzie najpierw określone zostało przestawienie a następnie przestawienie, większość pozostałych nazw jest zgodna z przyjętymi przez Cauchy’go i używanymi przez Galois. W notatkach znajduje się twierdzenie o iloczynie podstawień: „Iloczyn podstawień jest postawieniem“; definicja podstawienia okresowego (cyklicznego): „Podstawienie nazywa się okresowe, jeżeli głoski z których ono się składa dadzą się w ten sposób uszeregować, że każda z nich jest podstawną następnej, a ostatnia jest podstawną pierwszej“ oraz twierdzenie o rozkładzie dowolnej permutacji na cykle: „Każde podstawienie można uważać jako iloczyn podstawień okresowych“. Następnie zdefiniowano rząd podstawienia: „Rząd podstawienia, oznacza się przez najmniejszą wielokrotną tych liczb, które wyznaczają rząd okresów podstawień“ oraz twierdzenie: „Każde podstawienie można rozłożyć na czynniki pierwotne, to jest na takie czynniki, których rząd oznacza albo liczba pierwotna, albo potęga z liczby pierwotnej“ po czym następuje definicja podstawienia ujemnego oraz dodatniego – czyli permutacji parzystej oraz nieparzystej. Rozdział kończy fundamentalne twierdzenie o rozkładzie permutacji na transpozycje: „Każde dowolne podstawienie można rozłożyć na iloczyn z dwójek okresowych (Transpositionen)“.

Drugi rozdział zawiera wprowadzenie do teorii grup. Przytoczymy wybrane definicje i sformułowania twierdzeń. Rozdział rozpoczyna definicja *grupy*: „System podstawień, które taką mają własność, że przez mnożenie nie można otrzymać z nich nowe podstawienia, nazywamy podstawieniami zespolonymi albo grupą” oraz przykład: „Wszystkie potęgi dowolnego podstawienia utworzą grupę, to samo odnosi się do wszystkich $n!$ podstawień które z n głosek mogą być utworzone (grupa zupełna)”. Grupę składającą się z postawień zapisuje w postaci

$$G = (1, S_1, S_2 \ldots)$$

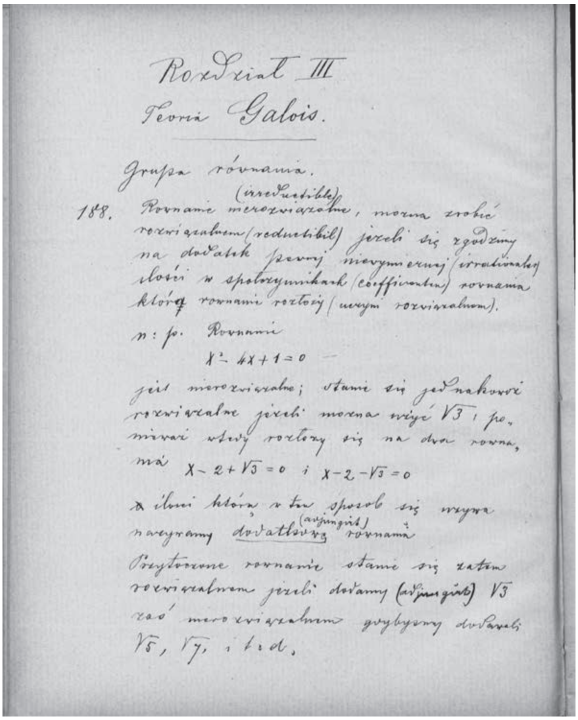
zdefiniowano rząd grupy oraz podano twierdzenie Lagrange’a o rzędzie: „Jeżeli grupa Γ μ-tego rzędu jest zwarta w grupie G m-tego rzędu, natenczas musi μ dzielić m”, twierdzenie: „Grupa której rząd p jest liczbą pierwotną zawiera tylko regularne podstawienia rzędu p (oprócz podstawienia 1). Jeżeli stopień tej grupy jest także p, natenczas grupa ta jest złożoną z p potęg okresowego podstawienia rzędu p. Kolejny paragraf nosi znaczący tytuł „O podstawieniach dających się przemienić na grupę”, znajdujemy tu definicję grupy prostej i złożonej „Grupa nazywa się *pojedynczą*, jeżeli nie

[13] Wprowadzone pojęcia i oznaczenia sugerują, że autor notatek korzystał z trzeciego wydania mongrafii Serreta.

zawiera w sobie żadnej grupy z którą by wszystkie jej podstawienia można było przemienić; w przeciwnym razie nazywamy taką grupę *złożoną*.“ Pewne zastosowania zawiera następny paragraf „O tworzeniu się kilku wyróżniających się grup”. Paragraf „Grupy na przemian zamienne (alterne)” to w istocie wprowadzenie grupy alternującej (wraz z informacją o jej rzędzie). Kolejny paragraf: twierdzenie Cauchy’ego: „Jeżeli p jest liczbą pierwotną, to można zawsze z k głosek utworzyć grupę, której rząd jest najwyższą potęgą p, a która się mieści w k!” W rozdziale znajduje się wiele szczegółowych twierdzeń określających związki grupy i jej podgrup, brak jednak twierdzeń Sylowa, co może potwierdzać fakt powstania notatek pod koniec lat 60. XIX wieku. Rozdział kończy wprowadzenie centrum grupy, indeksu grupy: „Pod *skaźnikiem* (index) grupy, rozumiemy liczbę, którą otrzymamy, jeżeli rząd zupełnej grupy podzielimy przez rząd grupy” oraz twierdzenia: „Skaźnikiem grupy zupełnej jest 1”, a na „przemian zamiennej [alternującej] jest 2” oraz ich zastosowań.

3.3 Rozdziały zasadnicze

Rozdział trzeci „Teoria Galois. Grupa równania”, który zawiera podstawy klasycznej teorii równań symetrycznych rozpoczyna informacja: „Równanie nierozwiązalne (irreductible), można zrobić rozwiązalnym (reductibil) jeżeli się zgodzimy na dodatek pewnej niewymiernej (irrationaler) ilości w współczynnikach (coefficienten) równania która równanie rozłoży (uczyni rozwiązalnym)”.



Rozdział III

Teoria Galois.

Grupa równania.

188. Rownanie nierozwiązalne (irreductible), można zrobić rozwiązalnem (reductibil) jeżeli się zgodzimy na dodatek pewnej niewymiernej (irrationaler) ilości w spółczynnikach (coefficienten) rownania którą rownanie rozłoży (uczyni rozwiązalnem).

n: p. Rownanie

$x^2 - 4x + 1 = 0$

jest nierozwiązalne; stanie się jednakowoż rozwiązalne jeżeli można wziąć $\sqrt{3}$, ponieważ wtedy rozłoży się na dwa rownania

$x - 2 + \sqrt{3} = 0$ i $x - 2 - \sqrt{3} = 0$

a ilości która w ten sposob się wzywa nazywamy dodatkową (adjungirt) rownania.

Przytoczone rownanie stanie się zatem rozwiązalnem jeżeli dodamy (adjungirt) $\sqrt{3}$ zaś nierozwiązalnem gdybyśmy dodawali $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, i t. d.

Rysunek 1: Pierwsza strona rozdziału "Teoria Galois"[14]

[14] Biblioteka Naukowa PAU i PAN, Rkps. 9505.

Jako przykład podano nierozwiązalne (w dziedzinie całkowitej) równanie $x^2 - 4x + 1 = 0$, które stanie się rozwiązalne jeżeli „można użyć” liczby niewymiernej i „wtedy rozłoży się na równania

$$x - 2 + \sqrt{3 = 0} \text{ i } x - 2 + \sqrt{3} = 0$$

ilość którą w ten sposób się używa nazywamy *dodatkową* (adjungrit sic!) równania.” Dalej czytamy: „Galois wykazał, że każdemu równaniu odpowiada pewna grupa podstawień, która jest charakterystyczną dla równania, albo może lepiej dla pewnej klasy równań, do których ona należy. Jeżeli są wiadome pewne własności pierwiastków jakiegoś równania, to można je użyć do wyszukania grupy równania. Odwrotnie zaś, jeżeli znamy grupę z jej własnościami możemy wyprowadzić przynależną klasę równań”. W dalszym ciągu omówiona została metoda uzyskania *rezolwenty* (zwanej *rozwiązką*) równania algebraicznego stopnia n oraz związki między pierwiastkami równania oraz jego rezolwenty: „każdy z tych pierwiastków [rezolwenty] można wyrazić jako wymierną funkcję dowolnego z pozostałych pierwiastków równania [...], że każdy pierwiastek równania jako wymierna funkcja każdego pierwiastka równania [rezolwety] może być przedstawiony”. Grupa Galois równania pojawia się na 80 stronie notatek, na kolejnych stronach zaś jej główne własności, które pominiemy przechodząc do najważniejszego twierdzenia tego rozdziału. Twierdzenie (numer 204) gdzie podane zostały warunki konieczne i dostateczne na to by równanie algebraiczne było rozwiązalne (przez pierwiastniki).

Rozdział czwarty: „Zastosowanie teorii Galois”, to klasyczne wyniki Abela oraz Galois, a odpowiednie paragrafy zatytułowano: „Równanie Abela”, „Równanie Galois”. W drugim paragrafie omówiono rezultat Galois o rozwiązalności równania algebraicznego stopnia który jest liczbą pierwszą, a którego pierwiastki dodatkowo związane są wymierną zależnością. Kolejne paragrafy czwartego rozdziału zostały napisane bardzo niestarannie. Znajdują się tu wybrane przykłady, o różnej roli w teorii rozwiązalności równań algebraicznych; są to na przykład „Równania, u których rząd grupy jest potęgą liczby pierwotnej” oraz „Równanie Hessa”. Pierwszy z nich dotyczy przypadku zupełnie ogólnego, drugi zaś równania dziewiątego stopnia, którego pierwiastki a i b pozostają z trzecim pierwiastkiem c w relacji:

$$c = \varphi(a;b) \quad b = \varphi(a;c) \quad a = \varphi(b;c),$$

gdzie φ jest symetryczną funkcją wymierną. Rozdział kończy paragraf: „Grupa zamknięta (monodromie gruppe) równania”.

4 Podsumowanie

Odnalezione zapiski mają duże znaczenie dla oceny recepcji teorii Galois przez polskich matematyków. Konieczne jest poddanie ich starannym badaniom, w tym grafologicznym w celu wyznaczenia autora notatek. Szczegółowe porównanie zawartości z monografiami Serreta, Jordana oraz innymi dziełami pozwoliłoby na dokładniejsze ocenienie czasu sporządzenie notatek.

Literatura

[1] Abel N. H.: *Démonstration de l’impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 65–96.

[2] Abel N. H.: *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*. Christiania, 1824.

[3] Bourbaki N. (Dieudonné J.): *Elementy historii matematyki*. PWN, Warszawa, 1980.

[4] Galois E.: *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. Journal de mathématiques pures et appliquées. Ser. 1, 11(1846), 417–433.

[5] Lagrange J. L.: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. In *Oeuvres de Lagrange*. Gauthier-Villars, Paris, 1869.

[6] Martini L.: *The First Lectures in Italy on Galois Theory: Bologna, 1886–1887*. Historia Mathematica 26(1999), 201–223.

[7] Neumann P. M.: *The editors and editions of the writings of Évariste Galois*. Historia Mathematica 39(2012), 211–221.

[8] Radloff I.: *Évariste Galois: Principles and applications*. Historia Mathematica 29(2002), 114–137.

[9] Rotman J.: *Galois theory. Second edition*. Springer UTX, New York, 1998.

[10] Ruffini P.: *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799.

[11] Serret J.-A.: *Cours d'algèbre supérieure*. Troisième edition, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

[12] *Teoria Galois*. Biblioteka Naukowa PAU i PAN, Rkps. 9505.

[13] Więsław W.: *Rozwój teorii równań algebraicznych*. In Matematyka XIX wieku. Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, pod redakcją Stanisława Fudalego, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 1988, 101–123.

[14] Więsław W.: *Teoria grup skończonych*. Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, 16(1996), 19–33.

[15] Wussing H.: *Die genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

[16] Wussing H.: *The Genesis of the abstract group concept*. MIT Press, Cambridge Mass., London, 1984.

Adres

Dr Danuta Ciesielska
Katedra Geometrii i Równań Różniczkowych
Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2
30–084 Kraków
POLSKA
e-mail: *dciesiel@up.krakow.pl*

ZÁKLADY GEOMETRIE V 20. STOROČÍ

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: The scientific production in the domain of the foundations of geometry was influenced decisively in the 20th century by the classical work *Grundlagen der Geometrie* written by David Hilbert. However the development in the subject, especially in the terminology of foundations, has contributed considerably to the improvement and completion of some gaps and lacks in the Hilbert's work. Besides this some interesting attempts were made to revive the original Euclid's method of finite geometrical objects.

1 Úvod

Akokoľvek bola vedecká aj didaktická tvorba v oblasti základov geometrie v 20. storočí dominantne ovplyvnená Hilbertovým klasickým dielom *Grundlagen der Geometrie* (1. vydanie 1899, 7. vydanie 1930), samo dielo vykazovalo určité nedokonalosti, ktoré boli v čase jeho zrodu a publikovania už v niektorých iných oblastiach matematiky prekonané. Predovšetkým teória množín, ktorá je hlavným metodologickým základom diela, bola v čase prípravy publikácie *Grundlagen* rozvinutá vo väčšej miere, než to publikácia odzrkadľuje. Čítanie diela dnešnými očami vzbudzuje dojem, že autor sa ostýchal, alebo nemal odvahu príliš rezolútne a revolučne rozlúčiť sa s terminológiou predošlého *predmnožinového* obdobia a že nechcel príliš príkro narušiť stáročiami ustanovenú tradíciu.

Niekoľko generácií autorov cizelovalo pôvodnú, za tridsať rokov samým Hilbertom len nepodstatne zmenenú a revidovanú formu vnášaním nových pojmov – objektov a relácií – ktoré sa na báze teórie množín utvorili v oblasti geometrie a naliehavo sa dožadovali svojho uvedenia do syntetickej geometrie v záujme zjednodušenia a spresnenia geometrického jazyka tak po stránke obsahovej, ako aj terminologickej.

Zámerom tohto krátkeho príspevku je podať stručnú informáciu o prínose niektorých autorov k (aspoň formálnej) modernizácii teórie základov geometrie.

2 Niekoľko ukážok

Hilbertova systemizácia axióm základov syntetickej (euklidovskej) geometrie na skupiny axióm incidencie, usporiadania, zhodnosti, rovnobežnosti a spojitosti zreteľne diferencovala relácie a vlastnosti základných objektov – bodov, priamok a rovín – a vytvorila základ pre definície ďalších obvyklých objektov elementárnej geometrie (úsečka, uhol, polpriamka, polrovina, mnohouholník, kružnica, kruh atď.) a pre rozvoj teórie, predmetom ktorej sa tieto objekty stali. Vývoj v oblasti teórie základov geometrie v druhej polovici 20. storočia a najmä v oblasti didaktickej transpozície do študijných programov vysokoškolských odborov so zastúpením výučby matematiky sa prevažne uberal inou cestou než uplatňovaním syntetických metód elementárnej geometrie vrcholiacim ucelenou axiomaticko-deduktívnou teóriou euklidovskej roviny a euklidovského priestoru. Táto tematika zostala v programe výchovy budúcich učiteľov matematiky a ani v tomto odbore sa nestretávala všade so žičlivým postojom. (Stačí si pripomenúť intenzívnu kampaň J. Dieudonného a jeho prívržencov proti geometrii v jej klasickom ponímaní vôbec a proti syntetickej geometrii špeciálne.) Všeobecne akceptovaná koncepcia vysokoškolskej výučby geometrie sa začínala prípravou prerekvizít v podobe lineárnej algebry vrcholiacou teóriou vektorových priestorov, pokračovala zavedením afinných priestorov v duchu Weylovej koncepcie a zavedením skalárneho a vektorového násobenia vektorov dospela k metrike, ktorou sa uzatváral analytický model n-rozmerného euklidovského priestoru. Syntetická interpretácia výsledkov, dôležitá najmä pre budúcich učiteľov matematiky, zostávala veľmi často (vo väčšine prípadov) na ochote a ľubovôli vyučujúcich tohto predmetu.

Napriek týmto tendenciám idea výstavby priestoru axiomaticko-deduktívnou metódou za použitia syntetických prostriedkov nezanikla a pomerne pravidelne sa objavovali – a aj v dnešnej dobe sa objavujú – nové publikácie, ktoré pokračujú v duchu základnej Hilbertovej myšlienky, pravda, s rešpektovaním obsahového a terminologického pokroku v tejto oblasti, často vychádzajúc z mierne odlišnej koncepcie množín základných prvkov a relácií. Okrem zjavne rozdielnych východiskových pozícií, berúcich za základ výstavby geometrie priestor afinný, či dokonca projektívny, značný počet prác sa vracia k pokusom, reprezentovaným v 19. storočí výrazne napr. Peanom a Pierim, oživiť a na strohý exaktný základ položiť Euklidom intuitívne používaný a axiomaticky neošetrený pojem *pohybu* ako základu relácie zhodnosti.

Tejto a ďalšej súvisiacej tematiky sa týkajú nasledovné poznámky.

2.1 Incidencia a usporiadanie

Väčšina nasledujúcich citovaných prameňov sa v zavádzaní relácií incidencie a usporiadania (reláciou *„medzi“*) neveľmi odlišuje od Hilbertových formulácií. Odlišné východiskové pozície reprezentujú publikácie [1] a [2], ktoré sa začínajú syntetickou axiomatikou afinných priestorov, a publikácie [3], [10], v ktorých sú na rozdiel od Hilberta priamky a roviny chápané ako *podmnožiny množiny* všetkých *bodov* priestoru.

2.2 Zhodnosť a pohyby

Axiómy zhodnosti v Hilbertovej monografii [4] majú existenčný a relatívne statický charakter. Napr. v štvrtej axióme (o jednoznačnom „prenose“ uhla do danej polroviny s jedným ramenom na polpriamke hraničnej priamky) niet nijakej zmienky o „mechanizme“ premiestnenia. O dynamizmus v tematike zhodnosti sa usilujú – prinajmenšom terminológiou operujúcou pojmami spojenými v prirodzenom jazyku s pohybom – tie axiomatické založenia zhodnosti, ktoré za primárny nedefinovaný pojem v problematike zhodnosti vyberajú *pohyb*. Keďže v každom sledovanom axiomatickom systéme množina všetkých pohybov vzhľadom na definovanú operáciu skladania bude tvoriť grupu, približujú sa tieto systémy existenciou grupy pohybov k splneniu požiadavky, aby priestor bodov s grupou transformácií (= pohybov) tvoril geometrický priestor v zmysle Kleinovej požiadavky na geometrický priestor.

Na báze pojmu *pohyb* je zhodnosť vybudovaná v položkách [3], [6], [7], [8], [10] a implicitne je táto možnosť obsiahnutá aj v [9]. Publikácia [7] obsahuje ako prvú v poradí aj Hilbertovu axiomatiku zhodnosti. Knihy [1] a [2] vzhľadom na odlišnosť výstavby množín základných objektov (afinný priestor) pristupujú odlišne aj k budovaniu pojmu zhodnosť, a to v prípade [1] axiomatikou v princípe podobnou Hilbertovej, v prípade [2] je táto tematika alternatívne veľmi zoširoka vyložená koncepciou pohybov.

Didakticky najprístupnejšie je tematika pohybu podaná v prameni [6], ktorý možno podľa obsahu a formy charakterizovať ako vysokoškolskú učebnú pomôcku vyššej náročnosti. Dátumom vydania (1948) azda možno vysvetliť absenciu priliehavejších modernejších termínov z teórie množín a ich zobrazení, ako aj odlišné názvy objektov, ktorých terminológia sa ustálila o 15 – 20 rokov neskôr. Pohyby (v knižke [10] od začiatku nazývané *izometriami*) sú definované ako *lineárne bijektívne zobrazenia* množiny všetkých bodov priestoru na seba, zachovávajúce *incidenciu* a *usporiadanie*. Tieto zobrazenia tvoria grupu. Ďalšou požiadavkou na pohyb v rovine je prevod *zástavy* na *zástavu*, a to buď súhlasnej alebo opačnej orientácie. (Zástavou sa nazýva polrovina s vyznačenou polpriamkou na svojej hraničnej priamke. Je pozoruhodné, že s týmto pojmom pod iným názvom pracovali už autori diel [6] a [8]: Kostin nazýva zástavu *repérom*, Vyšín ju nazýva *zárezom*.)

2.3 Spojitosť

V prvom vydaní *Grundlagen* v skupine axióm spojitosti Hilbert uviedol len Archimedovu axiómu, ktorá nezaručuje spojitosť v zmysle ekvivalencie s množinou všetkých reálnych čísel. Na upozornenie túto axiómu doplnil axiómou *úplnosti*, ktorú neskôr pozmenil na axiómu *lineárnej úplnosti*; v tejto podobe figuruje v 7. vydaní, poslednom za Hilbertovho života.

Väčšina sledovaných prameňov – samozrejme okrem [4] a okrem neho [10], ktorý sa otázkou spojitosti explicitne nezaoberá – rieši zavedenie spojitosti uvedením Dedekindovej axiómy. Niektoré z prameňov ([5], [6], [8] uvádzajú ako dôsledok Archimedov výrok, [7] ukazuje ekvivalenciu Dedekindovej axiómy s Archimedovým výrokom a Cantorovým výrokom o nekonečnej postupnosti vložených úsečiek. Tento posledný výrok je axiómou spojitosti v [12].

Citované diela klasického razenia ([5] [6], [7], [8], [11]) venujú náležitú pozornosť výkladu absolútnej geometrie a primerane rozsiahlym systematicky uceleným informáciám o euklidovskej geometrii a Lobačevského-Bolyaiovej hyperbolickej geometrii. Dielo [3] sa s touto tematikou vyrovnáva analyticky v rámci teoretickejšieho komplexu geometrií rôznych od geometrie euklidovskej.

2.4 Revitalizácia Euklida

Knižka [12] je ukážkou exaktného budovania syntetickej rovinnej geometrie v duchu Euklidovho chápania bodov, úsečiek a ohraničených rovinných útvarov. Axiomatizáciu autor zabezpečuje skupinami axióm *štruktúry, konštrukcie, merania, rovnobežnosti* a *spojitosti*. Táto posledná axióma je jediný prípad, kde sa autor nevyhne použitiu aktuálneho nekonečna. Rozsah tohto príspevku neumožňuje podrobnejšiu informáciu o sofistikovaných spôsoboch prekonávania ťažkostí spôsobených absenciou bežných pojmov používaných v hilbertovskej koncepcii, založených na aktuálnom nekonečne.

3 Záver

Základy geometrie sú aj na začiatku 21. storočia živou a aktuálnou disciplínou, pred ktorou stojí niekoľko naliehavých teoretických úloh s ešte naliehavejšou potrebou transformovať ich úspešné vyriešenie do didaktickej praxe sekundárnych a vysokých škôl. Bolo by užitočné, keby riešenie týchto problémov trochu považovali za svoju úlohu nielen pracovníci v odbore geometrie a učitelia všetkých stupňov škôl, ale aj všetci príslušníci matematickej obce.

Literatúra

[1] Lenz H.: *Grundlagen der Elementarmathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.

[2] Müller H.: *Einführung in die euklidische Elementargeometrie*. Libri Books on Demand, Hamburg, 2000.

[3] Rédei L.: *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.

[4] Hilbert D.: *Grundlagen der Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1930.

[5] Borsuk K., Szmielew W.: *Podstawy geometrii*. Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1955.

[6] Kostin V. I.: *Osnovanija geometrii*. Gosudarstvennoje učebno-pedagogičeskoje izdatelstvo ministerstva prosveščenija RSFSR (Učpedgiz), Moskva, 1948.

[7] Svitek V.: *Logické základy geometrie*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1969.

[8] Vyšín J.: *Elementární geometrie I (Planimetrie)*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.

[9] Böhm J., Börner W., Hertel E., Krötenheerdt O., Mögling W., Stammler L.: *Geometrie (I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie)*. Studienbücherei, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.

[10] Doneddu A.: *Géométrie euclidienne plane*. Dunod, Paris, 1965.

[11] Hartshorne R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, New York – Berlin – Heidelberg, 2000.

[12] Alexandrov, A. D.: *Osnovanija geometrii*. Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1987.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná ul. 4
P.O.Box 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: *jan.cizmar@truni.sk*, *Jan.Cizmar@fmph.uniba.sk*

CZTERY DOKTORATY Z MATEMATYKI UZYSKANE PRZEZ POLAKÓW WE FRANCJI PRZED 1939 R.

STANISŁAW DOMORADZKI

Abstract: In this article, a reference is made to four math doctorates earned by Poles at the University of Paris since the late nineteenth century to 1939: S. Zaremba (1899), Z. Janiszewski (1911), T. Ważewski (1924) and M. Biernacki (1928). At the beginning of the twentieth century, Zaremba and K. Żorawski introduced the first Polish center of modern mathematics in Cracow. Janiszewski presented the concept of the Polish School of Mathematics. Ważewski created the Cracow School of Differential Equations and Biernacki is considered one of the founders of the Polish School of Complex Analysis.

1 Wstęp

1.1 Krótko o relacajch matematyków polskich z Francją

Relacje matematyków polskich z Francją nasiliły się, kiedy Polska nie miała własnej państwowości, była bowiem rozdzielona pomiędzy trzech zaborców: Austro-Węgry, Rosję i Prusy. W 1832 r., po powstaniu listopadowym, w zaborze rosyjskim zamknięto polskie ośrodki pracy naukowej (w tym Uniwersytet Warszawski, Uniwersytet Wileński). Nieliczne działające towarzystwa naukowe, szczególnie w zaborze austriackim, jak Towarzystwo Naukowe Krakowskie (od 1872 r. działała Akademia Umiejętności w Krakowie) starały się nadal organizować pracę naukową w kraju. Natomiast bardzo wielu Polaków musiało opuścić ojczyznę. W Paryżu znalazły się całe polskie rodziny, którym należało umożliwić naukę w zakresie średnim i wyższym. Z inicjatywy Adama Jerzego Czartoryskiego powstała w Paryżu po 1848 roku Wyższa Szkoła Polska, głównie dla młodych Polaków (od 17 do 25 lat) przebywających na emigracji, ale też tych, którzy zamierzali kontynuować edukację. Wyższa Szkoła Polska w Paryżu przygotowywała absolwentów do studiowania w wybranych uczelniach Paryża, np. do Szkoły Dróg i Mostów. Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu istniało w latach 1870–1882, miało ono znaczenie dla emigracji polskiej we Francji. Ze względu na otwarcie łamów *Pamiętnika*, swojego czasopisma, Towarzystwo miało duże znaczenie dla matematyków polskich w całej Europie, a w konsekwencji dla rozwoju matematyki polskiej w ogólności. Oprócz wymienionego wyżej Towarzystwa w Paryżu i ośrodkach naukowych na ziemiach polskich, we Lwowie, Krakowie, Warszawie, funkcjonowały również w XIX w. i na początku XX w. ośrodki polskiego życia matematycznego m.in. w Petersburgu, Moskwie, Odessie czy Charkowie.

2 Doktoraty z matematyki

2.1 Faculté de Sciences de l'Université de Paris

W artykule odniesiemy się do doktoratów matematycznych uzyskanych przez Polaków na Faculté de Sciences de l'Université de Paris: S. Zaremby z 1899 r., Z. Janiszewskiego z 1911 r., T. Ważewskiego z 1924 r. i M. Biernackiego z 1927 r.

2.2 Stanisław Zaremba (1863–1942)

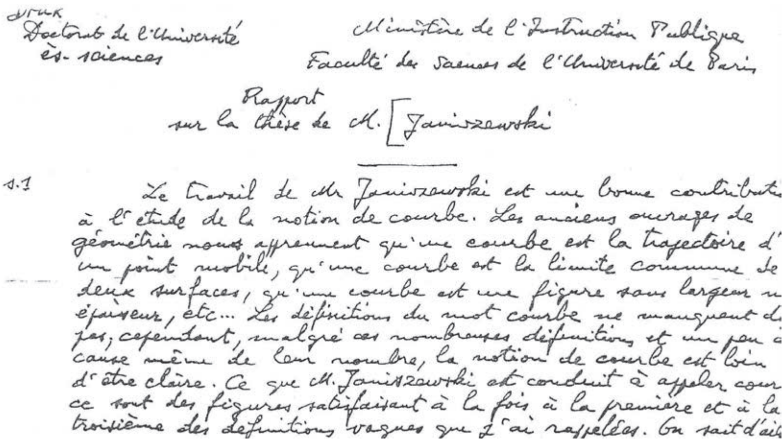
Doktorat Zaremby przedstawiony został m.in. w pracach (Domoradzki 2011, 2012; Pelczar 2010). Zaremba w 1888 roku uzyskał stopień licencjata (de Licence ès sciences mathématiques) na Uniwersytecie w Paryżu. Pod koniec 1889 r. obronił rozprawę doktorską *Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps homogène indéfini* i otrzymał dyplom „de Docteur ès sciences mathématiques”. Recenzje napisali Charles Émile Picard (1856–1941) i Gaston Darboux (1842–1917), ich treści przedstawione są w wymienionych wyżej pracach. Nazwa „dyplom doktora nauk matematycznych” jest istotna, bo jak zauważył G. Darboux: „Wydział, co naturalne, przyjmuje zawsze z trochę większą wyrozumiałością prace, które są mu przedstawiane przez studentów obcokrajowców. Pan Zaremba nie skorzystał z tej możliwości. Jego teza byłaby przyjęta we wszystkich przypadkach, nawet przedstawiona przez Francuza.” Często dla cudzoziemców rezerwowany był „Doctorat de l’Université”. Podkreślmy, że Zaremba wespół z K. Żorawskim stworzył w Krakowie pierwszy na ziemiach polskich nowoczesny ośrodek matematyczny.

2.3 Zygmunt Janiszewski (1888–1920)

Z. Janiszewski urodzony w Warszawie, maturę zdał w I Szkole Realnej we Lwowie. Studiował za granicą, semestr zimowy 1907/08 na Politechnice w Zurychu, potem odbywał studia uniwersyteckie w Getyndze (semestr letni 1908), w Paryżu (rok akademicki 1908/09), w Monachium (1909/10, semestr zimowy),w Getyndze (semestr letni 1910), w Paryżu (rok akademicki 1910/11), w Strasburgu (semestr letni 1912), w Grazu (semestr letni 1913). Doktoryzował się na podstawie pracy: *Sur les continus irréductibles entre deux points* i otrzymał stopień „Doctorat de l’Université”. Z dokumentów wynika, że Janiszewski zdał połowę egzaminów licencjackich na pierwszym i drugim roku, co nie przeszkadzało mu się doktoryzować w 1911 roku, promocja odbyła się 17 czerwca wspomnianego roku.

W dniu 10 lipca 1913 roku Zygmunt Janiszewski dostał mianowanie na stanowisko asystenta w „zwyczajnej katedrze matematyki profesora Józefa Puzyny na czas od 1 października 1913 do 30 września 1915 roku“ we Lwowie. Grono profesorów (rada wydziału) udzieliło mu na posiedzeniu 11 lipca 1913 r. veniam legendi, czyli prawa wykładania matematyki na Uniwersytecie Lwowskim. Następnie to samo gremium zwróciło się do Ministerstwa Wyznań i Oświecenia w Wiedniu z wnioskiem o zatrudnienie. Janiszewski starał się o nostryfikację we Lwowie dyplomu doktorskiego z Paryża, pierwszy raz w końcu. 1914 (pismo zaginęło), drugie pismo dotyczące nostryfikacji pochodzi z czerwca 1916 r., następne z 1917 r. jest pismem kończącym pozytywnie sprawę nostryfikacji. Przed przybyciem do Lwowa w r. a. 1911/12 wykładał w Towarzystwie Kursów Naukowych – namiastce polskiego uniwersytetu w Warszawie (wtedy funkcjonował Carski Uniwersytet i Instytut Politechniczny im. Cara Mikołaja II) następujące przedmioty: Analysis situs i Filozofię matematyki, a we Lwowie: Teorię funkcji analitycznych, (1914, semestr letni, 3 godziny w tygodniu), Rachunek funkcyjny (2 godziny w tygodniu). Janiszewski brał czynny udział w I wojnie światowej, co miało wpływ jego działalność naukową i dydaktyczną. Janiszewski w szeroko znanym artykule O potrzebach matematyki w Polsce sugerował „zdobycie samodzielnego stanowiska dla matematyki polskiej”. Do dziś uderza oryginalność i finezja wizji Janiszewskiego, który wybrał teorię mnogości i jej zastosowania jako jedną dziedzinę matematyki, który umiał wytworzyć atmosferę pracy zespołowej, powołać do życia specjalistyczne czasopismo – Fundamenta Mahematicae, pierwszy tom ukazał się w 1920 r., niestety już po przedwczesnej śmierci Janiszewskiego. Warto podkreślić, że wybrana tematyka związana z teorią mnogości stanowiła obszar zainteresowań grupy lwowskiej, tj. W. Sierpińskiego, Z. Janiszewskiego, S. Mazurkiewicza (ci związali się zawodowo z Warszawą), potem S. Ruziewicza (pozostał we Lwowie, był profesorem Uniwersyetu Jana Kazimierza).

Janiszewski w pracy doktorskiej rozważał pojęcie kontinuum nierozkładalnego między dwoma punktami jako wersję pojęcia krzywej łączącej te punkty. Okazuje się jednak, że krzywe nierozkładalne mogą mieć dość skomplikowaną budowę, dla przykładu mogą zawierać część powierzchni. Ważną własnością jest, że każde kontinuum łączące dwa punkty zawiera kontinuum nierozkładalne między tymi punktami. Recenzent zwrócił uwagę na jasność wykładu matematycznego Janiszewskiego, mimo że język francuski nie zawsze był poprawny. Taki skrupulatny styl jest charakterystyczny również dla innych prac Janiszewskiego.


Druk
Doctorat de l'Université
ès-sciences

Ministère de l'Instruction Publique
Faculté des Sciences de l'Université de Paris

Rapport
sur la thèse de M. [Janiszewski

1.1
Le travail de M. Janiszewski est une bonne contributi
à l'étude de la notion de courbe. Les anciens ouvrages de
géométrie nous apprennent qu'une courbe est la trajectoire d'
un point mobile, qu'une courbe est la limite commune de
deux surfaces, qu'une courbe est une figure sans largeur n
épaisseur, etc… Les définitions du mot courbe ne manquent d
pas, cependant, malgré ces nombreuses définitions et un peu à
cause même de leur nombre, la notion de courbe est loin
d'être claire. Ce que M. Janiszewski est conduit à appeler cour
ce sont des figures satisfaisant à la fois à la première et à la
troisième des définitions vagues que j'ai rappelées. On sait d'ail

Rys. 1
Pierwsza strona recenzji przepisana z oryginału z Centralnego Archiwum Francji przez prof. Daniela Beauvois

„Praca p. Janiszewskiego jest dobrym przyczynkiem do studium pojęcia krzywej. Stare dzieła z geometrii pouczają nas, że krzywa jest trajektorią ruchomego punktu, że krzywa jest wspólną granicą dwóch powierzchni, że krzywa jest figurą bez szerokości i grubości, itd. Określeń słowa krzywa nie brakuje, jednak, pomimo tych licznych określeń, a nawet ze względu na ich liczbę, pojęcie krzywej dalekie jest od jasności. Co p. Janiszewski ostatecznie nazywa krzywą są to figury spełniające pierwsze i trzecie z niejasnych określeń, które proponowałem. Wiadomo zresztą, że wówczas, zgodnie z twierdzeniem p. Jordana, te z figur, o których mowa, które są płaskie, spełniają również drugie określenie.

Wychodząc od zbiorów punktów, które p. Cantor nazywa kontinuami, p. Janiszewski zapytuje się, jakie są najprostsze kontinua. Dochodzi w ten sposób do bardzo ważnego pojęcia, pochodzącego od p. Zoretti, kontinuum nierozkładalnego między punktami *A* i *B*. Takie kontinuum, niezawierające punktów wewnętrznych, jest tym, co nazywa się niekiedy krzywą cantorowską. Ale ta nazwa jest łudzącą, bo p. Janiszewski pokazuje, że kontinuum nieprzywiedlne między dwoma punktami może zawierać część powierzchni lub nieskończoną liczbę sfer, lub dowolny zbiór ciągły płaski, jeżeli to kontinuum płaskie nieprzywiedlne jest wzięte w przestrzeni trójwymiarowej. Trzeba więc dokonać wyboru wśród kontinuów nieprzywiedlnych: oto rodzaj rozważań, które zajmują p. Janiszewskiego.”[1]

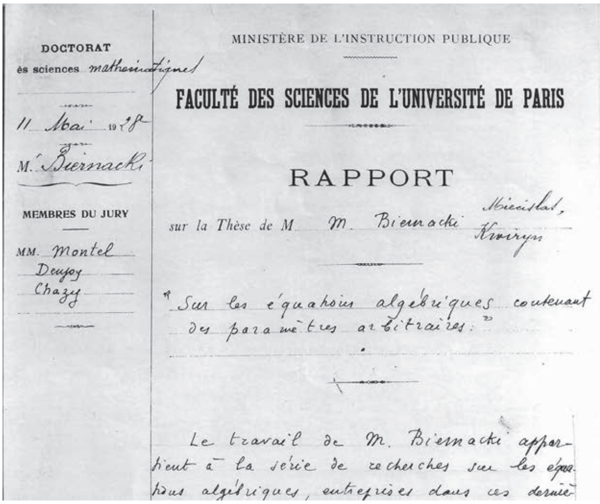
Jeszcze podamy fragment recenzji, który charakteryzuje jasny styl wykładu matematycznego Janiszewskiego:

„Dowodzi najpierw, że między dwoma dowolnymi punktami *A* i *B* kontinuum $\mathscr{L}$ jest zawsze kontinuum $\mathscr{L}_1$ nieprzywiedlne między *A* i *B* i stanowiące część $\mathscr{L}$. Z założenia, że $\mathscr{L}$ jest nieprzywiedlne między dwoma punktami *L* i *M* nie wynika bynajmniej, że $\mathscr{L}_1$ jest jedyne przy każdym wyborze *A* i *B*. Dorzucając warunek, żeby $\mathscr{L}_1$ było jedyne, zbliżamy się oczywiście do zwykłych krzywych; $\mathscr{L}$ jest łukiem krzywej ograniczonym przez *A* i *B*. Niestety, zdarza się czasami, że kiedy *A* i *B* zmieniają się w sposób dogodny, $\mathscr{L}$ się nie zmienia. Innymi słowy zakładaliśmy, że przy zadanych końcach łuku *A* i *B* łuk jest dobrze określony, ale nie wynika stąd, że kiedy łuk jest zadany, to jego końce są dobrze określone.”

2.4 Mieczysław Biernacki (1891–1959)

Biernacki w 1909 ukończył Szkołę Filologiczną im. S. Staszica w Lublinie i rozpoczął studia chemiczne na UJ. W 1911 został relegowany z uczelni za udział w studenckiej akcji protestacyjnej przeciw powierzeniu katedry na Uniwersytecie Jagiellońskim ks. K. Zimmermannowi. Studia, tym razem matematyczne, kontynuował w Paryżu, przerwał je po wybuchu I wojny światowej, wstąpił wtedy jako ochotnik do wojska francuskiego. Walczył długo, był dwukrotnie ranny, do kraju powrócił z armią Hallera, uczestniczył w wojnie polsko-bolszewickiej. Wyjechał ponownie na studia do Paryża i w 1923 ukończył na Uniwersytecie Paryskim studia matematyczne, uzyskał stopień licencjata nauk matematycznych (jego znaczenie było większe niż magisterium w Polsce, mniejsze niż doktoratu). W 1928 tamże uzyskał stopień doktora (dyplom „Doctorat ès sciences mathématiques”), na podstawie pracy Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires przed komisją, w której zasiadali światowej klasy matematycy francuscy: Paul Antoine Montel (późniejszy przyjaciel Biernackiego), Arnaud Denjoy, Jean François Chazy. Okazjonalnie korzystał z pomocy finansowej M. Skłodowskiej-Curie. Po powrocie do Polski przed wybuchem II wojny światowej pracował na Uniwersytecie Stefana Batorego w Wilnie i Uniwersytecie Poznańskim. Po wysiedleniu z Poznania przez Niemców lata wojny spędził w Lublinie, udzielając bezinteresownie lekcji matematyki, z których korzystali m.in późniejsi profesorowie matematyki. W 1944 zorganizował Katedrę Matematyki w nowo powstałym Uniwersytecie Marii Curie-Skłodowskiej i został mianowany profesorem tej uczelni. Połowa dorobku naukowego Biernackiego poświęcona jest zagadnieniom z teorii funkcji analitycznych, zajmował się również badaniem wielomianów zwykłych i trygono-metrycznych, zwłaszcza rozmieszczeniem ich miejsc zerowych, teorią równań różniczkowych i innymi działami analizy matematycznej. Wprowadził m.in.: w 1946 ważne pojęcie funkcji średnio p-krotnej, które było wykorzystywane w światowych monografiach, czy też w 1936 klasę (L) funkcji liniowo-osiągalnych. Jej znaczenie polega na tym, że okazała się ona identyczna z wprowadzoną w 1952 przez W. Kaplana klasą funkcji prawie-wypukłych. Uogólnił w klasycznej teorii wielomianów twierdzenie Landaua. Uważany jest za twórcę Lubelskiego Ośrodka Matematycznego i za jednego z twórców polskiej szkoły analizy zespolonej. W 1957 na Kongresie Matematyków w Helsinkach referował osiągnięcia polskich matematyków w tej dziedzinie (*Sur les travaux de la théorie de fonctions en Pologne*).

[1] Składam serdeczne podziękowania Panu Prof. A. Schinzlowi z Instytutu Matematycznego PAN za nieocenioną pomoc przy odczytaniu i tłumaczeniu francuskich recenzji.



DOCTORAT
ès sciences mathématiques

11 Mai 1928

M. Biernacki

MEMBRES DU JURY

MM. Montel
Denjoy
Chazy

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

RAPPORT

sur la Thèse de M. M. Biernacki Mieczysław, Kwiryn

"Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires."

Le travail de M. Biernacki appartient à la série de recherches sur les équations algébriques, entreprises dans ces derniè

Rys. 2
Fragment pierwszej strony recenzji pracy doktorskiej M. Biernackiego napisanej przez P. Montela (Archiwum Narodowe Francji)

„Praca p. Biernackiego należy do serii badań nad równaniami algebraicznymi, podjętych w ostatnich latach. Korzysta z niedawnych postępów w analizie, które w rękach pp. Polyi, Schura, Szegö, Walsha, Kakeya, itd. dały ważne wyniki.

Problemy, które p. Biernacki sobie postawił, są trudne i rozmaite, nie mogą być rozwiązane przez jednolite metody i autor musiał więc użyć różnych sposobów, często bardzo zręcznych, z których każdy z osobna jest interesujący.

Pierwsza część badań związana jest z pracami p. Montela o równaniach typu:

$$1 + x^p + a_1x^{n_1} + \cdots + a_kx^{n_k} = 0, \ (p < n_1 < \cdots < n_k).$$

Istnieje zawsze *p* pierwiastków, których moduł nie przekracza ustalonej liczby, zależnej tylko od liczby wyrazów wielomianu, tzn. od *k*. Pan Biernacki, ustaliwszy stopnie $p, n_1, \dots, n_k$ dowodzi, przez bardzo subtelne badanie przemieszczania się pierwiastków wraz z współczynnikami wykazujące że równanie ma *p* pierwiastków, których moduły nie przekraczają $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\frac{n_2}{n_2-p}\cdots\frac{n_k}{n_k-p}}$. Otrzymuje na tej drodze różne uogólnienia, w szczególności w przypadku badanym przez p. van Vlecka, gdzie wielomian nie zawiera luk. Przeprowadza pogłębione badanie własności modułów oraz argumentów trójmianów i czwórmianów według zmian argumentów tych wielomianów wzdłuż pewnych kontinuów.

[…] Druga część pracy poświęcona jest badaniom wielolistności wielomianów. […] Autor podaje również twierdzenie dotyczące wielolistności wielomianu, iloczynu czynników, których wielolistność jest znana. W trzeciej części rozprawy autor zajmuje się lokalizacją zer pochodnej wielomianu lub ułamka wymiernego, kiedy są wskazówki co do położenia zer i biegunów funkcji pierwotnej. Znajdujemy się w kręgu idei twierdzenia Gaussa-Lucasa i p. Walsha. […] Rozprawa przedłożona Wydziałowi dowodzi u p. Biernackiego szczęśliwej wyobraźni połączonej z duża przenikliwością, jego dowody zostały przedstawione z werwą i wytrwałością. Całość opiera się na bardzo rozległej znajomości algebry i analizy. Wyniki są godne uwagi przez ich precyzję i prostotę. W sumie, piękna praca, która przynosi duży zaszczyt autorowi i która wydaje się całkowicie godna przyjęcia jako teza doktorska”

Praca i obrona uzyskały ocenę bardzo zaszczytną.

2.5 Tadeusz Ważewski (1896–1972)

T. Ważewski urodził na Kresach, w przedwojennym województwie tarnopolskim, potem uczęszczał do kilku gimnazjów galicyjskich, maturę uzyskał w I Gimnazjum w Tarnowie. W latach 1914–1920 studiował na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Rozpoczął od studiowania fizyki, a następnie pod wpływem S. Zaremby rozpoczął studia matematyczne.

Ważewski w Krakowie, co warte jest szczególnego podkreślenia, zainteresował się teorią mnogości i topologią. W latach 1921–1923 Ważewski studiował na Uniwersytecie w Paryżu, gdzie w 1924 r. uzyskał doktorat na podstawie rozprawy *Sur le courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*, która dotyczyła dendrytów (kontinuów lokalnie spójnych, niezawierających zamkniętych krzywych pojedynczych). Habilitował się w roku 1927 na Uniwersytecie Jagiellońskim, przedstawiając rozprawę o kontinuach prostowalnych.

Następne prace Ważewskiego dotyczyły niemal wyłącznie analizy matematycznej, w szczególności równań różniczkowych. Topologia znajdowała w niektórych z nich ważne i nieoczekiwane zastosowania.

Aresztowany 6 listopada 1939 r. podczas hitlerowskiej represyjnej Sonderaktion Krakau był więziony wraz z innymi profesorami Uniwersytetu Jagiellońskiego i Akademii Górniczej w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen. Prowadził tajne uniwersyteckie seminarium matematyczne, wielu matematyków uczestniczyło w nim i prezentowało rezultaty badań naukowych.

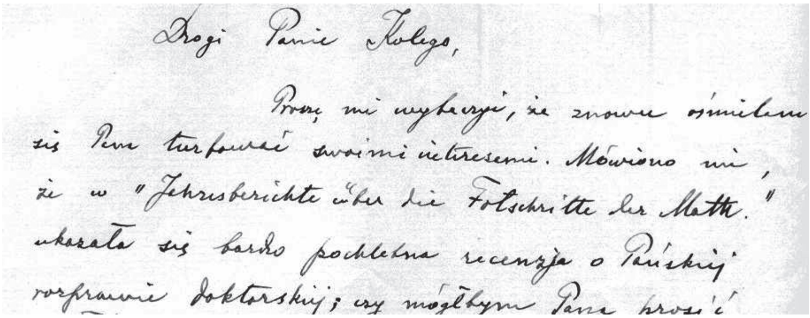
Po II wojnie światowej został członkiem korespondentem Polskiej Akademii Umiejętności oraz Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a po powstaniu Polskiej Akademii Nauk został powołany w poczet jej członków (członek zwyczajny 1958).spacja W 1948 r. otrzymał nagrodę Polskiego Towarzystwa Matematycznego im. S. Zaremby za słynny wynik znany dzisiaj jako Twierdzenie retraktowe Ważewskiego. Obecnie jedna z głównych nagród naukowych PTM nosi jego imię. Żeby zrozumieć jak ważną rolę przypisywał matematyce, zacytujemy fragmenty wywiadu, jakiego udzielił *Dziennikowi Literackiemu* (I’1949) po otrzymaniu „Nagrody Ziemi Krakowskiej”: „Przyznanie jednej z tegorocznych nagród Ziemi Krakowskiej matematykowi uważam za zaakcentowanie znaczenia ważności matematyki w życiu. Społeczeństwo nie zdaje sobie często sprawy ze znaczenia matematyki. A tymczasem cała przyroda ma oblicze matematyczne. Bez matematyki nie można by dokładnie ująć ilościowo praw przyrody. Szybki rozwój techniki datuje się dopiero od chwili wynalazku rachunku różniczkowego i całkowego. (…) Potrzeby fizyki i techniki wysuwają ustawicznie zagadnienia, do których rozwiązania potrzeba nowych środków matematycznych.”

Członkami doktorskiej komisji egzaminacyjnej byli: Emilé Borel, Arnaud Denjoy i Paul. Montel.

Poniżej zamieszczamy:

- fragment listu S. Zaremby do T. Ważewskiego, w którym zapytuje się o obronę i wspomina pochlebną recenzję doktoratu w czasopiśmie *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*;
- fragment dyplomu doktorskiego;
- zaświadczenie o nostryfikacji dyplomu doktorskiego T. Ważewskiego na Uniwersytecie Jagiellońskim.

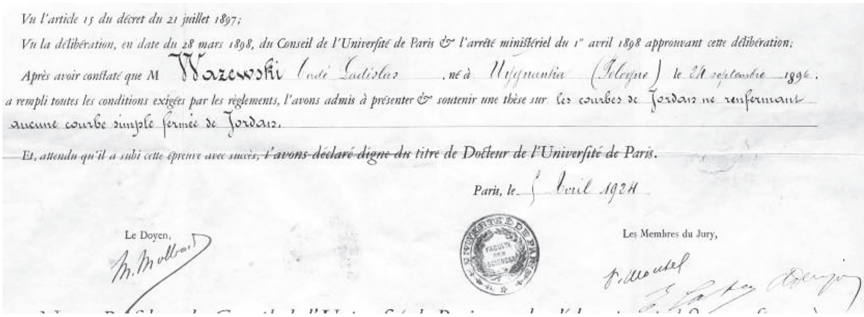
Szerzej o Ważewskim można przeczytać w pracach jednego z jego wybitnych uczniów Andrzeja Pelczara (1935–2010) (Pelczar, 2000, 2011).



Drogi Panie Kolego,

Proszę mi wybaczyć, że znowu ośmielam się Pana turbować swoimi interesami. Mówiono mi, że w "Jahresberichte über die Fortschritte der Math." ukazała się bardzo pochlebna recenzja o Pańskiej rozprawie doktorskiej; czy mógłbym Pana prosić

Rys. 3
Fragment listu S. Zaremby do T. Ważewskiego



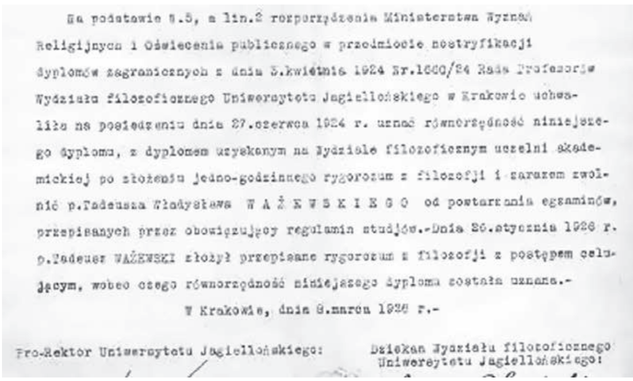
Vu l'article 15 du décret du 21 juillet 1897;
Vu la délibération, en date du 28 mars 1898, du Conseil de l'Université de Paris & l'arrêté ministériel du 1er avril 1898 approuvant cette délibération;
Après avoir constaté que M Wazewski Tadé Ladislas, né à Wygnanka (Pologne) le 24 septembre 1896,
a rempli toutes les conditions exigées par les règlements, l'avons admis à présenter & soutenir une thèse sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan.
Et, attendu qu'il a subi cette épreuve avec succès, ~~l'avons déclaré digne du~~ titre de Docteur de l'Université de Paris.

Paris, le 5 avril 1924

Le Doyen,

Les Membres du Jury,

Rys. 4
Fragment dyplomu doktorskiego T. Ważewskiego



Na podstawie §.5, a lin.2 rozporządzenia Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia publicznego w przedmiocie nostryfikacji dyplomów zagranicznych z dnia 5.kwietnia 1924 Nr.1660/24 Rada Profesorów Wydziału filozoficznego Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie uchwaliła na posiedzeniu dnia 27.czerwca 1924 r. uznać równorzędność niniejszego dyplomu, z dyplomem uzyskanym na Wydziale filozoficznym uczelni akademickiej po złożeniu jedno-godzinnego rygorozum z filozofji i zarazem zwolnić p.Tadeusza Władysława W A Ż E W S K I E G O od powtarzania egzaminów, przepisanych przez obowiązujący regulamin studjów.-Dnia 26.stycznia 1926 r. p.Tadeusz WAŻEWSKI złożył przepisane rygorozum z filozofji z postępem celującym, wobec czego równorzędność niniejszego dyplomu została uznana.-

W Krakowie, dnia 8.marca 1926 r.-

Pro-Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego:

Dziekan Wydziału filozoficznego Uniwersytetu Jagiellońskiego:

Rys. 5
Nostryfikacja dyplomu doktorskiego T. Ważewskiego na Uniwersytecie Jagiellońskim
(Archiwum UJ)

Literatura

[1] Archiwum PAN i PAU w Krakowie: *Materiały prof. T. Ważewskiego*.

[2] Archiwum UJ: *Teki osobowa, doktorska, nostryfikacyjna, habilitacyjna T. Ważewskiego*.

[3] Archiwum Narodowe Francji: *Doktoraty Z. Janiszewskiego i M. Biernackiego*.

[4] Archiwum Obwodowe we Lwowie: *Teka osobowa Z. Janiszewskiego*.

[5] Duda R.: *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2013.

[6] Domoradzki S: *Rola Stanisława Zaremby* (*1863–1942*) *w kształtowaniu się nowoczesnego ośrodka matematycznego w Krakowie*. In Bečvář J., Bečvárová M. (ed.): *32. mezinárodní konference Historie matematiky*, Matfyzpress, Praha, 2011, s. 179–188.

[7] Domoradzki S: *The Growth of Mathematical Culture in the Lvov Area in the Autonomy Period*. Edition History of Mathematics, vol. 47, Matfyzpress, Prague, 2011.

[8] Domoradzki S.: *Stanisław Zaremba* (1863–1942). *Fragmenty biografii w 120-lecie doktoratu*. Prace Komisji Historii Nauki PAU, t. XI, Kraków, 2012, s. 79–102.

[9] Krzyż J.: *Mieczysław Biernacki 30.03.1891–21.11.1959*. Wiadomości Matematyczne 5(1962), s. 1–14.

[10] Materiały z sesji naukowej w dniu 23 września 2006 r., z przedmową A. Pelczara: *Tadeusz Ważewski 1896–1972*. W Służbie Nauki 17(2011), PAU, Archiwum Nauki PAN i PAU, Kraków, 2011.

[11] Pelczar A.: *Tadeusz Ważewski (1896–1972) uczony i nauczyciel*. In *Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki* (red. B. Szafirski), UJ, Kraków, 2000, s. 341–356.

[12] Piłat B.: *Remembrance of Mieczysław Biernacki*. Opuscula Mathematica 13(1993), s. 161–163.

[13] Szynal D. (red.): *Profesor Mieczysław Biernacki*. Lublin, 1986.

[14] Ważewski T.: *Sur le courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*. Thèse présente à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, No. 35, 1923.

Adresa

Dr hab. Stanisław Domoradzki, prof. UR
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Rzeszowskiego
Al. Rejtana 16a
35-959 Rzeszów
e-mail: *domoradz@univ.rzeszow.pl*

CYKLOIDA V BUFFONOVĚ ŘEŠENÍ ÚLOHY O JEHLE

ANNA KALOUSOVÁ

Abstract: In *Essai d'arithmétique morale*, Buffon formulated and solved the so-called *needle problem*. He mentioned using some properties of a cycloide but he did not indicate either the specific properties used or the source from which he knew them. In this contribution we try to show what Buffon could have known about a cycloide and what he could have used in his derivation.

1 Úvod

1.1 Buffonova úloha o jehle

Buffonovu *úlohu o jehle* najdeme snad ve všech učebnicích pravděpodobnosti. Připomeňme ji v podobě, v níž bývá většinou uváděna. Na síť od sebe stejně vzdálených rovnoběžek je náhodně hozena jehla. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne nějakou rovnoběžku? Označme d vzdálenost rovnoběžek, l délku jehly (předpokládáme, že $l < d$), dále označme y vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a α úhel, který svírá jehla s daným systémem rovnoběžek. Zřejmě stačí uvažovat $0 \leq y \leq d/2$ a $0 \leq \alpha \leq \pi$. Jehla protne rovnoběžku právě tehdy, když $(l/2)\cdot\sin\alpha \geq y$. Pravděpodobnost, že jehla protne nějakou rovnoběžku, je tedy

$$P = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\pi\frac{d}{2}} = \frac{l\cdot[-\cos\alpha]_0^\pi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

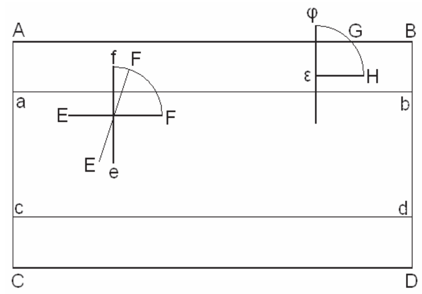
To je ovšem současný pohled. V 18. století, kdy tato úloha vznikla, ještě integrální počet nebyl rozvinut do této podoby a matematici častěji používali názornější postupy z dřívější doby, jako třeba Cavalieriho princip apod. Navíc Buffon byl spíš matematik amatér. Připomeňme jeho formulaci úlohy a jeho způsob řešení.

1.2 Buffonovo řešení

Úloha o jehle byla poprvé prezentována na zasedání francouzské *Académie des Sciences* v dubnu 1733. Buffonovo pojednání *Solutions de problèmes sur le jeu du Franc-Carreau* zde přečetl Alexis Claude Clairaut (1713–1765), který také pojednání hodnotil spolu s Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759). Buffon sám číst nemohl, protože v té době ještě nebyl akademikem. Záznam tohoto zasedání od stálého sekretáře *Académie des Sciences* Bernarda Le Bouyer de Fontenelle (1657–1757) najdeme v [3]. V něm je ale pozorost věnována spíše hře *Franc-Carreau*.

Úloha o jehle je představena jako hra, ve které je na podlahu tvořenou prkny o stejné šířce házena tyčka a hráči sázejí na to, zda protne některou spáru nebo ne. Je naznačena souvislost pravděpodobnosti protnutí spáry s poměrem mezi délkou tyčky a šířkou prken a také s úhlem, který tyčka svírá se spárami (či spíše s kolmicí na spáry a navíc v řeči oblouků), v záznamu však není žádné odvození ani výsledek. Na konci je pouze uvedeno, že pokud je šířka prken stejná jako délka tyčky, tyčka neprotne spáru v žádném svém postavení (tj. ať je její směr jakýkoli) pouze v případě, že její střed leží ve středu vzdálenosti mezi spárami. Pokud je šířka prken větší než délka tyčky, je možností, kdy tyčka neprotne žádnou spáru, více. Existuje tedy určitá šířka prken, při které je hra „rovná“ (oba hráči mají stejnou šanci na výhru) „a to určil P. le Clerc s velkou elegancí z plochy cykloidy.“[1]

V [2] z roku 1777 je postup popsán podrobněji. Situace je znázorněna na obrázku, který je kopií obrázku z [2]. Buffon nejprve zvolí na dvou sousedních rovnoběžkách body **A, B** a **C, D** tak, aby tvořily obdélník. Ten představuje jedno prkno. Jedna strana obdélníka je rovna šířce prkna (vzdálenosti rovnoběžek), tu označí $2a$, druhou je délka prkna označená f. Délka tyčky je označena $2b$, v obdélníku **ABDC** jsou vedeny ve vzdálenosti b rovnoběžky se stranami **AB** (ozn. **ab**) a **CD** (ozn. **cd**). Buffon uvažuje jen (horní) polovinu obdélníka **ABDC,** v dolní polovině je situace (díky symetrii) stejná. Je zřejmé, že pokud střed tyčky padne do obdélníka **abdc** (tedy jeho horní poloviny), nemůže tyčka protnout žádnou spáru (levá část obrázku). Množina těchto případů má míru $f\cdot(a-b)\cdot c$, kde je symbolem c označena čtvrtina kružnice o poloměru b, tedy $c=b\pi/2$. Pokud střed tyčky padne do zbylé části, může tyčka spáru protnout a také neprotnout. Například když střed tyčky padne do bodu **ε**, odpovídá oblouk **φG** těm případům, kdy tyčka protne přímku **AB**, a oblouk **GH** případům, kdy tyčka přímku neprotne.



Potom Buffon označí symbolem y oblouk **φG**. Je zřejmé, že délka oblouku **φG** (a tedy hodnota y) je závislá na vzdálenosti středu tyčky **ε** od přímky **AB**, tuto vzdálenost označuje x, i když to explicitně neuvádí. Množina případů, kdy tyčka protne přímku **AB**, má míru $f\cdot\int y\,dx$, množina případů, kdy přímku **AB** neprotne, má míru $f(bc-\int y\,dx)$. Integrační meze Buffon neuvádí, je ale zřejmé, že dolní mez je 0 a horní je b. Množina případů, kdy tyčka spáru neprotne, je tedy sjednocením dvou množin (té, kdy střed jehly padne do obdélníka **abcd**, a té, kdy padne do obdélníka **abAB)**. Toto sjednocení má míru $f\cdot(a-b)\cdot c+f\cdot(bc-\int y\,dx)=f\cdot(ac-\int y\,dx)$. Hra je „rovná“ právě tehdy, když se míry množiny příznivých jevů (tyčka spáru protne) a množiny nepříznivých jevů (tyčka spáru neprotne) rovnají, tedy $f\cdot\int y\,dx=f\cdot(ac-\int y\,dx)$, neboli $\int y\,dx=(ac-\int y\,dx)$. Zbývá spočítat $\int y\,dx$. Tento výraz je dle Buffona roven obsahu části cykloidy, jejíž generující kruh má průměr roven délce tyčky (tedy $2b$). A tento obsah je roven b^2, tedy čtverci poloměru generujícího kruhu.[2]

[1] Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie.

[2] … c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2b$ longeur de la baguette; or, on fait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, …

Je zřejmé, že $y = b \cdot \arccos\frac{x}{b}$. Potom snadno spočítáme, že $\int_0^b y\,dx = b^2$. Ale to jsme znovu použili dnešní postup. Ten však Buffon neznal. Co je tedy ta jeho *část cykloidy*? Jak se spočítá její obsah? Na tyto a podobné otázky se pokusíme odpovědět v další části.

2 Cykloida

2.1 Trocha historie

Cykloida je rovinná křivka, kterou opisuje pevně zvolený bod na kružnici kotálející se (bez klouzání) po přímce. Ač se jedná o křivku docela přirozenou, nebyla ve starověku studována. Snad proto, že ji považovali jen za část elipsy. Podle Evangelisty Torricelliho (1608–1647) se jako první o cykloidu zajímal jeho učitel Galileo Galilei (1564–1642), od něhož pochází i název cykloida. John Wallis (1616–1703) však uvádí, že konstrukci cykloidy popsal už Charles de Bovelles (1479–1566). Galileiho zaujal tzv. *Aristotelův paradox*, který je popsaný v *Mechanice*[3] (originál s latinským překladem a komentáři je uveden v [8], anglický překlad v [11]). Uvažujme kruh, který se kutálí po přímce a menší kruh se stejným středem, který je s původním kruhem spojen. Otočí-li se větší kruh, otočí se i menší. Když se větší kruh otočí o 360°, urazí dráhu rovnou svému obvodu. Malý kruh při tom vlastně urazí tutéž dráhu, i když jeho obvod je menší. Jak je to možné? Je to způsobeno tím, že menší kruh se nepohybuje „bez klouzání“. Galilei ukázal na pravidelném šestiúhelníku, že když se větší šestiúhelník překlápí přes vrchol, u menšího odpovídající vrchol nezůstává na místě, ale pohybuje se, klouže. Dráha, kterou takto urazí, pak způsobí to „prodloužení“. Podobně pro mnohoúhelníky s více vrcholy a v limitním případě pro kruh. Galilei své řešení publikoval v [4].

O cykloidu se zajímal také Marin Mersenne (1588–1648) a v roce 1615 navrhl významným matematikům prozkoumat její vlastnosti, především spočítat obsah plochy vymezené jedním obloukem cykloidy a zkonstruovat tečnu cykloidy v libovolném bodě. V roce 1635 první problém vyřešil Gilles Personne de Roberval (1602–1675), který spočítal, že obsah plochy vymezené jedním obloukem cykloidy je roven trojnásobku obsahu generujícího kruhu [10]. Konstrukci tečen popsal René Descartes (1596–1650), úloha se mu zdála být příliš jednoduchá. V roce 1658 vyzval Blaise Pascal (1623–1662) pod pseudonymem Amos Dettonville matematiky k vyřešení dalších otázek týkajících se cykloidy (obsah libovolné části plochy omezené cykloidou, nalezení hmotného středu této plochy, objem a povrch tělesa vzniklého rotací cykloidy kolem její osy, resp. kolem přímky, po níž se kutálí generující kružnice,...). Vypsal dokonce cenu pro toho, kdo tyto problémy vyřeší. Sám už řešení znal (publikoval je posléze v pojednání [9]). Do zkoumání se zapojilo mnoho matematiků, významný byl výsledek Sira Christophera Wrena (1632–1723), známého architekta (katedrála sv. Pavla v Londýně), který určil, že délka jednoho oblouku cykloidy je rovna čtyřnásobku průměru generující kružnice.

V 17. století byly objeveny také další zajímavé vlastnosti cykloidy, které měly významné praktické využití. Na moři bylo pro určení zeměpisné délky nutné znát nejen čas v místě, kde se loď nalézala (dal se určit podle Slunce), ale také referenční čas; třeba

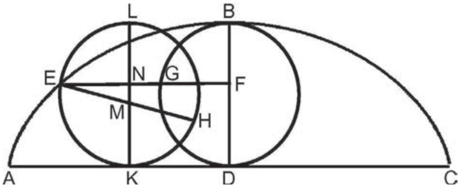
[3] Text je tradičně připisován Aristotelovi (382–322 př. n. l.), o jeho autorství ale mnozí pochybují. Někteří soudí, že autorem je Archytas (428–347 př. n. l.), jiní považují za autora některého z Aristotelových žáků.

v místě, odkud loď vyplula a jehož zeměpisná délka byla známá. Námořníci proto potřebovali s sebou vozit hodiny, na nichž byl nastavený čas domovského přístavu. Problém byl v tom, že žádné hodiny nebyly schopné udržet na moři přesný čas po tak dlouhou dobu. Christiaan Huygens (1629–1695) se snažil vyřešit tento problém. Všiml si isochronie cykloidy, tedy toho, že když z libovolného bodu na (obrácené) cykloidě spustíme kuličku, dorazí do nejnižší polohy vždy za stejný čas. Chtěl zkonstruovat kyvadlové hodiny, jejichž kyvadlo by se pohybovalo po cykloidě. Využil k tomu další vlastnosti cykloidy, totiž že její evolutou je také cykloida, a přidal horní zarážky ve tvaru cykloidy, které regulovaly délku vlákna během pohybu. Kyvadlové hodiny se ale na moři příliš neosvěčily a nakonec sám Huygens uznal, že pro použití na moři budou lepší hodiny pružinové.

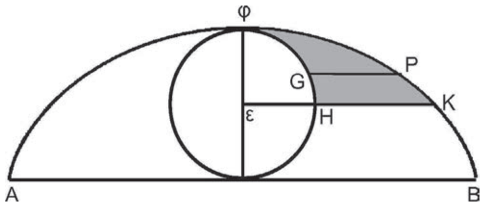
Johann Bernoulli (1667–1748) v roce 1696 v *Acta Eruditorum* uveřejnil tzv. problém brachistochrony. Brachistochrona je křivka spojující body **A** a **B**, po které se hmotný bod dostane z bodu **A** do bodu **B** působením gravitačního pole v nejkratším možném čase. Problémem se zabýval už Galilei, domníval se, že brachistochrona je částí kružnice (publikováno v [4]). Johann Bernoulli ale ukázal, že brachistochronou je část oblouku cykloidy. Problémem se zabýval také Jacob Bernoulli (1655–1705). Při řešení použil nové posupy a položil základy nové matematické discipliny, variačního počtu.

2.2 Výsledky, které mohl Buffon použít

První otázka byla, obsahu které části cykloidy je roven $\int_0^b y\,dx$. Christiaan Huygens v rukopise [5] z roku 1658 a následně v práci [6] ukázal souvislost mezi délkou oblouku **φG** (v Buffonově značení) a délkou jisté úsečky. V rukopise [5] je postup následující:



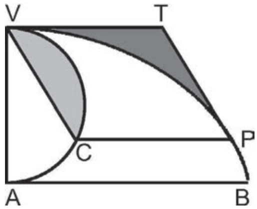
Mějme oblouk **ABC** cykloidy a na něm vyberme bod **E**. Veďme tímto bodem rovnoběžku s **AC**, průsečík s osou cykloidy označme **F**. Kotálením se přesune bod **B** do bodu **E,** oblouk **BGD** se přesune na oblouk **EKH**. Délka oblouku **KH** je proto rovna délce úsečky **KD**. Protože jsou délky oblouků **GB** a **EL** rovny délce oblouku **KH**, musí být také rovny délce úsečky **KD** a rovněž délce úsečky **NF**. Stejnou délku má i úsečka **GE** (protože jsou stejné délky úseček **GF** a **NE** a část **NG** je oběma společná). Délka oblouku **GB** je tedy rovna délce úsečky **GE**.[4]



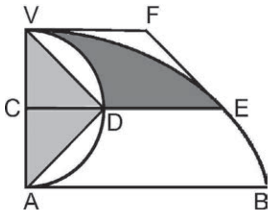
V Buffonově značení to znamená, že délka oblouku **φG** (tzn. y) je rovna délce úsečky **GP**. Integrál $\int_0^b y\,dx$ je potom roven obsahu oblasti ohraničené obloukem **φH**, částí cykloidy **φK** a úsečkou **HK**. To je ta *část cykloidy*, o které se zmiňuje Buffon.

[4] ABC est Cycloides. BD diameter circuli generatoris. EF parall. AD. dico EG ∞ esse arcui GB. Cum B est in E, circulus BGD est in EKH. Et D in H. Ergo arcus KH ∞ rectae KD, quare et arcus EL sive GB ∞ rectae KD sive NF. Sed NF ∞ GE: nam GF ∞ NE; et addita utrinque NG fit EG ∞ NF. Ego arcus BG ∞ GE.

Druhou otázkou bylo, jak spočítat obsah této oblasti. Na to můžeme najít odpověď třeba v pojednání [7] od Philippe de La Hire (1640–1718). Toto pojednání obsahuje jedno lemma, pět tvrzení a jeden důsledek. Uvedeme jen části vztahující se k našemu problému. Lemma popisuje konstrukci tečny v jakémkoli bodě cykloidy. Uvažujme polovinu oblouku cykloidy **VB** a vyberme na něm libovolně bod **P**. Veďme tímto bodem rovnoběžku s **AB**, její průsečík s generující kružnicí označme **C**. Potom tečna v bodě **P** je rovnoběžná s úsečkou **VC**. V prvním tvrzení je ukázáno, že plocha vymezená obloukem cykloidy **VP** a úsečkami **VT** a **PT** má stejný obsah jako kruhová úseč na generujícím kruhu vymezená sečnou **VC**.



Ve třetím tvrzení je uveden výsledek, který použil Buffon. Mějme opět polovinu cykloidy se základnou **AB** a s osou **VA** a její generující kružnici se středem **C.** Veďme bodem **C** rovnoběžku s **AB**, průsečík s generující kružnicí označme **D** a průsečík s cykloidou **E**. Potom obsah oblasti vymezené obloukem **VD**, částí cykloidy **VE** a úsečkou **DE** (Buffonova *část cykloidy*, označme ji třeba *O*) je roven čtverci poloměru (označíme *R*) generující kružnice. Důkaz začíná konstrukcí tečny v bodě **E** a tečny v bodě **V** (rovnoběžka s **AB**), jejichž průsečíkem je bod **F**. Obsah rovnoběžníka **DEFV** je roven polovině obsahu kruhu vymezeného generující kružnicí. V rovnoběžníku **DEFV** je totiž délka strany **DE** rovna délce oblouku **VD** (jak bylo ukázáno výše), tedy délce čtvrtiny generující kružnice ($\pi R/2$) a výška je rovna poloměru *R* generující kružnice. Obsah **DEFV** je roven $\pi R^2/2$, polovině obsahu kruhu vymezeného generující kružnicí. Uvažovanou oblast *O* můžeme získat tak, že z rovnoběžníku **DEFV** odstraníme kruhovou úseč vymezenou úsečkou **VD** a oblast vymezenou obloukem cykloidy **VE** a úsečkami **EF** a **VF**. Protože obě tyto části mají stejný obsah, je obsah *O* roven obsahu rovnoběžníka **DEFV** zmenšenému o dvojnásobek obsahu kruhové úseče vymezené úsečkou **VD**. Z rovnosti obsahů rovnoběžníka **DEFV** a poloviny kruhu vymezeného generující kružnicí pak plyne, že obsah uvažované části cykloidy je roven obsahu trojúhelníka **ADV**, tedy R^2.



Podle [1] mohl Buffon znát i jiné texty. John Wallis v předmluvě ke svému pojednání *De Cycloïde* z roku 1659 píše, že totéž dokázal už Huygens a Wren.[5] Nicméně La Hire byl členem *Académie des sciences,* takže jeho práce byla pro Buffona nejdostupnější.

3 Závěr

3.1 Helena matematiků

Nevíme přesně, čí výsledky Buffon znal a které použil, jisté ale je, že v 17. století se mnoho významných matematiků věnovalo problémům spojeným s cykloidou. Kromě těch, které jsme jmenovali, to byli také třeba Pierre de Fermat (1601–1665), Gottfried

[5] *Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrenum nostrum prodidisse*, Portionem Cycloidis quam abscindit recta ad axim ordinatim applicata, ejusdem axis partem quartam vertici proximam absindens,aequalem esse spatio rectilineo: (*quod quidem verum est; aequat utique* $3/8R^2\sqrt{3}$ *: ut ex calculo §23 liquet; uti &trilineum CbB fig. i vel 7, aequare* R^2 *quadratum radii…)*

Wilhelm von Leibniz (1646–1716) nebo Isaac Newton (1643–1727). Tato křivka vzniká zcela přirozeným způsobem a má velmi zajímavé vlastnosti, které mají také praktické využití. Pro její krásu a zajímavost bývala nazvána Helenou matematiků, podle manželky spartského krále Meneláa považované za nejkrásnější ženu na světě.

Literatura

[1] Bessot D., Trotoux D.: *Le jeu de la baguette de Buffon*. Le miroir des maths, 9(2012), 13–25.

[2] Buffon G.-L. Leclerc de: *Essai d'arithmétique morale*. Histoire naturelle, générale et particulière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'Homme, Supplément, tome IV. Imprimerie Royale, Paris, 1777, 46–148.

[3] Fontenelle B. le B. de: *Histoire de l'Académie royale des sciences*, *en 1733*. Imprimerie Royale, Paris, 1735, 43–45.

[4] Galilei G.: *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze*. Leidi, 1638.

[5] Huygens Ch.: *Recherches sur les proprietés géométrique de la cycloïde*. Oeuvres complètes, Tome XIV, Calcul des probabilités, Traveaux de mathématiques pures 1655–1666, La Haye, 1920, 347–357.

[6] Huygens Ch.: *Horologium oscillatorium*. 2. část, Paris, 1673.

[7] La Hire P. de: *De cycloide lemma*. Paris, 1676.

[8] Monantheuil H. de: *Aristotelis mechanica*. Paris, 1599.

[9] Pascal B.: *Traité général de la roulette*. Oeuvres de Blaise Pascal, Ouvrages de mathématiques, Nouvelle édition, Lefèvre, Paris, 1819, 361–376.

[10] Roberval G. P. de: *Traité des indivisibles*. Diverse ouvrages de mathématique et de physique, par Messieurs de l'Académie royale des sciences, Imprimerie royale, Paris, 1693, 190–245.

[11] Winter T. N.: *The Mechanical problems in the Corpus of Aristotle*. Faculty publications, Classic and Religious Studies Departement, paper 68, 2007 [online].

http://digitalcommons.unl.edu/classicsfacpub/68

Adresa

RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky
FEL ČVUT
Technická 2
166 27 Praha 6
e-mail: *kalous@math.feld.cvut.cz*

NAUCZANIE MATEMATYKI W SZKOŁACH ŚREDNICH TORUNIA W XIX W.

KAROLINA KARPIŃSKA

Abstract: This article is devoted to describing the mathematical education in secondary schools operating in Torun in the nineteenth century. Particular attention has been devoted to the Torun Gymnasium, which was the only school in Torun conducting the Matura exams. Work also includes a brief history of the maturity exams and how they were performed in Torun, Chelmno and Inowroclaw. It has been enriched with a sample set of tasks in Mathematics being solved during the Matura examination in 1866.

W XIX wieku na terenie Torunia funkcjonowały trzy szkoły kształcące na poziomie średnim. Najstarszą i najbardziej prestiżową z nich było protestanckie Gimnazjum Toruńskie dla chłopców, którego początki sięgały XVI wieku. Pomimo, że była to szkoła, w której największy nacisk kładziono na naukę przedmiotów humanistycznych,[1] to w pierwszej połowie XVIII wieku stała się, obok Gimnazjum Gdańskiego, jedynym ośrodkiem na terenie Rzeczypospolitej, w którym dydaktyka przedmiotów matematycznych dorównywała przodującym szkołom europejskim. Uczniowie poznawali w niej poglądy Kartezjusza, Newtona, Leibnitza, Wolffa oraz teorię kopernikańską. Wraz z początkiem XIX wieku zaczęto przeprowadzać w Gimnazjum egzaminy maturalne, które były dla uczniów przepustką do studiów uniwersyteckich. Ze względu na wysoki poziom nauczania i możliwość przeprowadzania matur instytucja ta cieszyła się niezwykle dużą popularnością wśród mieszkańców Torunia i okolic.

Dziewiętnastowieczny Toruń liczył około 10 tysięcy mieszkańców i nie wszyscy chętni mogli pobierać naukę w Gimnazjum. Dlatego Magistrat toruński podjął decyzję o utworzeniu dla niego alternatywy. Została nią szkoła średnia dla chłopców, tzw. Knaben-Mittelschule, której celem było przygotowywanie młodzieży do pracy na stanowiskach urzędniczych.

Początek XIX wieku w Prusach i przynależącym doń Toruniu, był zdeterminowany przez ówcześnie panujący pogląd na miejsce kobiety w społeczeństwie. Nawet najbardziej światli myśliciele przełomu XVIII i XIX wieku uważali, że celem życia kobiety jest bycie wzorową matką, żoną i gospodynią domu. Takie spojrzenie na płeć żeńską miało również odzwierciedlenie w stworzonym dla niej systemie wychowania. W Toruniu, od momentu wprowadzenia obowiązku szkolnego, dziewczęta mogły się uczyć jedynie w zakładach prywatnych, czyli tzw. pensjach, kształcących na poziomie elementarnym. Dopiero działania rewolucyjne kobiet z początku XIX wieku spowodowały, że zaczęto tworzyć dla nich szkoły na poziomie wyższym niż podstawowy. Na rok 1820 datuje się utworzenie pierwszej toruńskiej szkoły średniej dla dziewcząt, tzw. Töchterschule für höhere Bildung.

[1] Gimnazjum Toruńskie zostało utworzone na wzór humanistycznego gimnazjum założonego w Strasburgu przez niemieckiego humanistę i pedagoga Johanna Sturma ([6], s. 1001). Miało ono na celu „ukształtowanie właściwego modelu moralno-religijnego wychowanka i zapewnienie absolwentom pewnego quantum wykształcenia erudycyjno-filologicznego i umiejętności retorycznych” ([5], s. 85–86).

W niniejszej pracy zostanie opisany sposób kształcenia matematycznego w każdej z wyżej wymienionych szkół, ze szczególną uwagą skierowaną na Gimnazjum Toruńskie i przeprowadzane w nim egzaminy maturalne.

1 Gimnazjum Toruńskie

Gimnazjum Toruńskie powstało w 1568 roku i na przestrzeni dziejów funkcjonowało pod różnymi nazwami. W pierwszej połowie XIX wieku było to Gimnazjum w Toruniu (Gymnasium zu Thorn), następnie Królewskie ewangelickie Gimnazjum w Toruniu (Königliches evangelisches Gymnasium zu Thorn), aż w końcu od 1861 roku – Królewskie ewangelickie Gimnazjum i Szkoła Realna pierwszego stopnia w Toruniu (Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn).

Pomimo humanistycznego charakteru szkoły, zatrudniano w niej wybitnych dydaktyków i znawców matematyki, m. in. Adama Freytaga, Pawła Patera, Friedricha Reinholda Bornmanna i Samuela Teodora Schönwalda ([4], s. 115–138). Każdy z nich kładł duży nacisk na praktyczne stosowanie wiedzy zdobytej na zajęciach, a tendencje te były widoczne jeszcze na początku XIX wieku.

1.1 Pierwsze lata XIX wieku

W pierwszych latach XIX wieku nauczyciele przedmiotów matematycznych Gimnazjum Toruńskiego skupiali się w głównej mierze na tym, aby przekazywać uczniom wiedzę, która pomoże im sprawnie funkcjonować w życiu dorosłym, dlatego nauczali matematyki na treściach czerpanych z życia codziennego. Jednocześnie nie mogli wchodzić w skomplikowane, czysto teoretyczne rozważania, ponieważ nie byli do tego przygotowani w sposób merytoryczny. W gronie pedagogicznym nie było wówczas nauczycieli o wykształceniu matematycznym, a zajęcia te były zazwyczaj rozdzielane pomiędzy humanistów, i tak w 1808 roku zajęcia matematyczne w Gimnazjum prowadziło czterech filologów: Jan Karol Germar, Jan Fryderyk Bormann, Andrzej Müller i Jan August Jerzy Schmidt ([10], s. 173–176).

1.1.1 Godzinowy rozkład zajęć z matematyki

Profesorowie Germar i Bormann wykładali w klasach najwyższych, pierwszy z nich geometrię, a drugi arytmetykę, obaj robili to w oparciu o podręcznik *Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der Mathematik* [Podstawy najbardziej niezbędnych części matematyki] J. J. Ebertsa ([15]), natomiast Müller i Schmidt uczyli rachunków w klasach niższych. Germar prowadził tygodniowo jedną godzinę geometrii w najwyższej wówczas klasie Secundzie (nie było Primy), Bormann – jedną godzinę arytmetyki w Secundzie oraz dwie w łączonej klasie III–IV (Tertia – Quarta), Müller prowadził tamże dwie godziny „rachunków z głowy" i dodatkowo: dwie godziny „rachunków na tablicy" i jedną godzinę „rachunków ze słuchu" w kl. V–VI (Quinta – Sexta) oraz jedną godzinę „rachunków z głowy" w VII–VIII (Septima – Octava), natomiast Schmidt – trzy godziny „rachunków" w VII–VIII (Septima – Octava). Z owego rozkładu zajęć wynika, że w Gimnazjum Toruńskim przykładano dużą wagę do biegłości w liczeniu, zarówno pisemnym, jak i pamięciowym, co w ówczesnych szkołach było niezwykle rzadko spotykane ([10], s. 198).

Analiza treści zawartych w podręczniku Ebertsa pozwoli nam zapoznać się z zagadnieniami, które realizowano na zajęciach i sposobami, na jakie to robiono.

Podręcznik ten zawiera trzy główne działy: arytmetykę, geometrię oraz trygonometrię płaską.

1.1.2 Analiza treści zawartych w podręczniku Ebertsa

Arytmetyka obejmuje analizę systemów liczbowych – dziesiętnego, dwójkowego i czwórkowego; cztery działania arytmetyczne, z których każde autor najpierw omawia na liczbach naturalnych, następnie na mianowanych, a później na wielomianach i dodatnich liczbach wymiernych; ułamki dziesiętne; kwadraty i sześciany liczb jedno-, dwu- i trzycyfrowych, na podstawie obliczania których wyprowadza „wzory skróconego mnożenia" na wyrażenia, takie jak np. $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$, $(a+b)^3$; pierwiastki kwadratowe i sześcienne oraz sposoby ich obliczania (wyliczanie z dokładnością do kilku miejsc po przecinku wartości $\sqrt{12}$ i $\sqrt[3]{18}$); stosunki liczb i proporcje; regułę trzech oraz regułę pięciu; postępy arytmetyczne, geometryczne i logarytmiczne; własności logarytmów oraz ich wykorzystanie do mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania liczb. Ostatnim zagadnieniem jest omówienie sposobu znajdowania logarytmu danej liczby (lub liczby, której logarytm jest dany), gdy nie można tego odczytać z tablic logarytmicznych. Ważnym elementem, przewijającym się przez cały rozdział dotyczący arytmetyki, jest zamiana jednostek miar, wag i monet, a ułatwiają to umieszczone przez autora siedmiostronicowe tablice.

Zaletą arytmetycznej części podręcznika jest to, że wszelkie nowe treści podawane przez autora za każdym razem są zobrazowane na przykładach, a materiał jest tak ułożony, aby stanowił logiczną całość i nie było miejsca na niedomówienia. Widocznym jest hołdowanie zasadzie „od szczegółu do ogółu". Autor pokazuje różne metody podejścia do jednego zagadnienia np. podaje trzy różne sposoby dzielenia liczb: dzielenie pisemne metodą pitagorejską, dzielenie przy użyciu tzw. sztabek Napiera oraz przy wykorzystaniu własności logarytmów. Niewątpliwie wadą podręcznika jest brak zadań do samodzielnego rozwiązania przez uczniów. Dodatkowo, duży problem stanowi tutaj aspekt podstaw logarytmów. Autor używa sformułowania „logarytm", jednakże w swoim rozumowaniu właściwie zupełnie pomija jego podstawę. Tego, jaka jest podstawa rozważanego logarytmu, czytelnik musi domyślić się z kontekstu.

W dziale poświęconym geometrii, oprócz podstawowych pojęć geometrycznych, omawia wielokąty i sumy miar ich kątów, podaje cechy przystawania i podobieństwa wielokątów oraz sposoby obliczania ich pól, dużo uwagi poświęca obliczeniu pola koła oraz jego wycinka i odcinka, ponadto omawia kąty środkowe i wpisane oraz własności figur wpisanych w koło. Osobną część stanowią zastosowania geometrii do mierzenia gruntu – autor opisuje, w jaki sposób, przy wykorzystaniu teorii trójkątów przystających i podobnych oraz przyrządów mierniczych takich, jak łańcuchy i sznury miernicze oraz goniometry i stojaki, można znaleźć odległość między dwoma obiektami na ziemi, między którymi umieszczona jest pewna przeszkoda np. staw czy rzeka, uniemożliwiająca bezpośrednie zmierzenie odległości. W podobny sposób omawia mierzenie wysokości obiektów. Pokazuje też metody obliczania pola powierzchni obszaru na ziemi, który jest w kształcie wielokąta i w jego wnętrzu znajduje się staw. Z zagadnień stereometrycznych oprócz podstaw takich, jak definicje: graniastosłupa, równoległościanu, sześcianu, walca prostego i pochyłego, ostrosłupa, wielościanów foremnych (tetraedra, octaedra, icosaedra, dodekaedra), stożka i kuli, podaje sposoby obliczania objętości równoległościanu, graniastosłupa, cylindra oraz ostrosłupa, omawia podobieństwo i przystawanie brył, najwięcej miejsca poświęca natomiast różnym sposobom obliczania objętości kuli oraz pola jej powierzchni. Jako ostatnie zagadnienie podaje sposoby obliczania objętości beczki oraz innych małych brył o nieregularnych kształtach (przy użyciu modelu graniastosłupa lub walca i wody lub piasku).

W tej części podręcznika autor przeprowadza wiele konstrukcji, z których każda jest opatrzona dowodem poprawności. Dba o to, aby przedstawiać różne sposoby rozwiązania jednego zadania. Każde twierdzenie jest opatrzone rysunkiem, zapisem symbolicznym, zgodnym z oznaczeniami na rysunku, dowodem i często też przykładem zastosowania. Przy opisywaniu sposobów wykorzystania geometrii w miernictwie, umieszcza uwagi dotyczące posługiwania się przyrządami mierniczymi, np. że w zależności od stopnia wilgotności powietrza sznur mierniczy może się wydłużać lub skracać, tym samym, może nie dać precyzyjnego pomiaru. Poleca posługiwanie się pomocami naukowymi, np. przy wyprowadzaniu wzoru na objętość ostrosłupa zaproponował posłużenie się mode-lem graniastosłupa wykonanym z drewna i rozcięcie go na części za pomocą siekiery.

Trygonometrię płaską Eberts rozpoczyna od zdefiniowania funkcji trygonometrycznych w kole trygonometrycznym, a następnie przedstawia sposoby rozwiązywania trójkątów, czyli znajdowania długości ich boków i miar kątów, w zależności od tego, które jego wielkości są dane. Dział ten jest wzbogacony o jedenastostronicowe tablice miar łuków i stowarzyszonych z nimi cięciw.

Niewielka liczba godzin, jaką dysponowali nauczyciele wyższych klas gimnazjalnych w 1808 roku, sugeruje, iż raczej nie omawiali na nich trygonometrii, jednakże w 1814 roku sytuacja mogła być już zgoła odmienna, ponieważ dwie najstarsze klasy miały wówczas po jednej godzinie arytmetyki i dwie godziny geometrii tygodniowo, a klasa trzecia – po dwie godziny arytmetyki i geometrii.

Konstrukcja podręcznika zmuszała nauczycieli do samodzielnego przygotowywania zadań ćwiczeniowych, a praktykowaną przez nich (Germara, Bormanna, Müllera i Schmidta) formą sprawdzania poziomu zrozumienia materiału i umiejętności uczniów były częste prace pisemne.

1.2 Era doktora Ludwiga Martina Laubera (lata 1821–1855)

Poziom nauczania przedmiotów matematycznych wyniósł na znacznie wyższy poziom dopiero doktor Ludwig Martin Lauber. Rozpoczął on pracę w Gimnazjum Toruńskim w 1821 roku. Był to drugi XIX-wieczny nauczyciel matematyki w Gimnazjum (po Martinie Ohmie, pracującym w latach 1817–1821), który miał ukończone studia w tym zakresie. Rozpoczął je w 1812 roku na Uniwersytecie we Wrocławiu i kontynuował w Berlinie. Tytuł doktora uzyskał w 1821 roku na Uniwersytecie w Halle, na podstawie rozprawy doktorskiej dotyczącej liczb naturalnych ([11], s. 132).

Rozpoczynając pracę w Gimnazjum przejął prowadzenie matematyki w trzech najwyższych klasach od Tertii do Primy oraz dwie godziny matematyki w Quarcie.

Przez 34 lata, do 1855 roku, był jedynym profesorem matematyki w Gimnazjum Toruńskim i realizowany przez niego program nauczania przez te lata niewiele się różnił. Jedynie w Primie pozwalał sobie na dozę urozmaicenia. Można wzmiankować, że pracował w tej szkole do 1858 roku.

Dla pełnego obrazu treści nauczania we wszystkich ówczesnych klasach gimnazjalnych, podany zostanie najpierw program nauczania klas najniższych, na przedmiocie o nazwie „rachunki”.

1.2.1 „Rachunki” w klasach niższych i „matematyka” w klasach wyższych

Wszystkie klasy niższe od Quarty miały przedmiot o nazwie „rachunki”, który był prowadzony przez nauczycieli klas elementarnych. Program realizowany na tych zajęciach opierał się w głównej mierze na ćwiczeniu umiejętności w wykonywaniu działań arytmetycznych na liczbach całkowitych i wymiernych. Quarta była klasą przejściową, która oprócz „rachunków” miała już „matematykę”. Na trzech godzinach „rachunków” tygodniowo poznawała regułę trzech i jej zastosowania np. do rachunków kupieckich.

Zajęcia „matematyki” w Quarcie były prowadzone przez Laubera w wymiarze dwóch godzin tygodniowo. Zawsze poświęcał je na wprowadzenie do geometrii, gdzie zaznajamiał uczniów np. z kątami i ich rodzajami.

W Tertii prowadził cztery godziny tygodniowo. Dwie z nich zawsze poświęcał na omówienie zagadnień geometrycznych. Zajmował się na nich planimetrią (do twierdzeń dotyczących podobieństwa), rozwiązywał z uczniami zadania konstrukcyjne oraz wprowadzał podstawy stereometrii. Pozostałe dwie godziny początkowo poświęcał na omówienie ułamków zwykłych i dziesiętnych, proporcji i ich zastosowań, ciągów arytmetycznych i geometrycznych oraz potęg, a także pierwiastków kwadratowych i sześciennych. Od 1845 roku rozszerzył to o zasady rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi oraz równań kwadratowych.

W Secundzie (cztery godziny tygodniowo) powtarzał i rozszerzał wiadomości planimetryczne i stereometryczne zdobyte przez uczniów w Tertii, dodatkowo zajmował się geometrią analityczną (w tym trygonometrią płaską), omawiał logarytmy i ich zastosowania oraz wprowadzał podstawy kombinatoryki. W 1835/1836 roku zakres realizowanego materiału rozszerzył o twierdzenie o dwumianie Newtona i rozwiązywanie równań diofantycznych, a w 1837/1838 dodał do tego jeszcze twierdzenie wielomianowe. Dwukrotnie, w latach 1844/1845 oraz 1851/1852, w program nauczania Secundy wprowadzał też syntaktykę.

W Primie (do roku 1841/1842 – cztery godziny tygodniowo, później – trzy godziny) program nauczania był najbardziej zróżnicowany. Jego stałym elementem było rozszerzenie wiadomości z Secundy. W zależności od roku pracy wprowadzał też nowe zagadnienia i często zajmował się nimi tylko przez rok, np. w latach 1829/1830 oraz 1840/1841 wprowadzał analityczną teorię stożkowych, w roku 1831/1832 zajmował się rachunkiem różniczkowym i całkowym, w 1832/1833 – trygonometrią sferyczną i jej zastosowaniami w astronomii, w 1835/1836 roku rozwiązywał równania stopnia drugiego i wyższych, w 1839/1840 wprowadził teorię funkcji łącznie z obliczaniem ich minimum i maksimum, w 1841/1842 dodał do tego twierdzenie Taylora, a w 1851/1852 omawiał ciągi arytmetyczne rzędu drugiego i rzędów wyższych.

1.2.2 Podręczniki stosowane przez Laubera

W 1832 roku Królewskie Prowincjonalne Kolegium Szkolne poleciło stosowanie na matematyce *Über die Anfangsgründe der höheren Arithmetik* [O podstawach arytmetyki wyższej] F. Mindinga ([27]), jednakże najprawdopodobniej nie była ona wykorzystywana przez Laubera. W spisach podręczników umieszczonych w sprawozdaniach szkolnych w latach pracy Laubera nigdy nie widniały podręczniki matematyczne. Jednakże jego ówczesny dorobek naukowo-dydaktyczny, a był autorem np. *Elemente der Geometrie* [Elementów geometrii] ([23]), *Unterricht in der Reiner Elementar-Mathematik* [Wykładu czystej matematyki elementarnej] ([25]), *Arithmetik und Algebra* [Arytmetyki i algebry] ([22]), pozwala przypuszczać, że w swojej pracy z uczniami opierał się na podręcznikach swojego autorstwa lub też na notatkach, które służyły mu do napisania kolejnych.

Lauber poprzez swoją wybitną działalność nauczycielską i naukową, która oprócz matematyki dotyczyła również sposobu funkcjonowania szkół na poziomie gimnazjum i przedstawiania rozwiązań, dzięki którym sprostałyby one wymogom stawianym im przez ówczesne społeczeństwo, zwrócił na siebie uwagę Magistratu. Konsekwencją tego, było powierzenie mu w 1838 roku stanowiska dyrektora Gimnazjum Toruńskiego. Był to jedyny przypadek w XIX-wiecznej działalności szkoły, gdy jej dyrektorem został wcześniejszy nauczyciel Gimnazjum, pozostali byli wybierani z zewnątrz.

Ta decyzja Magistratu otworzyła przed Lauberem szansę dokonania zmian w Gimnazjum Toruńskim. Już w 1824 roku napisał pracę *Über den Einfluß des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf rein-menschliche Bildung* [O bezpośrednim wpływie nauczania przedmiotów przyrodniczych na „rein-menschliche Bildung”[2]] ([24]), w której uzasadnił nieoceniony wpływ nauk matematyczno-przyrodniczych na kształtowanie młodego człowieka. Według niego, optymalną formą kształcenia byłoby połączenie nauczania humanistycznego z realnym (ścisłym), przy równoczesnym bazowaniu na nauczaniu humanistycznym w klasach najmłodszych i zaczął czynić kroki ku wprowadzeniu takiego typu nauczania w Gimnazjum Toruńskim. Uważał, że jest to szansa dla szkoły toruńskiej, aby stać się instytucją kompleksową, kształcącą zarówno przyszłych prawników, jak i inżynierów.

Po wielu latach badania zapotrzebowania społeczeństwa oraz analizy różnych typów kształcenia, zdecydowano, iż najlepszym wariantem dla Torunia będzie Szkoła Realna z językami: łacińskim, niemieckim, francuskim i matematyką w wymiarze czterech godzin tygodniowo oraz dwiema godzinami języka angielskiego, przyrody, fizyki, historii i geografii w każdej z klas realnych. Reformę wprowadzono w życie w 1855 roku.

1.3 Gimnazjum Klasyczne i Szkoła Realna

Wraz z wprowadzeniem reformy otworzono dwie klasy Szkoły Realnej – realną Tertię i realną Secundę. Cykl kształcenia w szkole toruńskiej wyglądał wówczas następująco: klasy od najniższej Septimy do Quarty były klasami wspólnymi, a następnie miał miejsce podział na Gimnazjum Klasyczne i Szkołę Realną. Po ukończeniu Quarty rodzic w porozumieniu ze swoim dzieckiem i jego planami na przyszłość, miał decydować o tym, czy posłać syna do klas gimnazjalnych (gdzie większy nacisk kładziono na przedmioty humanistyczne, jednak matematyka wciąż była ważną częścią planu zajęć), czy do klas realnych, gdzie znacznie większy nacisk kładziono na przedmioty matematyczno-przyrodnicze.

[2] „Rein-menschliche Bildung” jest to rodzaj kształcenia humanistycznego. Dokładnie opisano go w [9].

Utworzenie Szkoły Realnej zmusiło Laubera do zatrudnienia drugiego specjalisty od nauczania przedmiotów matematycznych. Nauczycielem klas realnych został wówczas Eduard Fassbender.

Początkowo, program realizowany w obu klasach realnych był bardzo zbliżony do programu odpowiednich klas gimnazjalnych. Sytuacja zmieniła się dopiero w roku szkolnym 1858/1859, kiedy to otwarto realną klasę Primę i zwiększono liczbę godzin matematyki we wszystkich klasach Szkoły Realnej z czterech do sześciu godzin tygodniowo. W 1860 roku otworzono też realną Quartę (z matematyką w wymiarze sześciu godzin tygodniowo).

1.3.1 Program nauczania

Analiza programów nauczania z lat 1858-1874, 1880/1881 oraz 1884/1885 pozwala zauważyć, że Fasbender, jak i inni nauczyciele, którzy zostali zatrudnieni z biegiem czasu, np. Otto Reichel, czy Maximilian Curtze, w klasach realnych opierali się na zagadnieniach, które przed reformą realizował Lauber w klasach gimnazjalnych. Jednakże z racji na większą dyspozycję czasową robili to dużo dokładniej niż ich poprzednik. Wprowadzali też nowe zagadnienia takie, jak np. analityczne podejście do geometrii wykreślnej na podstawie pracy Fassbendera *Abriß einer Einleitung in die beschreibende Geometrie* [Zarys wprowadzenia do geometrii wykreślnej] ([16]), czy liczby zespolone wprowadzone w 1884/1885 przez Curtzego do programu nauczania Secundy w Szkole Realnej. Natomiast klasom gimnazjalnym po reformie nieco uszczuplono zakres realizowanego materiału.

I tak, przykładowo w 1869/1870 roku programy najstarszych klas Gimnazjum Klasycznego i Szkoły Realnej były następujące:

- <u>gimnazjalna Prima</u>: stereometria, uzupełnienie i rozszerzenie geometrii, ćwiczenia trygonometryczne, ułamki łańcuchowe i równania diofantyczne pierwszego stopnia.
- <u>realna Prima</u>: geometria wykreślna, stożkowe, permutacje, kombinacje, wariacje, twierdzenie o dwumianie Newtona, równania numeryczne trzeciego i czwartego stopnia, liczby figuralne, ciągi arytmetyczne wyższych rzędów.

1.3.2 Podręczniki

Materiał realizowany w klasach gimnazjalnych od Quarty wzwyż od 1858 roku w głównej mierze oparty był na treściach zawartych w podręczniku *Die Elementar Mathematik* [Matematyka elementarna] L. Kambly'ego ([18]).

Uczniowie klas realnych korzystali natomiast z *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht* [Podstaw matematyki czystej dla studiów szkolnych i własnych] K. Koppe'go ([21]), *Abriß einer Einleitung in die beschreibende Geometrie* [Zarysu wprowadzenia do geometrii wykreślnej] E. Fassbendera ([16]), a z biegiem lat też z *Algebraische Aufgabensammlung* [Zbioru zadań algebraicznych] E. Bardey'a oraz tablic logarytmicznych umieszczonych w *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch* [Poradniku logarytmiczno-trygonometrycznym] G. F. Vegi ([32]).

W roku 1884/1885 jedynym nauczycielem klas realnych był Curtze i uznał, że do nauki stereometrii w realnej Primie lepszym będzie *Hauptsäße der Elementar-*

Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen [Twierdzenia matematyki elementarnej do wykorzystania w Gimnazjach i Szkołach Realnych] G. Mehlera ([26]).

2 Wyższa szkoła dla dziewcząt

Na przełomie XVIII i XIX wieku panował w Prusach pogląd, że celem życia kobiety jest dbanie o ciepło domowego ogniska, co w silny sposób oddziaływało na ówczesne podejście do kształcenia dziewcząt. Uważano, że nie ma sensu, aby pobierały one nauki na poziomie wyższym niż podstawowy, ponieważ zdobyta tam wiedza i tak nie przydałaby im się w późniejszym życiu. W Toruniu sytuacja była o tyle zła, że nie istniały szkoły elementarne dla dziewcząt, a jedyną możliwością ich kształcenia były w tym czasie zakłady prywatne, czyli tzw. pensje.

Zmianę podejścia do wykształcenia kobiet wywołały dopiero ich działania mające miejsce w trakcie rewolucji francuskiej, a później wojen napoleońskich. Zaczęto dostrzegać, iż „kobieta jest tak samo człowiekiem jak mężczyzna, nie na to jest przecie jedynie na świecie, żeby dzieci rodziła, ale żeby też poznała stosunek swój, jako człowieka do Boga, do świata i przyrody, do kościoła i ojczyzny, aby poznała dzieje ludzkości" ([8], s. 115). Znalazło to odzwierciedlenie w postawie Magistratu toruńskiego, który w 1820 roku nakazał nauczycielowi Gimnazjum doktorowi Johannowi Paulowi Bormannowi założenie szkoły dla dziewcząt kształcącej tak, aby „geografii, historii powszechnej doskonałe wyobrażenie miały, językiem francuskim mówiły, listy lub inne wypracowania pisemne i rachunki potrzebne dobrze zrobić mogły, do rysunków, robót kobiecych i do śpiewania się wprawiały, a słowem wtem się ćwiczyły, aby się w przyszłości w towarzystwie lub powołaniu jakiem znaleźć potrafiły" ([8], s. 104). Szkoła ta powstała jeszcze w tym samym roku i początkowo nazwano ją Töchterschule für höhere Bildung, a z biegiem czasu zmieniła nazwę na Höhere Töchterschule. W jej skład wchodziły trzy klasy, a nauka w każdej z nich miała trwać trzy lata.

Od samego początku istnienia szkoły przykładano w niej dużą wagę do wykształcenia matematycznego. Dziewczęta uczyły się tutaj dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, a wszystko po to, aby później mogły bez problemu prowadzić księgi rachunkowe gospodarstwa domowego.

W 1857 roku na stanowisku dyrektora szkoły zasiadł Adolf Prowe i niezwłocznie przekształcił ją w placówkę siedmioklasową. W najwyższej klasie, którą nazwano: Selekta, miał się odbywać kurs przygotowujący do zawodu guwernantki domowej. Sześć lat później Selekta była już klasą trzyletnią, która kończyła się egzaminem nauczycielskim.

Działania Prowego doprowadziły do tego, iż w planach nauczania poszczególnych klas zwiększono liczbę godzin rachunków, a po rozporządzeniach Pruskiego Ministerstwa Edukacji z lat 1886 i 1894, które miały na celu ujednolicenie programu nauczania we wszystkich żeńskich szkołach średnich, zwiększono też liczbę zajęć z języków niemieckiego, francuskiego oraz angielskiego. Klasy niższe miały wówczas trzy godziny rachunków tygodniowo, a wyższe – dwie godziny.

Reforma szkolnictwa z 1908 roku wyrównała poziom kształcenia w szkołach męskich i żeńskich, a Höhere Töchterschule otrzymała nazwę Liceum, jej klasy nauczycielskie zostały Liceum wyższym. Na rok 1920 datuje się powstanie w Toruniu pierwszego Miejskiego Gimnazjum Żeńskiego.

3 Szkoła średnia dla chłopców

Szkoła średnia dla chłopców, tzw. Knaben-Mittelschule, powstała w Toruniu w 1873 roku ([2], s. 382) i szybko zdobyła popularność wśród młodzieży, która planowała w przyszłości zasiadać na stanowiskach urzędniczych. Jej szeroki zakres kształcenia powodował, że liczba chętnych do wstąpienia w jej mury rosła z roku na rok.

W Knaben-Mittelschule funkcjonowało sześć klas, z których najstarszą była dwuletnia (niższa i wyższa) klasa I. Największy nacisk kładziono tam na naukę języków niemieckiego i francuskiego oraz przedmiotów matematycznych, a w nieco mniejszym zakresie godzinowym nauczano religii (ewangelickiej i katolickiej), fizyki, chemii, przyrody, geografii, historii, rysunków, śpiewu, języka polskiego oraz kaligrafii (niemieckiej i łacińskiej).

Zakres materiału realizowanego na przedmiotach matematycznych omówiony zostanie na przykładzie programu nauczania z roku szkolnego 1881/1882 ([13]). Uczniowie mieli wówczas dwa podstawowe przedmioty: rachunki oraz geometrię, a wyższa klasa I miała dodatkowo dwie godziny algebry tygodniowo.

Rachunki były wykładane w następującym tygodniowym wymiarze godzinowym (od najniższej klasy szóstej do najwyższej pierwszej): 5, 5, 4, 3, 3, 3, 1. Na zajęciach tych, uczniowie klas od VI do IV zajmowali się czterema działaniami arytmetycznymi: dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem. Wpierw było to dodawanie i odejmowanie (pisemne i pamięciowe) liczb naturalnych w zakresie od 1 do 100 oraz mnożenie i dzielenie liczb w zakresie od 1 do 20 (klasa VI), następnie rozszerzano to na większe zbiory liczb całkowitych (klasa V) oraz przechodzono do obliczeń na liczbach mianowanych (klasa IV). Uczniowie klasy III poznawali ułamki zwykłe i dziesiętne, natomiast drugiej – proporcje, prostą i złożoną regułą trzech oraz obliczali odsetki. Program nauczania najstarszych klas obejmował w głównej mierze pierwiastki kwadratowe i sześcienne oraz rachunki obywatelskie, czyli takie, których znajomość była niezbędna w życiu codziennym np. do obliczania rabatów. Wszyscy nauczyciele tego przedmiotu, a było ich siedmiu, opierali się na podręczniku *Rechnenhefte* [Zeszyty rachunkowe] Pflügera.

Zajęcia geometryczne rozpoczynano w klasie IV przedmiotem „Formenlehre und Zeichnen” (*Nauka o kształtach i rysowanie*) prowadzonym w wymiarze dwóch godzin tygodniowo. Uczniowie zdobywali tutaj podstawy longimetrii[3] i planimetrii. W kolejnych latach była to już „geometria” w następującym wymiarze godzinowym: 2, 2, 3, 3 i ściśle opierano ją na podręczniku *Die Elementar Mathematik* [Matematyka elementarna] L. Kambly’ego ([18]). W klasie III powtarzano i uzupełniano wiadomości zdobyte rok wcześniej, natomiast w II przechodzono już do omawiania cech przystawania trójkątów oraz zapoznawano się z równoległobokami. W niższej klasie I omawiano wszystko co dotyczy koła oraz obliczano i porównywano pola figur płaskich, zaś w klasie wyższej: proporcje geometryczne, podobieństwa figur oraz początki stereometrii (w tym objętości brył).

[3] Longimetria, to dział geometrii zajmujący się mierzeniem długości obiektów umieszczonych na linii prostej.

Zajęcia algebraiczne prowadzone w najstarszej klasie poświęcano działaniom arytmetycznym na ułamkach, potęgom oraz rozwiązywaniu równań pierwszego stopnia z jedną i więcej niewiadomymi.

W celu kontrolowania wiedzy zdobytej przez uczniów w trakcie roku szkolnego, w kwietniu odbywały się egzaminy publiczne, na które zapraszano rodziców i wszystkich okolicznych miłośników nauki. Zazwyczaj każda z klas była egzaminowana z jednego przedmiotu i rezerwowano na to 25–30 minut. Najczęstszym przedmiotem egzaminowania, obok języka niemieckiego, były rachunki, i tak w 1882 roku egzaminowi publicznemu z rachunków poddane zostały dwie grupy zajęciowe, a pięć lat później – trzy i jedna grupa z geometrii.

Wcześniej wspomniane, duże zainteresowanie szkołą spowodowało, że niezbędnym stało się sukcesywne zwiększanie liczby grup zajęciowych w ramach poszczególnych klas. Przysporzyło też problemów kolejnym dyrektorom, którzy z racji niewystarczającej liczby sal lekcyjnych w zajmowanym budynku, nie zawsze potrafili stworzyć uczniom optymalne warunki do pracy. Zdarzało się, że grupy liczyły po 57–59 uczniów (np. w 1887 roku ([14], s. 6)). Sytuację tę zmieniło dopiero przeniesienie Knaben-Mittelschule w 1901 roku do nowego gmachu, dzięki czemu zaczęła ona działać z większym rozmachem.

4 Matura w Gimnazjach w Chełmnie, Inowrocławiu i Toruniu

Wprowadzenie egzaminów maturalnych w szkołach średnich było następstwem wieloletnich starań uniwersytetów, które upatrywały w tym szansę wyrównania poziomu wykształcenia osób zapisujących się na studia. Ostatecznie uregulowało to zarządzenie z 1788 roku ([7]) i okazało się być przedsięwzięciem na dużą skalę. Niosło ono za sobą konieczność ujednolicenia programów nauczania we wszystkich szkołach średnich na terenie Prus.

Szeroki zakres reformy wymagał stopniowego wprowadzania zmian. Z czasem pojawiały się nowe zarządzenia dotyczące zasad przeprowadzania egzaminów maturalnych oraz wydawania świadectw dojrzałości. Jedno z pierwszych wydano w 1817 roku i stanowiło ono, iż na czele każdej komisji egzaminacyjnej ma zasiadać komisarz królewski. Kolejne, to między innymi:

- *Jest dozwolone, aby pisemne prace maturalne z matematyki, fizyki i chemii odbywały się w dwóch różnych dniach, ale w taki sposób, aby czas rezerwowany na te wszystkie prace nie przekraczał 5 godzin.* (13 stycznia 1866) ([19], 1866, s. 33)
- *Egzamin maturalny nie może odbyć się wcześniej niż przed regulaminowym czasem, powinien się odbyć na koniec semestru.* (22 czerwca 1867) ([19], 1867, s. 36)
- *Przedmiotami maturalnymi dla wszystkich Gimnazjów są: język niemiecki, łacina, grecki, francuski oraz matematyka i historia. Pozostałe przedmioty nie są obowiązkowe na egzaminie. Egzamin pisemny obejmuje zawsze wypracowanie niemieckie, pracę łacińską oraz praktyczne zadania matematyczne.* (Podane do wiadomości dyrektora Gimnazjum Toruńskiego 30 czerwca 1874) ([19], 1874, s. 27)

W 1834 roku powstały też pruskie zasady egzaminowania (*Das Preussische Abiturienten-Prüfungs Reglement*) stanowiące podstawę do wydawania świadectw dojrzałości.

O egzaminach maturalnych z matematyki przeprowadzanych w Gimnazjum Toruńskim napisano w pracy [3]. Tutaj zostaną one porównane z egzaminami maturalnymi w dwóch okolicznych gimnazjach: Królewskim katolickim Gimnazjum w chebmnie[4] oraz Królewskim Gimnazjum w Inowrocławiu.[5]

Pierwsze zachowane prace maturalne z Gimnazjum w Inowrocławiu pochodzą z 1868 roku, dlatego analizie został poddany okres od 1868 do 1900 roku. Wnioski są następujące:

Cechy wspólne:

1. W każdej z tych szkół egzaminy maturalne odbywały się dwa razy do roku – po semestrze letnim i po semestrze zimowym.
2. Egzaminy maturalne składały się z dwóch części: pisemnej i ustnej. Jeżeli uczeń wyjątkowo dobrze zdał egzamin pisemny, to komisarz królewski, na wniosek pozostałych członków komisji egzaminacyjnej, mógł zwolnić ucznia z matury ustnej.
3. Na pisemnym egzaminie maturalnym z matematyki uczniowie musieli rozwiązać cztery zadania. Zazwyczaj było to po jednym zadaniu arytmetycznym, planimetrycznym, trygonometrycznym i stereometrycznym. Zdarzało się jednak, że zadanie arytmetyczne było wymieniane na zadanie z zastosowania matematyki w fizyce.

Różnice:

1. Uczniowie każdej ze szkół otrzymywali inne zadania maturalne, które często wymagały różnego typu umiejętności, np. w 1878 roku na maturze w Chełmnie pojawiło się zadanie, które wymagało biegłości w wykonywaniu rachunków na liczbach zespolonych. Zadanie tego typu nie pojawiło się na egzaminie w Gimnazjum Inowrocławskim.
2. Zadanie planimetryczne w Gimnazjach Toruńskim i Chełmińskim zazwyczaj było zadaniem konstrukcyjnym, w Gimnazjum Inowrocławskim – analitycznym.
3. Uczniowie Gimnazjum Toruńskiego i Chełmińskiego zawsze mieli z góry narzucony zestaw zadań maturalnych. Początkowo, podobnie było w Inowrocławiu, jednakże z biegiem lat maturzyści tej szkoły zaczęli mieć możliwość wyboru. W latach 1871–1882 każdy z nich otrzymywał cztery listy zadań: trzy zadania arytmetyczne, trzy planimetryczne, trzy trygonometryczne oraz trzy stereometryczne. Z każdej z tych list musiał wybrać jedno zadanie do rozwiązania. Od roku 1883 zmieniono nieco zasady. Uczniowie otrzymywali trzy warianty gotowych zestawów maturalnych, z których wybierali najbardziej odpowiedni dla siebie.

[4] Gimnazjum w Chełmnie zostało założone w 1837 roku. Funkcjonowało pod nazwą Königliche katholische Gymnasium zu Culm.
[5] Gimnazjum w Inowrocławiu powstało w 1863 roku jako Gymnasium zu Inowrazlaw. Od 1869 roku funkcjonowało pod nazwą Königliches Gymnasium zu Inowrazlaw.

Powyższa analiza pozwala zauważyć, że sposoby przeprowadzania egzaminów maturalnych w Gimnazjum Toruńskim i Gimnazjum Chełmińskim były bardzo podobne. Natomiast różnice wynikające z porównania ich z przeprowadzaniem matur w Gimnazjum Inowrocławskim, świadczą o tym, że jeszcze u schyłku XIX wieku nie wszystkie sprawy dotyczące matur były uregulowane.

5 Przykładowe zestawy zadań maturalnych z matematyki

W celu przybliżenia tematyki zadań maturalnych, przytoczymy zestawy zadań, które rozwiązywali uczniowie Gimnazjum Toruńskiego przystępujący do egzaminów dojrzałości w 1866 roku ([19], 1866, s. 31–33). Niekiedy użyto w nich współczesnej terminologii i oznaczeń.

Gimnazjum Klasyczne (czerwiec 1866 roku)

Zadanie 1. Dane są cztery kule o promieniu r, które są styczne zewnętrznie. Na nich leży piąta kula o promieniu $\frac{1}{2}r$. Punkty styczności czterech pierwszych kul wyznaczają kwadrat. Każdy wierzchołek tego kwadratu łączymy z punktami styczności piątej kuli z każdą z dwóch kul, które wyznaczają dany wierzchołek. W ten sposób wyznaczona została bryła, która jest ograniczona przez dwa kwadraty i osiem trójkątów równobocznych (jest ona różnicą pomiędzy piramidą ściętą i czterema czworościanami). Oblicz objętość tej bryły.

Zadanie 2. W trapezie $ABCD$ przekątne e i e' przecinają się pod kątem α takim, że $\cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Ponadto $e:e' = 1:3$ oraz $|AB| = \frac{7}{2}$ i $|AD| = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Znajdź e.

Zadanie 3. W trójkącie ABC dana jest długość boku AB ($|AB| = a$), długość wysokości opuszczonej na ten bok ($|CE| = h$) oraz kąt pomiędzy dwusieczną DB oraz bokiem BC ($\sphericalangle DBC = \alpha$). Skonstruuj trójkąt.

Zadanie 4. Wiedząc, że w ciągu arytmetycznym drugiego rzędu $a_2 = 3$, $a_4 = 13$, $a_7 = 43$ oraz $a_n = 57$, oblicz n.

Gimnazjum Klasyczne (wrzesień 1866 roku)

Zadanie 1. W trójkącie ABC dany jest kąt przecięcia dwusiecznych AE i DB, długość dwusiecznej CG oraz jej odległość od punktu E. Skonstruuj ten trójkąt.

Zadanie 2. W ciągu arytmetycznym drugiego rzędu $a_n = 22, a_{n-3} = 12, a_{n-5} = 7$ oraz $a_2 = 2$. Oblicz n.

Zadanie 3. W czworościan, którego krawędzie podstawy mają długość a oraz krawędzie boczne mają długość b, wpisano kulę. Drugą kulę umieszczono tak, aby była styczna do podstawy i przedłużeń ścian czworościanu. Wiedząc, że stosunek promieni tych kul wynosi $1:4$, znajdź zależność pomiędzy b oraz a.

Zadanie 4. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 30°, ponadto środkowa CD przecina bok AC pod kątem 30°. Oblicz kąt DCB.

Szkoła Realna (egzamin nadzwyczajny w czerwcu 1866 roku)

Zadanie 1. Dwa towary zostały zakupione za łączną kwotę 125 talarów. Następnie, pierwszy z nich został sprzedany za 91 talarów, a drugi za 36 talarów. Wiedząc, że po sprzedaży, na pierwszym towarze zostało zarobionych tyle procent, co na drugim zostało stracone, oblicz cenę zakupu każdego z nich.

Zadanie 2. Wyznacz punkt przecięcia wszystkich wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (7,15)$, $B = (25,11)$ oraz $C = (16,29)$.

Zadanie 3. Znając długość jednego z boków trójkąta, różnicę kątów przyległych do tego boku oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, rozwiąż go trygonometrycznie.

Zadanie 4. Czasza kuli, o objętości $4516\ m^3$, ma pole powierzchni równe $402\ m^2$. Ile m^3 ma odcinek kuli wyznaczony przez tę czaszę?

W programach nauczania szkół średnich w XXI wieku nie widnieją ciągi arytmetyczne drugiego rzędu, dlatego rozwiążemy zadanie 4 z czerwcowego zestawu maturalnego dla uczniów Gimnazjum Klasycznego. Przypomnijmy:

Zadanie 4. Wiedząc, że w ciągu arytmetycznym drugiego rzędu $a_2 = 3$, $a_4 = 13$, $a_7 = 43$ oraz $a_n = 57$, oblicz n.

Rozwiązanie.

Zanim przejdziemy do rozwiązania powyższego zadania przytoczymy definicję ciągu arytmetycznego drugiego rzędu, mianowicie:

Definicja: Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy ciągiem arytmetycznym drugiego rzędu jeżeli ciąg różnic jego kolejnych wyrazów $(a_{i+1} - a_i)_{i\in\mathbb{N}_+}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zauważmy, że w świetle powyższej definicji prawdziwy jest następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 + r = a_3 - a_2 \\ a_3 - a_2 + r = a_4 - a_3 \\ a_4 - a_3 + r = a_5 - a_4 \\ a_5 - a_4 + r = a_6 - a_5 \\ a_6 - a_5 + r = a_7 - a_6 \\ a_7 - a_6 + r = a_8 - a_7 \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu $(a_{i+1} - a_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$.

Jeżeli w powyższym układzie równań w miejsce a_2, a_4 oraz a_7 wstawimy odpowiednio 3, 13 oraz 43, oraz tak zmodyfikowany układ rozwiążemy, to otrzymujemy, że:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \\ a_5 = 21 \\ a_6 = 31 \\ a_3 = 7 \\ a_8 = 57 \end{cases}$$

Zatem szukaną wartością n jest 8.

Omówione programy nauczania przedmiotów matematycznych realizowane w XIX-wiecznych szkołach średnich Torunia, pozwalają zauważyć, że w każdej z nich dużą wagę przykładano do kształcenia matematycznego. Miało to miejsce głównie za sprawą zarządzeń Ministerstwa Oświaty, które regulowało programy nauczania we wszystkich szkołach średnich działających na terenie Prus.

Najlepiej kształcącą wówczas szkołą było Gimnazjum Toruńskie. Wypuszczało ono spod swoich skrzydeł młodzież, która w przyszłości stanowiła elitę intelektualną kraju, również w zakresie nauk matematycznych. U schyłku XVIII wieku Gimnazjum Toruńskie ukończył późniejszy wybitny matematyk Karol Hube ([1], s. 325). Od 1810 roku był on profesorem Uniwersytetu w Krakowie, nazywanego wówczas Szkołą Główną Koronną. Wykładał tam arytmetykę, algebrę, geometrię elementarną i trygonometrię. W latach 1835-1837 był rektorem tegoż Uniwersytetu, zwanego już Jagiellońskim.

Literatura

[1] Biskup M.: *Historia Torunia. Między barokiem i oświeceniem (1660–1793*). Wydawnictwo Towarzystwa Naukowego w Toruniu, Toruń, 1996.

[2] Biskup M.: *Toruń dawny i dzisiejszy – zarys dziejów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa – Poznań – Toruń, 1983.

[3] Karpińska K., Klemp-Dyczek B.: *Matura z matematyki w Gimnazjum w Toruniu w II połowie XIX w*. (w druku)

[4] *Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego T. 1* [XVI–XVIII w.], pod red. Zbigniewa Zdrójkowskiego. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Toruń, 1972.

[5] *Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego T. 4, 1681–1817*, pod red. Zbigniewa Zdrójkowskiego. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Toruń, 1973.

[6] *Mała encyklopedia powszechna PWN*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1997.

[7] Müller-Benedict V.: *Datenhandbuch zur deutschen Bildungsgeschichte, Band VI: Akademische Karrieren in Preußen und Deutschland 1850–1940*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2013.

[8] Niewęgłowska A.: *Średnie szkolnictwo żeńskie w Toruniu w latach 1820–1920*. Rocznik toruński 31 (2004), s. 101–135.

[9] Nobile N.: *The school of days: Heinrich von Kleist and the traumas of education*. Wayne State University Press, Detroit, 1999.

[10] Pleśniarski B.: *Szkolnictwo departamentu bydgoskiego w okresie Księstwa Warszawskiego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 1965.

[11] *Toruński słownik biograficzny T. 3*, pod red. K. Mikulskiego. Towarzystwo Miłośników Torunia, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń, 2002.

[12] *Zapiski Towarzystwa Naukowego w Toruniu T. 11 nr 2*. Toruń, 1938.

Źródła drukowane:

[13] *Bericht über die Knaben-Mittelschule zu Thorn für das Schuljahr von Ostern 1881 bis Ostern 1882*. Thorn, 1882.

[14] *Bericht über die Knaben-Mittelschule zu Thorn für das Schuljahr von Ostern 1886 bis Ostern 1887*. Thorn, 1887.

[15] Eberts J. J.: *Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der Mathematik*. Christian Gottlieb Hertel Verlag, Leipzig, 1787.

[16] Fassbender E.: *Abriß einer Einleitung in die beschreibende Geometrie*. Gedruckt in der Rathsbuchdruckerei, Thorn, 1857.

[17] *Jahresbericht über das Königl. katholische Gymnasium zu Culm*. Culm, 1855; Danzig, 1890–1892, 1894, 1896, 1899, 1900.

[18] Kambly L.: *Die Elementar Mathematik cz. I* (wyd. 13), II (wyd. 44), III (wyd. 13), IV (wyd. 10). Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung Ferdinand Hirt, Breslau, od 1871 do 1878.

[19] *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*. Thorn, 1861–1874, 1881, 1885.

[20] *Königliches evangelisches Gymnasium zu Thorn*. Thorn, 1859, 1860.

[21] Koppe K.: *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht cz.* I (wyd. 4), II (wyd. 4), III (wyd. 7), IV (wyd. 6). Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, od 1852 do 1867.

[22] Lauber M. L.: *Arithmetik und Algebra*. Reimer Verlag, Berlin, 1836.

[23] Lauber M. L.: *Elemente der Geometrie*. Reimer Verlag, Berlin, 1835.

[24] Lauber M. L.: *Über den Einfluß des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf reinmenschliche Bildung*. W: Nachricht von dem Gymnasium zu Thorn, Thorn, 1824.

[25] Lauber M. L.: *Unterricht in der Reiner Elementar-Mathematik*. Reimer Verlag, Berlin, 1836.

[26] Mehler F. G.: *Hauptsäße der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen*. Reimer Verlag, Berlin, 1869.

[27] Minding F.: *Über die Anfangsgründe der höheren Arithmetik*. Reimer Verlag, Berlin, 1832.

[28] *Nachricht von dem Gymnasium zu Thorn*. Thorn, 1825, 1830–1833, 1836–1842, 1845–1854.

[29] *Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn*. Thorn, 1855.

[30] *Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn und den mit demselben verbundenen Real-Klassen*. Thorn, 1856–1858.

[31] *Programm des Königl. kathol. Gymnasiums zu Culm*. Culm, 1857, 1859, 1861–1863, 1865, 1867, 1869, 1870, 1872–1874, 1876, 1878, 1887.

[32] Vega G. F.: *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch*. Reimer Verlag, Leipzig, 1830.

Źródła pisane:

[33] Egzaminy maturalne uczniów Gimnazjum w Inowrocławiu z lat 1868–1870, 1873–1878, 1882–1885, 1887, 1889, 1890, 1900, materiały dostępne w Bibliotece I Liceum Ogólnokształcącego im. J. Kasprowicza w Inowrocławiu.

Adres

Mgr. Karolina Karpińska
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń
e-mail: *bosman@mat.umk.pl*

PANTOGRAF

KRISTÝNA KŘÍŽOVÁ

Abstract: The contribution deals with a mechanical instrument called *Pantograph.* Based on homotheties, it helps to enlarge or reduce planar pictures. It was invented in the 17. century by Ch. Scheiner, a German astronomer. Many late sculptors used it for creating statues. Now we can find its principle in many different mechanisms and constructions.

1 Úvod

Pantograf je slovo odvozené z řeckého *pantós* (*pas* = všechen) a *gráfos* (*gráfo* = kreslím). Označujeme jím původně jednoduché, avšak velmi důmyslné zařízení sloužící k mechanickému vytváření zvětšených či zmenšených reprodukcí rovinných obrazů.

2 Historie

První pantograf byl sestrojen v roce 1603 německým jezuitským knězem a astronomem Christopherem Scheinerem (1573–1650). K tomuto vynálezu ho prý přivedl jeden jeho přítel a vynikající malíř, který se jednou chlubil, že dokáže mechanicky překreslovat rovinné obrázky zmenšené či zvětšené v daném měřítku. Nechtěl mu však prozradit tajemství svého zařízení, pouze naznačil, že pracuje s kružidly umístěnými v pevném středu.

Scheiner se po této příhodě pustil do experimentování, jehož výsledkem byl ještě téhož roku objev mechanismu, který nazval *Parallelogrammum Lineare*. Jeho základem byl pohyblivý rovnoběžník (latinsky *parallelogrammum*) bez své vnitřní části, tvořený tedy čtyřmi tyčemi v roli přímek jeho stran (přímka = *linea*). Svůj objev již pod názvem *Pantographice* (česky *Pantograf*) Scheiner publikoval o 28 let později v traktátu *Pantographice sue ars delineandi* [1]. V druhé části tohoto pojednání pak popisuje nový typ perspektografu,[1] založený právě na práci pantografu.

3 Popis

Scheinerův pantograf, stejně jako nejjednodušší dosud používané pantografy, se skládal ze čtyř dřevěných tyčí vytvářejících rovnoběžník (viz obr. 1). V bodech E, F, G a H jsou umístěny čepy, v nichž se spojené tyče otáčejí. Body N, O, P jsou umístěny tak, aby ležely v jedné přímce. V bodě P je pak tzv. psací hrot T, v bodě O tzv. ukazovací hrot V a v bodě X je celá konstrukce přichycena k pevné podložce. Toto uchycení umožňuje otáčení pantografu a tím jeho pohyb nad podložkou. Při samotné práci se položí zvětšovaný obrázek pod hrot V a prázdný list papíru pod hrot T. Následně se vyzkouší rozsah hrotu V po celé ploše vzorového obrázku a jemu odpovídající rozsah bodu T po volném listu. Uchopením pantografu v místě P psacího hrotu a jeho pohybem tak, aby hrot V sledoval obrysy originálu, vzniká pod bodem T jeho zvětšený obraz.

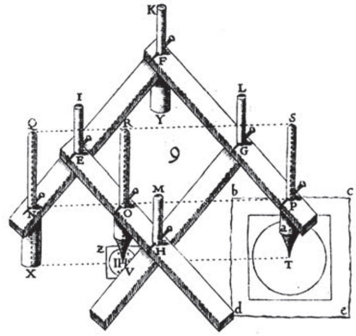
---

[1] *Perspektograf* je zařízení užívané malíři k vytváření obrazů odpovídajících pravidlům lineární perspektivy.

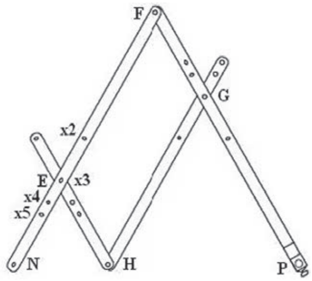
Záměnou psacího a ukazovacího hrotu V a T je možno stejným nástrojem vytvářet také zmenšené obrazy. V tomto případě se pantograf uchopí opět v místě P (kde je nyní umístěn ukazovací hrot) a zlehka se přidržuje druhou rukou v místě O (psacího hrotu). Další obměnou užití tohoto zařízení je pak posouvání bodů O a P (stále určujících přímku procházející otáčivým bodem X), čímž dochází ke změně poměru zmenšení, resp. zvětšení.

Zjednodušením tohoto pantografu je případ, kdy je sestrojen tak, aby v jedné přímce ležely body N, H a P (viz obr. 2). V tomto případě se ukazovací hrot umístí přímo do bodu H (bod O není potřeba). Změna poměru zmenšení se pak provádí posunutím čepů v bodech E, F do připravených otvorů odpovídajících požadovanému poměru.

Od doby svého vzniku se mechanismus tohoto zařízení nijak nezměnil. Měnil se pouze design, použité materiály nebo jeho uplatnění.



Obr. 1: Scheinerův pantograf



Obr. 2: Zjednodušený pantograf

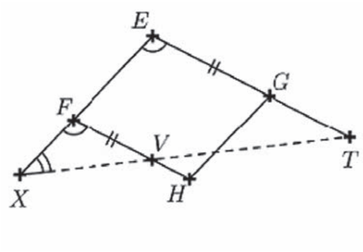
4 Princip

Princip celého Scheinerova pantografu spočívá v užití stejnolehlosti, geometrického podobného zobrazení, které se i v dnešní době učí mnohé děti již na základní škole. V Scheinerově době, tedy na počátku 17. století, však pojem geometrického zobrazení neexistoval, a proto byl objev tohoto zařízení výsledkem pokusů a experimentování s různými konstrukcemi, jejichž správné fungování bylo až následně ověřováno praktickým použitím.

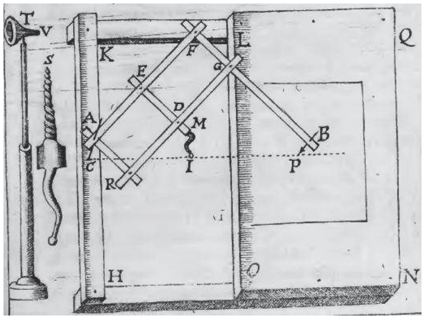
Promítneme-li Scheinerův pantograf kolmo na rovinu podložky, můžeme si jej zjednodušeně představit jako útvar daný body E, F, G, H, N=X, O=V a P=T (viz obr. 3). Protože úsečky EG a FH jsou rovnoběžné, svírají se stranou XE shodné úhly. Z toho plyne, že trojúhelníky XVF a XTE jsou podobné (podle věty *uu*). To znamená, že pro délky jejich stran platí úměra

$$|XT| : |XV| = |XE| : |XF| = k.$$

Pohybem pantografu zůstává podobnost těchto trojúhelníků i s poměrem podobnosti zachována. Zároveň body T a V leží vždy na přímce procházející pevným bodem X. Dohromady tak dostáváme, že body T a V jsou vůči sobě ve vztahu stejnolehlosti se středem X a koeficientem k. Tedy i výsledný obraz vytvořený bodem T a vzor opisovaný bodem V jsou navzájem podobné ve zmíněné stejnolehlosti.



Obr. 3: Stejnolehlost v pantografu



Obr. 4: Scheinerův perspektograf

5 Perspektograf

Na základě objevu pantografu vytvořil Scheiner i vlastní typ perspektografu (viz obr. 4 znázorňující ilustraci z [1]). Na rozdíl od všech do té doby používaných nástrojů a pomůcek, jako byly různé rámy a destičky připevněné ke stolu (jejichž autory byli např. Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci a další), bylo jeho výhodou to, že malíř nepotřeboval při práci žádného pomocníka a přímo vytvářel spojitý výsledný obraz (bez dalších pomocných obrazů či bodových reprezentací).

Scheinerův perspektograf se skládá z dřevěného rámu *KQNH* (viz obr. 4), jehož jednu polovinu tvoří obdélníková deska *LQNO*, představující reálnou rovinu, na níž vzniká výsledný obraz. Druhou polovinou je imaginární rovina určená obdélníkem *KLOH*, v níž malíř pozoruje zobrazovaný předmět. Celá tato pracovní plocha je pak upevněna ve svislé poloze mezi malíře a objekt na stůl nebo speciální stojan. Nad pracovní plochou je dále umístěn pohyblivý pantograf. Připevněn je k rámu v bodě *C*, kolem kterého se otáčí. V bodě *M* je umístěn ukazovací hrot, kterým malíř sleduje obrysy zobrazovaného předmětu, a pohybem pera umístěného v bodě *B* se zaznamenává jeho obraz na list papíru na desce *LQNO*. Aby nedocházelo k tomu, že se malíř bude dívat na objekt pokaždé z jiného bodu, upevní si před sebe ještě kukátko a celý prostor sleduje při práci jen prostřednictvím tohoto kukátka.

Z rozboru funkce pantografu již víme, že ukazovací hrot a pero vytváří navzájem stejnolehlé obrazy. Obraz, který pozoruje malíř v imaginární rovině, je perspektivním obrazem daného objektu. Proto i jeho stejnolehlý obraz musí být správným perspektivním znázorněním pozorovaného objektu.

6 3D pantograf

Podobně jako Scheinerův pantograf slouží ke kresbě zvětšených a zmenšených obrazů dvourozměrných útvarů, 3D pantograf slouží k vytváření zvětšených či zmenšených kopií trojrozměrných objektů. Jako první sestrojil zmíněné zařízení koncem 18. století skotský fyzik James Watt (1736–1819). Dále jej zdokonalil britský sochař Benjamin Cheverton (1796–1876) ve spolupráci s technikem Johnem Isaacem Hawkinsem (1772–1855), kteří společně zřejmě již kolem roku 1828 navrhli tzv. *zmenšovací zařízení* k vytváření zmenšených replik známých sochařských děl (patentováno bylo v roce 1844). Od té doby bylo používáno v manufakturách na výrobu soch z keramiky, slonoviny a dalších materiálů. Dnes se stejný postup využívá například při navrhování reliéfu mincí.

3D pantograf se skládá z Scheinerova pantografu volně připojeného body *N, E, F* (z obr. 2) k pevné ose, v nichž je však pantografu umožněn jak pohyb v rovině, kterou sám vytváří, tak rotace kolem této osy. V bodech *H* i *P* byly původně umístěny jen ukazovací hroty, později se do bodu, v němž vznikala výsledná socha, začala umisťovat třeba i elektrická zařízení na odebírání hmoty.

Pantograf se používá také obráceným způsobem ke zvětšování soch, kdy si sochař nejprve vytvoří zmenšený model budoucí sochy a přibližný skelet výsledné sochy ve skutečné velikosti. Následně umístí model i kostru do správné vzdálenosti od vodorovné osy pantografu tak, aby odpovídaly zvolenému poměru podobnosti. Poté sochař pohybem prodloužené příčky *EH* ukazuje jednotlivé body na zmenšeném modelu a jeho asistent současně na skelet zaznamenává zapichováním krátkých tyčinek, kolik hmoty bude potřeba v kterém místě ještě přidat. Na závěr, když už výsledná socha měla jasný tvar, se stejným postupem pomocí hrotu v bodě *P* mohly doplnit jemné detaily.

7 Závěr

Pojmenování *pantograf* se časem z původního označení rýsovacího zařízení rozšířilo také na samotný mechanismus pohybu použitého rovnoběžníku. Dnes jím bývají označována i celá zařízení využívající jeho principu. Tento mechanismus tak můžeme najít v nejrůznějších polohovatelných ramenech, sběračích elektrického proudu či vysunovacích konstrukcích tvořených opakujícími se rovnoběžníky, a to od hraček (např. Hobermanova sféra) až po samopodpěrné konstrukce ve stavitelství.

Literatura

[1] Scheiner Ch.: *Prattica del parallelogrammo da disegnare*. Bologna, 1653.

[2] Bussi M. B. a kol.: *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2006.

[3] Wikipedia (The free encyclopedia): *Pantograf* [online]. Poslední revize 30. dubna 2013 [cit. 30. 4. 2013].

http://cs.wikipedia.org/wiki/Pantograf

[4] Wikipedia (The free encyclopedia): *Pantograph* [online]. Poslední revize 30. dubna 2013 [cit. 30. 4. 2013].

http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph

Adresa

Mgr. Kristýna Křížová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: *175713@mail.muni.cz*

TÁLES, PYTAGORAS, EUKLIDES A VZNIK MATEMATIKY AKO DEDUKTÍVNEJ DISCIPLÍNY

LADISLAV KVASZ

Abstract: The aim of the paper is to offer an interpretation of the birth of mathematics as a deductive discipline. In contrast to the classical interpretations of this change, we interpret it as a change of the mathematical language. Comparing the styles of reasoning used by Thales, Pythagoras and Euclid we try to characterize the main stages in the development of the language of mathematics on its road towards the deductive proof.

1 Matematika v Tálesovom pojatí

Z tvrdení, ktoré sú pripisované Tálesovi, prvé štyri uvádza Proklos v *Komentári k prvej knihe Euklidových základov* [4], zvyšné dve pochádzajú od Diogena Laertského – z jeho *Životopisov významných filozofov* [2]:

T1: *Priemer delí kruh na dve rovnaké časti.*
T2: *Oproti zhodným stranám ležia v trojuholníku zhodné uhly.*
T3: *Vrcholové uhly sú zhodné.*
T4: *Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom, sú zhodné.*
T5: *Určil výšku pyramídy zmeraním dĺžky jej tieňa vtedy, keď má predmet rovnakú dĺžku ako jeho tieň.*
T6: *Každý uhol nad priemerom je pravý.*

Naším cieľom je pokúsiť sa odhaliť kognitívnu (a lingvistickú) jednotu týchto šiestich tvrdení. Opíšeme ako inovácie, ktoré Táles prináša oproti egyptskej a babylonskej matematike, tak aj určité obmedzenia či nedostatky Tálesovho pojatia.

1.1 Hlavné inovácie Tálesovho pojatia matematiky

Tálesovi pripisované tvrdenie, že priemer delí kruh na rovnaké časti, je považované za jednu z prvých viet matematiky. Proklos zdôrazňuje, že Táles svoje tvrdenie dokázal, čím sa stal zakladateľom deduktívneho prístupu v matematike (oproti praktickej matematike Egypta a Babylonu). Tálesova veta je zvláštny prípad vety o stredovom a obvodovom uhle (uvedenej v tretej knihe Euklidových *Základov*), keď stredový uhol je rovný 180º.

Ako predchodcu Tálesovej geometrie možno vziať egyptskú a babylonskú geometriu, ktoré boli dominantne založené na počítaní. Táles na miesto *kvantitatívnej kalkulácie*, na ktorej bola založená egyptská a babylonská matematika, položil *kvantitatívnu evidenciu*. Táto evidencia je aritmetická, lebo spočíva v rozpoznaní rovnosti dvoch uhlov, dĺžok, ... Avšak na rozdiel od kalkulácie, ktorej vzťah k počítaným veličinám bol v egyptskej a babylonskej matematike pomerne voľný (často nevieme rekonštruovať, čo pisár vlastne počítal), tálesovská evidencia má vysokú mieru kontrolovateľnosti a istoty.

Na vetách pripisovaných Tálesovi možno rozpoznať čosi ako *Tálesov princíp zhodnosti*. Ak sa totiž zamyslíme nad charakterom týchto tvrdení, vidíme, že väčšina z nich spočíva v nahliadnutí určitej zhodnosti, ktorá je často dôsledkom symetrie útvaru, ktorého sa tvrdenie týka. Keď s útvarom vykonáme určitú transformáciu, jeho tvar sa nezmení. Keď si túto *nemennosť* všimneme, tvrdenie sa stáva *evidentným*.

1.2 Hlavné nedostatky Tálesovho pojatia matematiky

Tálesovej geometrii chýba všeobecnosť tvrdení. Pred každou vetou Tálesovej geometrie síce stojí všeobecný kvantifikátor: *každý* priemer delí kruh na dve rovnaké časti, *každý* uhol nad priemerom je pravý... Napriek tomu si však nemožno nevšimnúť, že príslušné tvrdenia sa týkajú zakaždým iba úzkej skupiny špeciálnych útvarov. Síce každý uhol nad priemerom je pravý, ale táto veta sa týka iba jedného druhu tetív kruhu – jeho priemerov. Keď túto vetu porovnáme s Euklidovou vetou o obvodovom uhle, vidíme, že Euklidova veta je všeobecnejšia – týka sa všetkých tetív kruhu, nielen priemerov. Vo vetách pripisovaných Tálesovi sa spravidla tvrdí rovnosť (napríklad rovnosť všetkých uhlov nad priemerom), kdežto u Euklida existuje rad iných vzťahov (napríklad pomer 2:1 medzi stredovým a obvodovým uhlom). Vety Tálesovej geometrie sú *špeciálneho druhu*, viažu sa na *jeden druh* geometrických útvarov a *konštatujú rovnosť* jeho určitých aspektov.

Všetky vety dokázané Tálesom sa týkajú vlastností jediného objektu alebo nanajvýš dvoch zhodných objektov. Preto ďalšou spoločnou črtou viet Tálesovej geometrie je to, že sa týkajú ***izolovaných*** geometrických útvarov. Tálesovi chýba princíp syntézy, princíp, ktorý zjednocuje jednotlivé objekty v celok. V matematike má syntéza dvojaký charakter – na jednej strane je to *konštrukcia*, zjednocujúca časti v celok, a na druhej *dedukcia*, ktorá zjednocuje predpoklad s dôsledkom. Tálesovej geometrii chýba ***konštrukčne-deduktívna syntéza prvkov***. Táles opisuje izolované, jednoduché útvary – kruh, rovnoramenný trojuholník, polkruh (t.j. chýba konštrukčná syntéza), a všetky jeho dôkazy majú povahu bezprostredného nahliadnutia (t.j. chýba deduktívna syntéza).

Nie je ťažké si uvedomiť, že vety, ktoré tradícia pripisuje Tálesovi, možno dokázať manipuláciou (v skutočnosti či v predstave) s daným útvarom. Keď kruh prehneme cez priemer, dve polovice sa budú kryť. Podobne keď trojuholník s dvomi zhodnými stranami preklopíme podľa osi uhla, ktorý tieto strany zvierajú, bude sa kryť s pôvodným, a teda sú zhodné uhly oproti príslušným stranám. Vidíme, že dôkaz u Tálesa nemá povahu sledu argumentov, ale ide o bezprostredné nahliadnutie pravdivosti tvrdenia na základe *vhodnej manipulácie s útvarom* (preloženia, preklopenia podľa osi či otočenia).

2 Matematika v Pytagorovom pojatí

Tak ako v prípade Tálesa, aj v prípade Pytagora sa pokúsime rekonštruovať kognitívny štýl jeho matematiky vychádzajúc z obrazu, ktorý sa o Pytagorovi a Pytagorejcoch zachoval v tradícii. Uvedomujeme si problémy spojené s nedostatkom svedectiev (pozri [1], [7] a [8]), ale domnievame sa, že ak sa podarí v poznatkoch pripisovaných Pytagorovi (podobne ako tomu bolo v prípade Tálesa) odhaliť určitý jednotný kognitívny štýl, podporí to hypotézu o existencii jeho tvorcu.

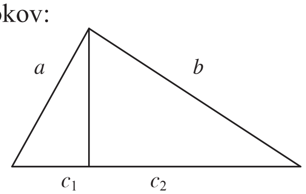
2.1 Hlavné inovácie Pytagorovho pojatia matematiky

Je známe, že pytagorejci pripisovali číslam ontologický status a považovali ich za súcna, dokonca za *arché*. Pytagorejská matematika povyšuje na úroveň ontologického substrátu ***objekty predchádzajúcej idealizácie*** (t.j. čísla, na ktorých bola založená matematika v Egypte a Babylóne), ***obohatené o určitý aspekt idealizácie novej***. Pytagoras berie čísla a obohacuje ich o polohu a tvar v teórii figurálnych čísel. Čísla umožňujú pytagorejcom zjednotiť najrozličnejšie javy (hudobnú harmóniu, geometrickú podobnosť, astronomickú periodickosť) do jednotného rámca, čím prepožičiavajú svetu ontologickú jednotu. „*Svet je jednota protikladov vyjadrená v podstate čísla*."

Proklos v súvislosti s Tálesom uvádza pozoruhodný detail, že Táles dokázal zhodnosť trojuholníkov za predpokladu zhodnosti ich dvoch strán a uhla nimi zovretého, ale nazval tieto trojuholníky „*po starom podobnými*". Táles akoby podobnosť, čo je pre geometriu fundamentálnym javom, stotožnil so zhodnosťou. Až jasné pochopenie rozdielu medzi zhodnosťou a podobnosťou odhaľuje zvláštny nedostatok Tálesovej geometrie, že totiž jej vety sú vetami o ***zhodnosti***. Vidno to na meraní výšky pyramídy, kedy samozrejme vôbec nie je nutné čakať, až kým budú tiene telies rovnako dlhé ako ich výška, ale stačí v ľubovoľnom okamihu určiť, koľkokrát je tieň dlhší než teleso, a v rovnakom pomere bude aj výška pyramídy k dĺžke jej tieňa. Takto (pomocou číselných pomerov) by asi postupovali pytagorejci. Táles však geometriu založil na zhodnosti, a tak musel počkať, až budú dĺžka telesa a jeho tieňa rovnaké. Tálesovská geometria dokáže dať do súvisu iba určitý jav ***s tým istým javom prítomným na danom alebo na zhodnom objekte***. Je to preto, že zhodnosť identifikuje ako telesné (alebo mentálne) prekrytie objektov.

Až pytagorejci prechodom k aritmetickej ontológii postulovali za každým javom jeho aritmetický substrát, a mohli tak za základ geometrie položiť ***podobnosť***, ktorá je daná konštantným pomerom zodpovedajúcich si čísel. Radikálnosť tohto posunu môžeme dnes iba ťažko doceniť, pretože pre nás je podobnosť, chápaná ako konštantnosť pomerov, *geometrickým* javom a keďže disponujeme pojmom reálneho čísla, úsečkám automaticky pripisujeme pomery. Ale bola to až pytagorejská redukcia geometrie na čísla, ktorá umožnila vypracovať pojem podobnosti. Dva útvary sú podobné, keď ***čísla prislúchajúce ich korešpondujúcim si úsečkám sú v rovnakých pomeroch***. Musíme si odmyslieť euklidovskú techniku priraďovania pomerov priamo úsečkám bez sprostredkujúceho článku aritmetickej ontológie, aby sme pochopili význam tejto aritmetickej redukcie.

Keď zoberieme *Pytagorovu vetu* ako jeden z hlavných poznatkov pytagorejskej matematiky, okamžite si všimneme rozdiel oproti vetám Tálesovej geometrie. Pytagorova veta, že súčet štvorcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa rovná štvorcu nad preponou, je ***veta o zloženom objekte***. Hovorí o štvorcoch nad odvesnami a preponou pravouhlého trojuholníka. V jej euklidovskej verzii vystupujú aspoň štyri objekty – trojuholník a tri štvorce. Dôkaz Pytagorovej vety, uvedený van der Waerdenom v [7], je blízky pôvodnému Pytagorovmu dôkazu. Obsahuje jednu pomocnú čiaru, ktorá delí trojuholník na dva podobné. Dôkaz je reťazcom pozostávajúcim z evidencií a kalkulatívnych krokov:



Z podobnosti malého trojuholníka s celým dostávame

$$a : c_1 = c : a \qquad \text{preto} \qquad a^2 = c \,.\, c_1$$

analogicky

$$b : c_2 = c : b \qquad \text{preto} \qquad b^2 = c \,.\, c_2$$

a teda sčítaním identít uvedených vpravo máme

$$a^2 + b^2 \quad = \quad c \,.\, c_1 + c \,.\, c_2 \quad = \quad c \,.\, (c_1 + c_2) \quad = \quad c^2$$

V tomto dôkaze máme do činenia so štyrmi krokmi: **1.** podobnosť trojuholníkov vyjadríme pomocou pomeru čísel zodpovedajúcim ich stranám; **2.** tieto pomery upravíme podľa pytagorejského princípu, že súčin vonkajších členov pomeru je rovný súčinu jeho vnútorných členov; **3.** takto vzniklé identity sčítame a **4.** výsledok upravíme. Takže oproti tálesovskej geometrii, ktorej vety sa týkali izolovaných objektov a dôkazy mali povahu bezprostredného nahliadnutia, pytagorejská matematika prináša ***syntézu prvkov útvaru*** (t.j. štvorcov nad stranami trojuholníka) ako aj ***syntézu krokov dôkazu***. Ešte to nie je *konštrukčne-deduktívna* syntéza, ako ju poznáme z Euklidových *Základov*, ale skôr aritmetická syntéza. Pytagorejská matematika zasadzuje izolované útvary tálesovskej geometrie do vzájomných súvislostí pomocou aritmetických vzťahov. Tieto aritmetické vzťahy Euklides nahradí konštrukčne-deduktívnymi vzťahmi.

Okrem aritmetickej syntézy charakterizuje prechod od Tálesa k Pytagorovi aj nárast všeobecnosti. Vety tálesovskej matematiky sú v zásade vety tvrdiace zhodnosť a teda sa týkajú rôznych výskytov jediného geometrického javu (uhla určitej veľkosti alebo úsečky určitej dĺžky). Preto aj keď sú formulované ako všeobecné tvrdenia (napríklad, že v *každom* rovnoramennom trojuholníku ležia oproti zhodným stranám zhodné uhly), fakt, ktorý tvrdia, je dosť ***špeciálny*** (identitou dvoch uhlov) a týka sa pomerne ***úzkej triedy*** objektov (rovnoramenných trojuholníkov).

Pytagorejské pravidlo, že „*v každom pomere je súčin vonkajších členov rovný súčinu vnútorných*“, ktoré sme použili pri dôkaze Pytagorovej vety, má iný typ všeobecnosti než Tálesova veta o rovnoramennom trojuholníku. Toto pravidlo možno v zásade použiť na ľubovoľné útvary, pravouhlé, rovnoramenné a ľubovoľné iné. Netvrdí žiadnu identitu uhlov či dĺžok, ale napríklad o útvare uvedenom vyššie tvrdí, že od pomerne zrejmého vzťahu $\boldsymbol{a : c_1 = c : a}$, ktorý bezprostredne vyplýva z podobnosti, môžeme prejsť ku vzťahu $\boldsymbol{a^2 = c \,.\, c_1}$, ktorý je už menej zrejmý. Pytagorejské pravidlo umožňuje teda prejsť od vzťahu $a : c_1 = c : a$ ku vzťahu $a^2 = c \,.\, c_1$. Nejde o nejaký fakt, ale skôr o pravidlo, zväzujúce dva rôzne fakty.

Aby bolo možné najrozličnejšie javy takto dávať do vzájomného súvisu, postulujú pytagorejci spoločnú jednotku, ktorá umožňuje prejsť od jedného javu k druhému a pomocou aritmetických kalkulácií preniesť vzťahy z jedného javu na druhý. Spoločná jednotka tak zabezpečuje prepojiteľnosť javov do spoločnej ***kalkulatívno-argumentačnej schémy***. Argumentácia tu ešte nemá charakter dedukcie, akú nadobudne u Euklida, ale často (napríklad v uvedenom dôkaze Pytagorovej vety) ide o manipuláciu s číslami. Takto pytagorejská aritmetická syntéza má spoločné črty s Tálesovou manipuláciou, ale na rozdiel od nej, tu sa nemanipuluje s fyzickými predmetmi, ale s číslami, teda s ideálnymi objektmi predchádzajúcej idealizácie.

2.2 Hlavné nedostatky Pytagorovho pojatia matematiky

Podľa Aristotelovho svedectva považovali pytagorejci čísla za niečo materiálne. Sama o sebe je táto črta nepochopiteľná, dnes si iba ťažko vieme predstaviť čísla ako telesné substancie. Toto stotožnenie látky a čísla znemožňuje oddeliť kauzálne vzťahy existujúce v materiálnom svete od nevyhnutných vzťahov platných vo svete matematiky a tým vlastne aj viesť ľubovoľný dôkaz.

V pytagorejskej matematike existuje problém so spojením dvoch aspektov teórie, a to kalkulatívneho a deduktívneho. Tento problém pytagoreizmu možno interpretovať ako neoddelenosť kalkulatívnej a argumentatívnej syntézy. Problém spočíva v tom, že kalkulatívna a aregumentatívna stránka dôkazu sú nekontrolovateľne zmiešané, a často sa argumentuje priamo počítaním, manipuláciou s číslami. Vo všeobecnosti môžeme hovoriť o vzťahu kalkulatívnej a argumentatívnej syntézy v pytagoreizme. Zdá sa, že matematika vyžaduje oddelenie týchto dvoch druhov syntézy – tak ako sa s tým stretávame u Euklida.

Nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca bol asi najvýznamnejším objavom pytagorejcov. Je to poznatok, ktorý vyjadruje určitú naprosto všeobecnú vlastnosť čísel. Nesúmerateľnosť nie je nič konkrétne, nie je to vlastnosť určitého konkrétneho útvaru, ako boli vety tálesovskej geometrie, ale vlastnosť systému všetkých čísel – vlastnosť, ktorá hovorí, že pomer strany a uhlopriečky štvorca nie je možné vyjadriť pomocou ***žiadnych čísel***. Túto mieru všeobecnosti Táles nikdy nedosiahol.

Objav nesúmerateľnosti rozvrátil pytagorejskú koncepciu matematiky. Euklidove *Základy* predstavujú do veľkej miery prebudovanie pytagorejskej matematiky a korekciu jej osudovej chyby (keď na miesto *ontologických základov*, na ktorých postavil svoju stavbu Pytagoras, položil Euklides *axiomatické Základy*). Nesúmerateľnosť znamená zrútenie pytagorejskej doktríny. Univerzálnosť tohto zrútenia svedčí o univerzálnosti samotnej doktríny, že *svet je harmónia protikladov vyjadrená v podstate čísla*. Táto doktrína nehovorí o nejakom kruhu rozdelenom priemerom na dve časti, alebo o rovnoramennom trojuholníku, ale ***o svete v jeho celistvosti***. Aj keď sa táto doktrína zrútila, je dokladom radikálnej všeobecnosti pytagorejskej matematiky.

Okrem neschopnosti zahrnúť nesúmerateľnosti do svojej teórie (čo by sme mohli označiť termínom ***expresívnej otvorenosti*** pytagorejskej matematiky) má pytagoreizmus aj ďalší zásadný nedostatok, ktorým je ***logická otvorenosť*** matematiky. Pytagorejský dôkaz spočíva v odvodení daného tvrdenia zo základnejších tvrdení, ktoré sú považované za zrejmé. Avšak obraz o tom, čo pri takomto odvodzovaní vlastne môžeme použiť, ostáva neurčitý. Rovnako, ako je neurčité to, čo treba považovať za jednotku, teda ako hlboko treba ísť v rozkladaní daného objektu na jednoduché (až nakoniec objav nesúmerateľnosti ukázal, že u niektorých javov spoločná jednotka neexistuje), ostáva neurčitým aj to, čo máme považovať za princíp, čiže ako hlboko treba ísť v rozkladaní daného tvrdenia na jednoduchšie.

Základnou pytagorejskou inováciou, ktorá mala rozhodujúci vplyv na ďalší rozvoj matematiky, bolo vytvorenie ontologickej bázy matematiky. Tým, že každý matematický jav získal ontologické ukotvenie v číslach a ich pomeroch, matematika získala nesmierne silný nástroj syntézy, ktorý sme ilustrovali na dôkaze Pytagorovej vety. Keďže dĺžky strán trojuholníka ***sú čísla*** a jav podobnosti je určený ***číselnými pomermi***, číselné pomery možno ***aritmeticky upravovať*** a takto získané číselné vzťahy je možné ***sčítať***, odvodili sme platnosť Pytagorovej vety. Toto odvodenie má však jeden závažný nedostatok. My vlastne ***nevieme určiť*** číslo, ktoré prislúcha strane daného trojuholníka, nevieme, čo je jednotka a koľko takýchto jednotiek je obsiahnutých v jednotlivých stranách. Objav nesúmerateľnosti ukázal, že určitým javom žiadne čísla priradiť nevieme. Rovnoramenný pravouhlý trojuholník sa vymyká jazyku čísel. To je fatálny nedostatok, lebo tým sa rozpadá celá kalkulatívne-argumentačná syntéza.

Uvedené negatívne aspekty nepovažujeme za chyby či nedôslednosti Pytagorovho myslenia, ale ide o epistemologickú črtu jazykového rámca pytagorejskej matematiky. Problémom je, že Pytagoras používa pre ***geometrické javy*** (ktoré skúmal Táles) ***jazyk aritmetiky*** ako rámec pre ich kalkulačne-argumentačnú syntézu. Na jednej strane musíme uznať Pytagorovu zásluhu na tom, že si uvedomil, že nie je možné vybudovať čisto fenomenálnu matematiku (o akú usiloval Táles). Vytvorenie ontologickej bázy bolo zásadným krokom vpred v rozvoji matematiky. To, že čísla nemôžu splniť úlohu ontologického základu matematiky, t.j. že nie je možné vytvoriť úplný a racionálne kontrolovateľný preklad geometrických javov do jazyka aritmetiky, nemožno Pytagorovi vyčítať. Vo svojej dobe nemal k dispozícii nič lepšie. Keď už bola príslušná ontológia vytvorená, bolo omnoho jednoduchšie (Euklidovi) jej nedostatky odstrániť a pretvoriť ju v inú, fungujúcu ontológiu.

3 Matematika v Euklidovom pojatí

Na rozdiel od Tálesa a Pytagora u Euklida máme k dispozícii rozsiahly korpus, takže je možné tento bod presnejšie vyložiť, a tak dodať aj ostatným dvom zložkám našej konštrukcie (tálesovskej a pytagorejskej) nepriamo určitú podporu. U Euklida nebudeme hovoriť o nedostatkoch jeho pojatia matematiky, lebo Euklidovo pojatie je pre matematiku konštitutívne. To neznamená, že by na jeho diele nebolo čo opravovať. Toto opravovanie však už patrí do dejín matematiky a nie do výkladu jej vzniku.

3.1 Prebudovanie matematiky na geometrické základy

Jednou z najdôležitejších euklidovských inovácií bolo ***oddelenie matematiky od jej pytagorejského aritmetického substrátu*** (nepíšeme Euklidovej ale euklidovskej, lebo toto oddelenie sa udialo ešte v Platónovej Akadémii a uskutočnili ho pravdepodobne matematici ako Eudoxos a Teaitetos) a jej ***prebudovanie na geometrických základoch***. Je však dôležité, že geometrický tvar sa po pytagorejskej epizóde nevrátil späť do roviny perceptívnych kvalít, ako tvaru rozumel Táles, ale zachoval si sieť vzťahov podobnosti a proporcií, do ktorých ho Pytagorejci pomocou svojej aritmetickej ontológie zaplietli. Jednoznačné kvantitatívne vzťahy medzi rôznymi časťami geometrického útvaru už síce nie sú nesené aritmetickou ontológiou (ako tomu bolo u pytagorejcov), ale neredukujú sa ani na súbor triviálnych zhodností prístupných bezprostrednej evidencii (ako tomu bolo u Tálesa). Napríklad tvrdenie, že dva kruhy sú k sebe ako štvorce nad ich priemermi, je tvrdením o pomere obsahov dvoch kruhov a nie o zhodnosti útvarov. A Euklidov dôkaz pomocou exhaustácie a dvojitej redukcie ad absurdum je všetko iné než evidentný.

3.2 Oddelenie skladobnej syntézy od deduktívnej

Pytagorova ontologická homogenizácia matematického univerza pomocou čísel, kde každý jav vyložil ako určitý súbor (či spojenie) jednotiek, umožnilo spájať objekty do väčších celkov. Toto spájanie malo povahu prikladania jednej či viacerých jednotiek tak, aby sa zachoval určujúci princíp (výsledný tvar celku, pomery častí – tak, ako si to ten-ktorý prípad vyžadoval). U pytagorejcov sa dôkaz zakladal na *aritmetickej syntéze*, ktorá bola súčasne *skladobnou syntézou* spájania častí do celku a *deduktívnou syntézou* prenášania určujúceho princípu objektu na nasledujúce. Euklides ***oddelil deduktívnu syntézu od skladobnej***. Striktné oddelenie konštrukcie od dokazovania, ktoré je zreteľne vidno na Euklidových *Základoch*, možno považovať za korekciu pytagorejského zmiešavanie ontologickej a deduktívnej stavby matematiky.

3.3 Nahradenie kalkulácie konštrukciou

Euklides nahradil aritmetickú formu skladobnej syntézy, ktorá bola charakteristická pre pytagorejskú matematiku, geometrickou konštrukciou. Nový objekt sa nerodil pridávaním jednotiek, ale krokmi geometrického konštruovania, ako je spojenie dvoch bodov rovnou čiarou alebo opísanie kružnice okolo daného bodu.

3.4 Skladobné uzavretie matematiky pomocou postulátov

Jedným z nedostatkov pytagorejskej matematiky je, že čísla, pomocou ktorých vykladá rôzne javy (napríklad strany trojuholníka pri dôkaze Pytagorovej vety), sú s týmito javmi asociované iba veľmi voľne. To má za následok istú neurčitosť celej pytagorejskej matematiky. Aj keď, ako sa zdá, *axiómy* existovali už pred Euklidom, domnievame sa, že Euklidovým vkladom do rozvoja matematiky bola formulácia ***postulátov***. Postuláty sú požiadavky fixujúce konštrukčné kroky. Teda postuláty zabezpečujú jednotlivé kroky skladobnej syntézy a tak odstraňujú skladobnú neurčitosť, ktorá bola charakteristická pre celú pytagorejskú matematiku. Vďaka postulátom sa objekt zostrojený v rámci geometrickej konštrukcie ***môže stať predmetom dokazovania***. Postuláty tak skladobne uzatvárajú univerzum matematiky a prepájajú skladobnú syntézu s deduktívnou.

3.5 Deduktívne uzavretie matematickej teória

U Tálesa dôkaz spočíval v priamom nahliadnutí pravdivosti dokazovaného tvrdenia. Ako sme videli na dôkaze Pytagorovej vety, pytagorejský dôkaz je už spojením viacerých krokov. Možno preto povedať, že spočíval v ***odvodení*** pravdivosti daného tvrdenia pomocou ***postupnosti krokov*** založených na predpokladoch, ktoré boli považované za ***evidentné***. Postupne sa rodí potreba, aby sme pravidlá, ktorými sa riadime pri príslušných krokoch, urobili explicitnými a postavili tak určitú matematickú disciplínu na plne explicitných, t.j. axiomatických základoch. Podľa tradície tvorcom prvých takýchto základov bol Hypokrates. Keď spravíme explicitnými pravidlá, ktorými sa pri dôkaze riadime, dôkaz sa mení v deduktívne zdôvodnenie. Euklidove axiómy predstavujú zoznam deduktívnych princípov, ktorými sa matematika riadi. Ich zoznam u Euklida asi nie je pôvodný a Euklides jednotlivé axiómy pravdepodobne prevzal zo starších textov. Avšak pôvodné sa zdá byť spojenie axióm s postulátmi, čo umožnilo Euklidovi ***deduktívne uzavrieť matematiku***.

4 Záver

V rozmedzí niekoľkých strán samozrejme nie je možné detailne vyložiť proces vzniku matematiky ako deduktívnej disciplíny. Dúfame však, že sa nám podarilo aspoň v hrubých rysoch načrtnúť prístup k tomuto problému, ktorý je alternatívou klasických výkladov vzniku matematiky u Heatha [3], Szabóa [5] a van der Waerdena [6].

Literatúra

[1] Burkert, W.: *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Harvard UP, Cambridge, MA, 1972 [nemecký originál: 1962].

[2] Díogenés Laertos: *Životy, názory a výroky proslulých filosofů*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1964 [spis vznikol okolo roku 200].

[3] Heath, T.: *A History of Greek Mathematics*. Vol. 1, Dover, New York, 1981 [prvé vydanie 1921].

[4] Proclos: *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press, Princeton, 1970 [spis vznikol okolo roku 450].

[5] Szabó, A.: *Beginnings of Greek Mathematics*. Akadémia Kiadó, Budapest, 1978 [nemecký originál 1969].

[6] van der Waerden, B. L.: *Erwachende Wissenschaft*. Birkhäuser, Basel, 1966 [holandský originál 1954].

[7] van der Waerden, B. L.: *Die Pythagoreer*. Artemis Verlag, Zürich, 1979.

[8] Zeller, E.: Pythagoras und die Pythagorassage. In: *Vorträge und Abhandlungen*. Leipzig, 1865, 30 –50.

Poďakovanie

Príspevok je súčasťou grantovej úlohy VEGA 1/0874/12 *Historické a filozofické aspekty porozumenia jazyku matematiky*.

Adresa

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: *kvasz@fmph.uniba.sk*

HISTÓRIA MATURITNÝCH SKÚŠOK Z MATEMATIKY NA SLOVENSKU

TOMÁŠ LENGYELFALUSY

Abstract: The contribution deals with the changes in organizing school leaving examination (not only) in mathematics in Slovakia. It briefly introduces individual periods in the development of school leaving exams in mathematics and it points to the major changes (positive and negative) in their organizing in the recent 150 years.

1 Úvod

Maturitná skúška v každej dobe znamenala ukončenie nejakej etapy edukácie a začiatok niečoho nového. Skladba predmetov maturitnej skúšky, ich požiadavky a realizácia písomnej a ústnej časti (ak vôbec existovali) tvoria predmet nášho skúmania. V tomto krátkom príspevku sa pokúsime poukázať na osobitosti realizácie maturitných skúšok vo všeobecnosti a v matematike obzvlášť. Podľa možnosti aspoň teoreticky „precestujeme" celé obdobie existencie maturitnej skúšky, čiže obdobie od roku 1849 až po rok 1990. Nakoľko po roku 1990 došlo k významným zmenám v organizovaní (nie len) maturitných skúšok, k tejto oblasti sa budeme venovať v niektorom z ďalších príspevkov v budúcnosti.

2 Počiatky maturitnej skúšky a jej realizácia v 2. polovici 19. storočia

Po porážke revolúcie 1848/49 vydal minister školstva Lev Thun pre všetky gymnázia a reálky nový organizačný poriadok (*Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Osterreich* [1]). Prvýkrát v histórii práve *Entwurf* zavádza pojem „maturitnej skúšky" a podrobne pojednáva aj o spôsobe jej organizovania, prípravy, skúšania a hodnotenia. Prvé maturitné skúšky na území dnešného Slovenska sa podľa *Entwurfu* konali už v školskom roku 1851/52 v Bratislave a neskôr postupne v ostatných mestách. Napríklad v školskom roku 1852/53 v Nitre a v Košiciach, 1853/54 v Kežmarku a v Trnave, 1855/56 v Banskej Bystrici a Prešove, 1856/57 v Rožňave atď. Zo svojich 122 paragrafov v jedenástich (§78–88) sa *Entwurf* venuje maturitnej skúške. Pozrime sa na najdôležitejšie ustanovenia (citáty) tohto dokumentu týkajúce sa maturitnej skúšky a to hlavne z matematiky:

1. Na písomnej maturitnej skúške v uzavretej miestnosti za presne určený čas treba zvládnuť :
    a. slohovú prácu v materinskom jazyku – 5 hodín
    b. preklad z latinčiny – 2 hodiny
    c. preklad z gréčtiny – 3 hodiny
    d. preklad do latinčiny – 3 hodiny
    e. previerku z matematiky – 4 hodiny
2. Úlohy na písomnú skúšky z matematiky treba zostaviť tak, aby obsiahli hlavné časti učiva a aby sa dala na základe ich riešenia jednoznačne určiť pripravenosť študenta.
3. Ústne maturitné skúšky sa konajú v prvých štyroch týždňoch po začatí nového školského roku za prítomnosti jedného člena príslušného školského úradu, ktorý je zároveň predsedom komisie.
4. Súčasťou ústnej maturitnej skúšky sú: literatúra materinského jazyka, latinský jazyk a literatúra, grécky jazyk a literatúra, dejepis a zemepis, matematika, prírodopis a fyzika,

jazyk a literatúra ďalšieho živého jazyka, ak si to dobrovoľne zvolil maturant aj ako predmet na písomnú časť maturitnej skúšky. Každý študent absolvuje všetky predmety v jeden deň, pričom sa môže skúšať maximálne 15 študentov za deň. Na skúšanie treba vyčleniť 8 – 9 hodín čistého času, samozrejme s prestávkami.

5. Pre hodnotenie písomných a ústnych skúšok sú vypracované určité požiadavky, s ktorými sú vopred oboznámení aj študenti. Požiadavky sa nesmú sústrediť iba na učivo posledného ročníka. V prípade matematiky sú požiadavky nasledovné: z planimetrie a trigonometrie musí mať študent také skúsenosti, aby bezpečne vedel dokázať jednotlivé tvrdenia a samostatne riešiť úlohy. Z ďalších oblastí geometrie musí mať rozsiahle vedomosti a vedieť samostatne dokázať hlavné tvrdenia. Ďalej musí vedieť riešiť lineárne rovnice s jednou a viac neznámymi, kvadratickú rovnicu, pohotovo počítať s logaritmami a v súvislostiach vidieť hlavné tvrdenia z iných oblastí algebry ([1] §78–88).

Po podrobnom preskúmaní týchto spomenutých jedenástich paragrafov o maturitnej skúške zisťujeme, že mnohé „moderné“ návrhy terajšej novej koncepcie maturitných skúšok majú korene už v druhej polovici 19. storočia.

3 Zmeny v organizovaní maturitnej skúšky v 1. polovici 20. storočia

Po roku 1918 prešiel vývoj maturitných skúšok z matematiky menšími úpravami (1922, 1939), ale ich podstata, poslanie a obsah ostali nezmenené. Od školského roku 1942/43 bol v platnosti nový skúšobný poriadok z ktorého vyberáme časti týkajúce sa matematiky.

Skúška zrelosti pozostávala z dvoch častí : písomnej a ústnej.

Písomná skúška sa okrem iných predmetov vykonávala z deskriptívnej geometrie. Na túto skúšku bolo určených 5 hodín. Z deskriptívnej geometrie navrhol profesor šesť úloh z učiva vyšších tried. Príslušný ústredný inšpektor vybral z navrhnutých úloh iba tri a tie poslal v zapečatenej obálke riaditeľstvu. Riaditeľ dané obálky otváral až pred začiatkom práce pred kandidátmi a profesorom. Kandidát mal ukázať, že vyrieši vhodne ťažkú úlohu v priestore, nepredvedenú v škole a narysuje presne a úhľadne riešenie podľa predpísaného spôsobu premietania. Ceruzkou mal vypracovať všetky tri určené úlohy a z nich aspoň jednu vyhotoviť úplne (to znamená, že danú úlohu vytiahol tušom a vyfarbil).

Ústnu skúšku zrelosti skladali kandidáti z piatich predmetov, z ktorých boli tri povinné a dva voliteľné predmety obsiahnuté v určených skupinách. Na gymnaziálnom základe si kandidát mohol vybrať z voliteľných predmetov aj matematiku, na reálnej vetve mal možnosť výberu medzi matematikou a deskriptívnou geometriou.

Z predmetov, z ktorých mal kandidát nedostatočnú písomnú prácu, musel skladať ešte aj ústnu skúšku. Pred začiatkom ústnych skúšok mali žiaci VIII. triedy voľno 8 vyučovacích dní. Ústne skúšky boli dopoludnia aj popoludní. Skúška kandidáta z jedného predmetu nemala trvať viac ako 15 minút. Podľa prospechu žiaka tento čas bolo možné aj skrátiť.

Examinátor prichystal vopred lístky s otázkami pre všetkých kandidátov, ktoré boli zoskupené do troch skupín podľa výročného prospechu. Boli to: veľmi dobrí, prospešní a slabší kandidáti. Počet lístkov musel byť aspoň o tretinu väčší ako počet kandidátov. Najmenší počet lístkov, z ktorých si mal kandidát vybrať otázky zo skúšaného predmetu, bol desať. Ústna skúška mala ráz kolokvia, dávala možnosť rozhovoriť sa kandidátovi naširoko o otázke a podať v súvislom výklade podľa možnosti samostatný obraz hlavných jeho zložiek.

Cieľom ústnej skúšky z matematiky bolo ukázať zbehlosť v matematickom myslení a takú znalosť matematiky, aby kandidát samostatne riešil úlohy teoretické alebo praktické, čo patria k predpísanému stredoškolskému učivu. Mal sa vyznať v mechanizácii numerických výpočtov pri všeobecnom počítaní, používaní symboliky a tiež v používaní tabuliek, ak ide o riešenie problémov pomocou tabuľových veličín.

Kandidát riešil dva príklady, alebo jeden príklad a druhú všeobecnú otázku z dôležitej časti matematiky, praktického alebo teoretického významu. Príklady sa volili tak, aby zapadali do rozličných odborov a aby sa mohli riešiť rozličnými metódami. Na všeobecných otázkach mal ukázať kandidát svoj postoj k matematike a mieru, do akej hĺbky si osvojil spôsoby matematického myslenia.

Pri ústnej skúške z deskriptívnej geometrie mal kandidát ukázať zbehlosť pri zvyčajných druhoch premietania a v neveľmi zložitých úlohách z predpísaného učiva pre túto náuku, ako aj dostatočne vycibrenú priestorovú predstavivosť. Ústna skúška mala mať na zreteli chyby kandidáta na písomnej skúške (pozri tiež [3]).

4 Zmeny v organizovaní maturitnej skúšky v povojnovom období

Po 2. svetovej vojne boli vydané mnohé školské legislatívne predpisy, ktoré viac či menej upravovali aj realizáciu maturitných skúšok (1953, 1960, 1964, 1976, 1984, 1987, 1990). Z nich vyberáme najcharakteristickejšiu smernicu Ministerstva školstva a kultúry z 20. 10. 1964 č. 42 130/1964-II/3.

Maturitné skúšky z matematiky sa konali iba v ústnej forme. Matematika bola povinným maturitným predmetom na stredných všeobecnovzdelávacích školách a voliteľným predmetom na pedagogických školách. Žiak mal pri maturitnej skúške ukázať, že má prehľad v predpísanom učive, ovláda ho po teoretickej stránke a vie ho uvedomene aplikovať v praxi. Mal ukázať, že vie logicky myslieť, analýzou rozčleniť zložitejší problém na jednoduchšie otázky, zmobilizovať svoje vedomosti a vybrať z nich tie, ktoré sú na matematické vyjadrenie daného problému potrebné. Pri úlohách daných na riešenie mal ukázať, že ich vie správne zaradiť do príslušného učiva, má správny postreh pri výbere vhodného prístupu a vie jednotlivé kroky teóriou odvodiť. Nato musel žiak dobre ovládať vzájomnú logickú nadväznosť jednotlivých častí učiva, matematické pojmy, definície, rôzne vzorce, matematickú symboliku. Mal ukázať zbehlosť v algebrických úpravách výrazov, zbehlosť v numerickom počítaní, gramotnosť prejavujúcu sa v zručnom skicovaní pomocných náčrtov, rozvinutú priestorovú predstavivosť.

Maturitné otázky mali obsiahnuť celé osnovami vymedzené učivo strednej školy i závažnejšie partie učiva základnej školy, ako napríklad percentá, algebrické zlomky, konštrukčné úlohy a pod. Dôležitá bola príprava maturitných otázok. Vyučujúci si pripravil pre každú triedu 50 otázok, do ktorých rozložil osnovami predpísané učivo strednej školy. Pritom bral do úvahy príslušný variant osnov. Uvedených 50 otázok rozložil do dvojíc otázok. Prvá z nich sa mala týkať učiva 3. ročníka alebo závažnejších partií učiva 2. ročníka, druhá sa mohla týkať učiva 1. ročníka alebo závažného učiva zo základnej školy.

Keďže absolvent strednej školy mal ukázať, že má prehľad v učive príslušného tematického celku, jedna z otázok mala mať širšiu formuláciu. Vyučujúci si ku každej otázke z dvojice otázok pripravil dve trojice konkrétnych príkladov s rôznou náročnosťou podľa jednotlivých klasifikačných stupňov (1. pre žiaka výborného a chválitebného, 2. pre dobrého a 3. pre dostatočného).

Náročnosť príkladov mala byť viac v problémovej stránke, v nárokoch na logický postup, než v siahodlhých mechanických výpočtoch. Kombinácia príkladov mala byť taká, aby v nich žiak mohol uplatniť znalosti z algebry aj geometrie. Zostavené otázky sa prerokovali v predmetovej komisii a predložili sa riaditeľovi na schválenie.

Pri celkovom hodnotení odpovede žiaka na maturitnej skúške z matematiky skúšajúci prihliadal na náročnosť daného príkladu, úplnosť vyčerpania otázky, logický postup a zdôvodnenie, na kvalitu vyjadrovacích prostriedkov žiaka, na samostatnosť žiakovej práce a na reagovanie na doplňujúce otázky. Každú odpoveď žiaka zhodnotí a navrhovanú známku odôvodni. Nezávisle od neho má tak urobiť aj prísediaci.

Ako ďalší medzník uvádzame rok 1987, kedy bola vydaná *Vyhláška č. 38/1987 Z. z.* Podľa nej maturitná skúška je teoreticko-praktická komplexná skúška, jej účelom je overiť, ako si žiaci osvojili vedomosti a zručnosti v rozsahu učiva určeného učebnými plánmi a učebnými osnovami, ako sú pripravení na vykonávanie povolania alebo odborných činností na ďalšie štúdium.

Písomná maturitná skúška bola povinná na gymnáziách okrem iných predmetov z matematiky, ústna skúška bola povinná tiež iba na gymnáziách so zameraním na matematiku. Písomné skúšky sa konali v treťom týždni v apríli. Písomné skúšky zo všeobecnovzdelávacích predmetov, teda aj s matematiky, trvali najviac 240 minút.

Ak mal žiak gymnázia na písomnej skúške z matematiky horší stupeň prospechu ako pri klasifikácii v polroku posledného ročníka štúdia, mohol mu predseda skúšobnej komisie povoliť na jeho žiadosť vykonať ústnu skúšku.

Ak bola písomná maturitná skúška z matematiky klasifikovaná stupňom 5 – nedostatočný, podrobil sa žiak ústnej skúške povinne. V týchto prípadoch sa započítaval prospech z písomnej aj ústnej skúšky do výsledného stupňa známky.

Na písomnú časť skúšky vypracovala predmetová komisia v matematike súbor šiestich úloh. Príslušný krajský národný výbor mohol určiť jednotlivé úlohy na písomné skúšky z matematiky (pozri tiež [2]).

5 Záver

Je to skutočne len krátky prehľad vývoja (vzniku) maturitnej skúšky (nie len) z matematiky. Po roku 1990 boli rôzne pokusy (a bolo ich dosť) na zefektívnenie maturitnej skúšky a aj v súčasnej dobe sa pripravuje napríklad elektronická maturita, ktorá je úspešne testovaná na vybraných školách v posledných dvoch školských rokoch. Zrejme maturitná skúška v blízkej budúcnosti zažije ďalšie veľké zmeny a začína sa písať ďalšia epocha dejín školstva a zároveň matematického vzdelávania na Slovensku.

Literatura

[1] Exner F., Bonitz H.: *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Osterreich*. Wien, 1849.

[2] *Skúšky zrelosti na gymnáziách ako na jednotnej strednej škole*. Výnos Ministerstva školstva a národnej osvety z 2. 10. 1942, Universum, Bratislava, 1942.

[3] *Vyhláška Ministerstva školstva Slovenskej socialistickej republiky č.38/1987 zo dňa 28. apríla 1987 o ukončovaní štúdia na stredných školách a o ukončovaní prípravy v osobitných odborných učilištiach*. Bratislava, 1987.

Tento príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 001DTI-4/2012.

Adresa

Doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.
Dubnický technologický inštitút v Dubnici nad Váhom
Sládkovičova 533/20
018 41 Dubnica nad Váhom
e-mail: *lengyelfalusy@dti.sk*

GEOMETRIE V DÍLE R. A. FISHERA

VÍTĚZSLAV LÍNEK

Abstract: When R. A. Fisher laid the foundations of mathematical statistics, he mostly used algebraic methods. However, there are many indications in his correspondence and works that his thoughts were originally based on geometry. The goal of this paper is to explain how geometry was used by Fisher and why this approach disappeared from contemporary mathematical statistics.

1 Úvod

Ronald Aylmer Fisher (1890–1962), britský matematik a biolog, byl hlavní postavou stojící za vznikem moderní matematické statistiky. V sérii článků z let 1912 až 1925 položil základy analýzy variance, metody, která je dodnes hlavní náplní standardních statistických kurzů. Z dochované korespondence citované v knize [1] je patrné, že k problematice přistupoval pomocí geometrické reprezentace náhodného výběru v n-rozměrném prostoru. Tento přístup však nebyl jeho kolegy akceptován, proto ve většině svých publikovaných prací použil algebraické metody a geometrie se zde objevuje jen zřídka. Geometrický přístup, který umožňuje intuitivní pochopení mnoha důležitých výsledků, tak ustoupil do pozadí a dodnes se jeho výhod užívá v matematické statistice jen sporadicky.

2 Rozdělení výběrové směrodatné odchylky

V článku [3] Fisher elegantně odvozuje sdružené rozdělení průměru $\bar{x}$ a výběrové směrodatné odchylky s výběru z rozdělení $\mathsf{N}(\mu;\ \sigma^2)$ o rozsahu n. Jeho postup je následující. Při daných hodnotách $\bar{x}$ a s leží množina všech možných pozorování v nadrovině kolmé na vektor $(\bar{x},...,\bar{x})$ a tvoří povrch koule dimenze $n-1$ se středem v bodě $[\bar{x},...,\bar{x}]$ a poloměrem $s\sqrt{n}$. Přírůstek jejího objemu odpovídající přírůstkům $\mathrm{d}\bar{x}$ a $\mathrm{d}s$ bude tudíž úměrný výrazu $s^{n-2}\,\mathrm{d}\bar{x}\,\mathrm{d}s$. Protože hustota pravděpodobnosti f je funkcí $\bar{x}$ a s, bude pro odpovídající přírůstek pravděpodobnosti, který je součinem přírůstku objemu a hustoty, platit $\mathrm{d}P = k \cdot f(\bar{x}, s)\, s^{n-2}\,\mathrm{d}\bar{x}\,\mathrm{d}s$. Z podmínky $\int_{\bar{x}\in\mathbf{R},\, s\geq 0} \mathrm{d}P = 1$ pak stačí dopočítat konstantu k a máme hledané sdružené rozdělení. Z něj potom integrací přes $\bar{x}\in\mathbf{R}$ získáme rozdělení směrodatné odchylky s.

3 Test významnosti

Základ Fisherových úvah ohledně testu významnosti objasňuje v životopise [1] jeho dcera J. F. Boxová následujícím způsobem. V nejjednodušším lineárním modelu $Y_i = \mu + e_i$, kde $e \sim \mathsf{N}(0,1)$, se omezme na náhodný výběr o rozsahu $n = 3$. Máme-li k dispozici realizaci $\boldsymbol{Y} \equiv (Y_1, Y_2, Y_3)$ a chceme zvažovat nulovou hypotézu H_0: $\mu = 0$, je zřejmé, že ji zamítneme tehdy, když bude úhel mezi vektorem $\boldsymbol{Y}$ a vektorem $\bar{\boldsymbol{Y}} \equiv (\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{Y})$ malý. Jaké kritérium musíme pro své rozhodnutí zvolit, abychom se v případě platnosti hypotézy H_0 zmýlili nanejvýš v 5 % případů, tj. abychom nepřekročili obvykle požadovanou pravděpodobnost chyby prvního druhu? Nulová hypotéza vlastně znamená, že sdružená hustota vektoru $\boldsymbol{Y}$ je ve všech směrech stejná. Pravděpodobnost, že za platnosti hypotézy H_0 nebude úhel mezi $\boldsymbol{Y}$

a $\overline{Y}$ větší než pozorovaná hodnota, lze tedy vypočítat jako podíl $S_V : S_K$, kde S_K je povrch koule se středem v bodě [0;0;0] a poloměrem $\|Y\|$ a S_V je povrch vrchlíku, který na této sféře vymezí vektor Y, necháme-li jej rotovat kolem vektoru $\overline{Y}$. Je-li uvedený podíl menší než 0,05, pak nulovou hypotézu zamítneme. Test, který jsme takto získali, je po zobecnění na více rozměrů ekvivalentní se známým jednovýběrovým t-testem; v ještě obecnějším případě, kdy vektor Y promítáme do vícerozměrného podprostoru, se jedná o F-test analýzy variance.

4 Sdružené rozdělení průměrné odchylky a výběrové směrodatné odchylky

Cílem Fisherova článku [2] je porovnat přesnost odhadu směrodatné odchylky pomocí statistik odvozených od průměrné absolutní odchylky od průměru (σ_1) a od výběrové směrodatné odchylky (σ_2). V hlavní části se Fisher omezuje na případ, kdy $n = 4$. Vychází z představy, že při pevné hodnotě σ_2 tvoří množina možných pozorování povrch koule se středem v bodě $\left[\overline{x}, \overline{x}, \overline{x}, \overline{x}\right]$, která leží v nadrovině kolmé na vektor (1,1,1,1), a je tedy trojrozměrná. Při pevné hodnotě σ_1 leží možná pozorování v množině, jejíž průnik s povrchem uvedené koule tvoří kružnice či jejich části, a z jejich úhlové velikosti již lze potřebné rozdělení odvodit.

5 Shrnutí

Výše uvedené příklady ilustrují nejen eleganci, s jakou Fisher použil svou vynikající geometrickou intuici, ale též výhody, které geometrický přístup ve srovnání s tradičním přístupem algebraickým skýtá – umožňuje totiž celý koncept „vidět” a z několika jednoduchých geometrických představ odvodit řadu důležitých výsledků. Zajímavou otázkou tedy je, proč je tento způsob uvažování v matematické statistice tak málo využíván. Herr vyjádřil v článku [4] názor, že hlavní příčinou je jednoduše tradice; ne každý navíc disponuje geometrickou představivostí. Podle našeho názoru může hrát svou roli i to, že vzhledem k aplikační povaze statistiky jsou matematici, kteří se jí věnují, orientováni spíše na použití získaných výsledků a hledání výsledků nových než na vylepšování dosavadních didaktických postupů. Statistika je tak často považována za mimořádně obtížnou oblast matematiky a to její oblibě jistě nesvědčí; geometrický přístup by snad mohl přispět ke zlepšení této situace.

Literatura

[1] Box J. F.: *R. A. Fisher*. John Wiley & Sons, New York, 1978.

[2] Fisher R. A.: *A Mathematical Examination of the Methods of Determining the Accuracy of an Observation by the Mean Error, and by the Mean Square Error.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 80(1920), 758–770.

[3] Fisher R. A.: *Note on Dr Burnside's Recent Paper on Error of Observation.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 21(1923), 655–658.

[4] Herr D. G.: *On the History of the Use of Geometry in the General Linear Model.* The American Statistician 34(1980), 43–47.

Adresa

Mgr. Vítězslav Línek
Běhounkova 27
Praha 13, 155 00
e-mail: *vitek.linek@seznam.cz*

MĚŘENÍ DÉLKY POLEDNÍKU A BOŠKOVIĆOVA METODA PRO APROXIMACI DAT PŘÍMKOU

JAROSLAV MAREK

Abstract: Ruđer Josip Boscovitch is the first to formulate a criterion for fitting a straight line to data based on minimization of a function of the residuals. He stated a new method, now known as the method of least absolute deviations. His motivation for the problem of reconciling inconsistent equation were comparison the lengths of one meridian arcs (measurement in Peru, Lapland, the Cape of Good Hope, Paris and Rome).

1 Úvod

1.1 Současný stav

Pro aproximaci dat přímkou se dnes standardně užívá metoda nejmenších čtverců, která minimalizuje sumu čtverců korekcí. Pro použití této metody hovoří mnoho důvodů. Metoda nejmenších čtverců měla své historické předchůdce, se kterými studenti kurzů statistiky nebývají seznamováni a nemohou tak vnímat vývoj v této oblasti matematické statistiky. Alternativně dnes bývá používána Laplaceova metoda absolutních odchylek, která minimalizuje sumu absolutních hodnot korekcí. Další algoritmy – Lambertova metoda a Boškovićova metoda byly takřka zapomenuty, viz [1, 2, 4].[1] Tento článek poslouží k připomenutí Boškovićovy metody.

1.2 Historický vývoj v oblasti aproximace dat

Koncem 18. století se nahromadila astronomická pozorování planet, podobně se nahromadil i bohatý materiál ze stupňovitých měření k určení rozměrů Země čekající na zpracování. Pro výpočty byla k dispozici pouze přibližná Mayerova metoda průměrů, viz [1, 2, 4]. Tento stav byl mocným impulzem k hledání nejvhodnější metody pro vyrovnání dat [2] a vznik metody nejmenších čtverců.

Boškovićova metoda spolu s Lambertovou metodou a Laplaceovou metodou jsou prvními statistickými pokusy o řešení úlohy lineární regrese, viz [1, 2, 4].

1.3 Cíl Boškovićovy metody

Bošković svoji metodu navrhl pro zpracování výsledků geodetických měření – délky poledníku v r. 1757. Zpracovával změřené délky jednoho stupně poledníku na povrchu Země na různých zeměpisných šířkách. Analýza měření spočívala v hledání lineární

---

[1] Laplaceova metoda z r. 1787 je označována za první statistickou revoluci, metoda nejmenších čtverců z počátku 19. století za druhou statistickou revoluci.

[2] Pojem vyrovnávací počet byl používán pro geodetické výpočty, proto budeme pracovat se slovem *vyrovnání*.

závislosti změřené délky jednoho stupně poledníku na zeměpisné šířce. Nalezená přímka měla poskytnout odpověď na otázku, jaké poloosy má elipsoid aproximující tvar Země. Zploštělost Země bývá popisována hodnotou $(a–b)/a$, kde a je poloměr Země v rovině určené rovníkem a b je vzdálenost od středu k pólům. Dnes se uvádí hodnoty

$$a = 6378245 \text{ m}, b = 6356863 \text{ m}.$$

2 Boškovićova metoda

2.1 Měření délky jednoho stupně

Ruđer Josip Bošković (1711–1787) byl v roce 1750 povolán papežem Benediktem XIV, aby spolu s anglickým jezuitou Christopherem Mairem změřili poledník a zkonstruovali novou mapu papežského státu.[3] Jejich zpráva vyšla v r. 1755, viz [1, 3].

Během svého života se Bošković účastnil různých expedic zorganizovaných za účelem měření délky poledníku (např. v Peru nebo na mysu Dobré naděje). Tato měření získaná na různých zeměpisných šířkách pak byla porovnána s podobnými měřeními ve Francii.

Cílem měření bylo potvrdit nebo vyvrátit předpoklad o tvaru Země jako rotačního elipsoidu. V té době již došlo ke shodě v názoru, že rovník má tvar kružnice. Zbývalo odpovědět na otázku, je-li poloměr rovníku stejný, větší nebo menší než vzdálenost od středu Země k pólům.

2.2 Data

Bošković měl k dispozici 15 měření délky jednoho stupně poledníku, ale 11 bylo pořízeno ve Francii. Bošković se obával, že by měření ve Francii mohla být ovlivněna stejnou chybou. Proto z Francie pro výpočet ponechal jediné měření a použil celkem jen 5 měření. Jeden toise odpovídá přibližně hodnotě 1,949 m.

i	zeměpisná poloha	zeměpisná šířka L	$x = \sin^2(L)$	délka oblouku y
1	Quito	0º 0′	0,0000	56751 toisů
2	mys Dobré naděje	33º 18′	0,2987	57037 toisů
3	Řím	42º 59′	0,4648	56979 toisů
4	Paříž	49º 23′	0,5762	57074 toisů
5	Laponsko	66º 19′	0,8386	57422 toisů

V grafu Bošković znázornil na vodorovné ose hodnoty x a na svislé ose hodnoty y, viz obrázek v části 3. Cílem jeho metody bylo najít vhodnou přímku, která data aproximuje. Bošković tedy hledat parametry lineární funkce, která by umožnila odhadnout délku jednoho stupně zeměpisné délky ze zeměpisné šířky. Pokud by aproximující přímka byla konstantní, znamenalo by to, že délka jednoho stupně poledníku je konstatní a Země je kulatá. Rostoucí přímka by vypovídala o tom, že $a > b$, klesající přímka by znamenala, že $a < b$.

[3] Bošković byl od r. 1740 profesorem na Collegiu Romanu a Ch. Maire rektorem anglické jezuitské koleje v Římě.

2.3 Boškovićova metoda nejmenších absolutních odchylek

Bošković jako první formuloval kritérium pro aproximaci dat, požadavky na svou metodu formuloval v r. 1757 (viz [1]) následovně:
Mějme určitý počet pozorování. K získání oprav, které musí být zhotoveny ke každému z nich, je nutno splnit tyto podmínky:

1) součet kladných oprav by měl být roven součtu záporných oprav (odhlédneme-li od znaménka),
2) součet absolutních hodnot všech oprav by měl být nejmenší možný.

Jeho motivací pro první podmínku byla symetrie rozdělení chyb. Druhé podmínky je zapotřebí, aby bylo možno aproximovat pozorování přímkou nalezenou minimalizací funkce reziduí.

Z první podmínky vyplývá, že $\bar{y} = a + b\bar{x}$, což znamená, že aproximační přímka prochází těžištěm pozorovaných bodů. Užitím toho výsledku lze eliminovat a z druhé podmínky. Obdržíme

$$S(b) = \sum_{i=1}^{n} | y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x}) | ,$$

což by mělo být minimalizováno vzhledem k b.

Aby Bosković zjistil, jak $S(b)$ závisí na b, proložil svislou přímku těžištěm a pohyboval jí ve směru hodinových ručiček. Pohybující se přímka postupně procházela pozorováními v pořadí 5, 1, 4, 2, 3. Bošković tako měření uspořádal a měření vztáhl k těžišti $X_k = x_k - \bar{x}$, $Y_k = y_k - \bar{y}$. Získal hodnoty $\bar{x} = 0{,}43566$ a $\bar{y} = 57053$, příslušné směrnice přímek a hodnoty funkcionálu $S(b)$ jsou uvedeny v tabulce.

k	Bod (i)	X_k	Y_k	$b_k = Y_k / X_k$	$\sum_{j=1}^{k} \| X_j \|$	$S(b_k)$
1	e (5)	0,40294	369,4	917	0,40294	416
2	a (1)	-0,43566	-301,6	692	0,83860	340
3	d (4)	0,14054	21,4	152	0,97914	627
4	b (2)	-0,13696	-15,6	114	1,11610	658
5	c (3)	0,02914	-73,6	-2526	1,14524	3527

Bošković došel k závěru, že v takto seřazených měřeních lze vybrat tu přímku, která prochází těžištěm a bodem b_k, kde k dostaneme z nerovnosti

$$\sum_{j=1}^{k-1} | X_j | < \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} | X_j | < \sum_{j=1}^{k} | X_j | .$$

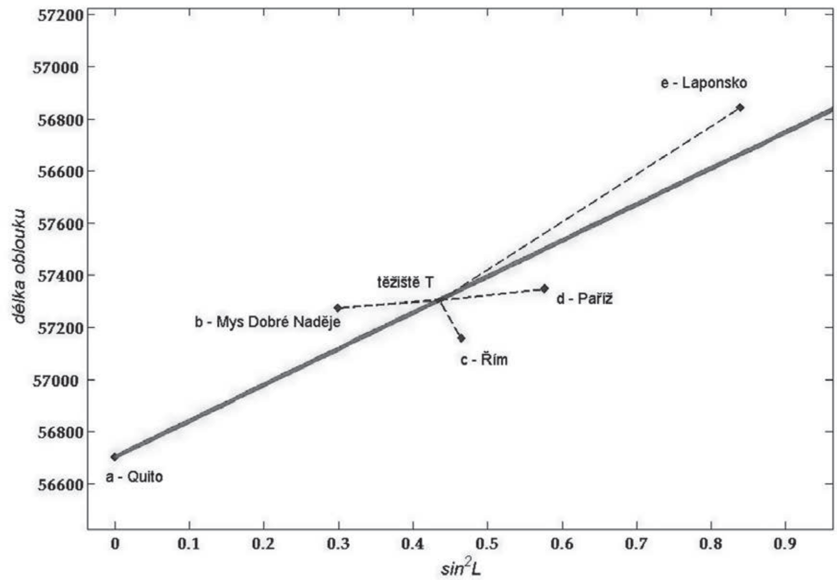
V našem případě pro $k = 2$ platí $0{,}40294 < 1{,}14524 / 2 < 0{,}83860$.

2.4 Vyhodnocení výpočtu

Funkcionál $S(b)$ nabývá nejmenší hodnoty 340 pro bod a (1) – měření na rovníku v Quitu. Závislost délky jednoho stupně zeměpisné délky [v toisích] na kvadrátu sinu zeměpisné šířky $x = \sin^2(L)$ je Boškovićovou metodou odhadnuta vztahem

$$y = \bar{y} + 340\,(x - \bar{x}) = 57053 + 340\,(x - 0{,}43566) = 56751 + 692\,x.$$

3. Závěr



Na studované úloze lze demonstrovat smysl lineární regrese a poukázat na skutečnost, že metoda nejmenších čtverců není jedinou metodou pro aproximaci dat přímkou. Historická úloha měření délky poledníku může být použita pro seznámení s Laplaceovou metodou, Lambertovou metodou i s metodou nejmenších čtverců, viz [1, 2, 4].

Literatura

[1] Hald A.: *A History of Mathematical Statistic (from 1750 to 1930)*. A Wiley interscience Publication, New York, 2000.

[2] Stigler S. M.: *History of Statistic – The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1986.

[3] Wikipedia (The free encyclopedia): *Rudjer-Boscovich* [online]. Poslední revize provedena 20. 3. 2013 [cit. 20. 3. 2013].

http://en.wikipedia.org/wiki/Rudjer_Boscovich.

[4] Spohnerová K.: *Řešení neřešitelných rovnic* (bakalářská práce). Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP Olomouc, 2009 [online].

http://mant.upol.cz/soubory/OdevzdanePrace/B08/b08-08-ks.pdf [cit. 20. 3. 2013].

Adresa

Mgr. Jaroslav Marek, Ph.D.
Katedra matematiky a fyziky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice
náměstí Čs. Legií 565, 532 10 Pardubice
e-mail: *jaroslav.marek@upce.cz*

JAKOB STEINER A OBJEV INVERZE

STANISLAV NOVÁK

Abstract: Jakob Steiner was an outstanding Swiss geometrician. Despite his lack of formal education in mathematics, he taught at prestigious schools and he was also a sought-after private mathematics teacher. He was one of the founders of inversive geometry. He published his discoveries in a newly founded mathematical journal and also in his own monographs. However the great deal of Steiner's work in this area remained unpublished during his life. By many detours it was finally published almost 70 years after his death.

1. Cesta k matematice

Švýcar Jakob Steiner prožil jeden z nejneuvěřitelnějších životních příběhů, které lze v biografiích velkých matematiků nalézt. Narodil se 18. března 1796 v Utzenstorfu, malé vesničce nedaleko Bernu, jako nejmladší z osmi dětí. Jeho rodiče byli chudí zemědělci a Jakob od malička pomáhal s pracemi na farmě. Vyrůstal na venkově daleko od vědeckých a kulturních center své doby a v dětství nezískal žádné vzdělání (viz [2]). Číst a psát se začal učit až ve čtrnácti letech. Později se zajímal o matematiku a astronomii, zůstal ovšem samoukem.

Jeho nadšení pro ně a energický přístup oslovily významného švýcarského pedagoga Johanna Heinricha Pestalozziho, který přesvědčil Jakobova otce, aby Jakobovi umožnil studium na jeho škole v Yverdon-les-Bains. Steiner zde nejprve studoval a po necelých dvou letech pak i vyučoval matematiku.

V roce 1818 školu v Yverdon opustil a přesídlil do německého Heidelbergu, kde navštěvoval matematické přednášky na zdejší univerzitě. Na své živobytí si při studiu vydělával poskytováním soukromých hodin matematiky, které byly jeho jediným zdrojem příjmu. Nedostatek času, který by Steiner mohl věnovat studiu, byl zřejmě příčinou jeho neúspěchu při skládání zkoušek (viz [7]).

V roce 1821 přesídlil z Heidelbergu do Berlína, kde se ucházel o místo učitele na zdejším gymnáziu. Protože Steiner neměl odpovídající formální vzdělání, musel projít zkouškou odbornosti, při níž prokázal rozsáhlé znalosti geometrie. V ostatních oblastech matematiky byly ovšem jeho znalosti slabší nebo nedostatečné. Zejména díky pochvalným doporučením, která předložil, a hlubokým znalostem geometrie místo získal a mohl vyučovat matematiku ve všech ročnících gymnázia kromě posledního (viz [7]).

Během svého působení na berlínském gymnáziu měl časté neshody s ředitelem školy. Odmítal totiž vyučovat podle učebnice, jejímž autorem ředitel školy byl. Využíval svých zkušeností z Yverdon a snažil se do výuky začlenit Pestalloziho inovativní metody. Své kurzy vedl často formou kolokvií (viz [7]), kdy matematické pravdy studentům předkládal jako materiál ke kritickému zkoumání. Vedení školy ovšem tyto metody odmítalo s tím, že jsou vhodné jedině pro výuku elementárních poznatků.

V Berlíně si Steinera všiml bohatý mecenáš, inženýr a matematický nadšenec August Leopold Crelle, který se jej rozhodl podporovat ve vědecké práci. Crelle založil v roce 1826 dodnes vycházející a prestižní časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tehdy známý pod názvem *Crelle's Journal*. Steiner zde publikoval převážnou většinu svých objevů, hned do prvního čísla přispěl celkem pěti články a celkem v časopise vyšlo na 62 jeho prací (viz [5]).

2. Objev inverze

V moderním pojetí je (kruhová) inverze základním pojmem kruhové geometrie a je definována následovně:

Je-li dán střed inverze O a koeficient inverze k^2, uvažujeme zobrazení $Inv(O, k^2)$ v Möbiově rovině $M_2 = E_2 \cup \{P_\infty\}$, které je určeno následující předpisem:

1. Obrazem bodu O je nevlastní bod P_∞.
2. Obrazem nevlastního bodu P_∞ je bod O.
3. Obrazem bodu $X \neq O, P_\infty$ je bod X' náležící polopřímce OX a současně platí:

$$|OX| \cdot |OX'| = k^2 .$$

Steiner byl pravidelným přispěvatelem Crelleho časopisu a již v prvních číslech publikoval množství pozoruhodných objevů. Na základě rozboru těchto článků dospěli později odborníci k přesvědčení, že Steiner znal princip inverze a při důkazech svých tvrzení jej využíval.

Tomu napovídají i náznaky, které se ve Steinerových spisech objevují (viz [6]). Konkrétně například v textu *Einige geometrische Betrachtungen*[1] (1826) Steiner představuje dvě podobné kružnice s vnějším středem stejnolehlosti A. Následně provádí diskusi dvou odpovídajících si bodů X, Y, které leží na jednotlivých kružnicích. Zmiňuje případ, kdy body X, Y tvoří spolu se středem A trojici kolineárních bodů a ukazuje, že v takovém případě je součin $|AX| \cdot |AY|$ roven dané kladné konstantě.[2]

Steinerovo souborné dílo připravil a publikoval v roce 1882 matematik Carl Theodor Wilhelm Weierstrass. Během svého života publikoval Steiner mnoho odborných prací, v žádné z nich však o inverzi explicitně nehovořil a důkazy, ve kterých odborníci využití inverze předpokládají, spolu s větami nepublikoval.

3. Steinerova pozůstalost

Po Steinerově smrti v roce 1863 byly dokumenty z jeho pozůstalosti, soukromé i pracovní, uloženy v podkroví městské knihovny v Bernu, kde je po třiceti letech objevil v krabici v žalostném stavu profesor bernské univerzity Johan Heinrich Graf (viz [2]).

[1] Text byl publikován v prvním čísle časopisu *Crelle's Journal*.

[2] Označíme-li danou kladnou konstantu c, pak se v duchu výše uvedené definice zřejmě v případě bodů X, Y jedná o dvojici bodů odpovídajících si v zobrazení $Inv(O, k^2)$.

Obsah krabice předal do Curychu profesoru Friedrichu Bützbergerovi, aby ho prostudoval, utřídil a případné cenné materiály publikoval. Bützberger uspořádal část pozůstalosti do 10 svazků, které uložil v Univerzitní knihovně v Bernu. Nejvýznamnější práce si ovšem ponechal a plánoval jejich postupnou publikaci spolu s doplněním vlastními poznatky a objevy. V letech 1913 a 1914 publikoval několik článků včetně článku o objevu inverze (viz [6]). Nazval jej *Über Bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion*.

Ve třetí části tohoto článku vyjadřuje své přesvědčení, podle kterého nemůže být nejmenších pochyb, že Steiner jako první zformuloval a následně i použil inverzi (viz [3]). Své tvrzení podpořil vybranými pasážemi ze Steinerova rukopisu *Wiedergeburt und Auferstehung*. Podle Bützbergera navázal Steiner na práci významného francouzského matematika Jeana Victora Ponceleta, když rozpracoval jednu ze dvou jím uvažovaných korespondencí mezi dvěma dvojicemi bodů ležících na společné sečně procházející středem stejnolehlosti dvou kružnic.

V létě roku 1928 studoval svazky v univerzitní knihovně v Bernu profesor Arnold Emch z Univerzity v Illinois. V obsahu 10 svazků nenašel nic vědecky významného, obsahovaly zejména Steinerovy zápisky a poznámky ke kurzům z elementární matematiky, které navštěvoval nebo sám vedl v Yverdon, a poznámky k práci souhromého učitele před odchodem do Berlína (viz [2]).

Rukopis věnovaný geometrii kružnice a sféry, o kterém referovaly Bützbergerovy práce, ve svazcích nebyl. Emch ho objevil ve vlastnictví paní Bützbergerové v Curychu. Celý název zněl: *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und Kugeln mit vielen neuen Sätzen und Untersuchungen in einem Systematischen Entwicklundsgange dargestellt*. Steiner ho sepsal pravděpodobně v letech 1923 až 1926, kdy působil v Berlíně jako soukromý učitel (viz [4]).

Spis byl Steinerem pečlivě připraven k publikaci, ovšem zůstal nepublikován. Někteří odborníci se domnívají, že jej Steiner nepublikoval z toho důvodu, že chystal velkou encyklopedii geometrie a plánoval do ní toto dílo začlenit (viz [4]). Teprve v roce 1931 byl spis vydán v Curychu a v Lipsku pod pozměněným názvem *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, worunter eine grosse Anzahl neuer Untersuchungen und Sätze vorkommen, in einem systematischen Entwicklungsgange dargestellt*.

Inverzi tedy Steiner představil v textu *Wiedergeburt und Auferstehung* (Znovuzrození a vzkříšení), často se také odkazoval na spis *Abspiegelung* (souměrnost, zobrazení), který ovšem objeven nebyl (viz [7]). Tento spis nepochybně také obsahoval vysvětlení principu inverze (viz [6]). Bützberger měl v držení ještě další Steinerovy spisy, Emch v Curychu objevil k publikaci připravenou monografii shrnující Steinerovy nejdůležitější matematické objevy a také pečlivě zpracovaný Steinerův životopis.

4. Závěr

Nejvýznamnější z objevených Steinerových prací, které jím nebyly publikovány, se týkají geometrie kružnice a sféry. Dokazují, že Steiner hrál v počátcích kruhové geometrie významnou roli a učinil mnoho výjimečných objevů mnohem dříve, než byly publikovány někým jiným. Jedním z nich je také objev inverze, který bývá nejčastěji připisován německému matematikovi Ludwigu Immanuelu Magnusovi (1831) (viz [1]), někdy skotskému fyzikovi Williamu Thompsonovi (Lord Kelvin) (viz [7]), italskému geometru Luigi Cremonovi, nebo dvěma belgickým matematikům Garminalu Pierru Dandelinovi a Adolphu Queteletovi (viz [6]).

Literatura

[1] Coxeter H. S. M.: *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1969.

[2] Emch A.: *Unpublished Steiner Manuscripts*. The American Mathematical Monthly 36(1929), 273–275.

[3] Emch A.: *The discovery of inversion*. Bulletin of the American Mathematical Society 20(1914), 412–415.

[4] Hollcroft T. R.: *Hitherto unpublished treatise of Steiner*. Bulletin of the American Mathematical Society 37(1931), 793–795.

[5] Ostermann A., Wanner G.: *Geometry by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[6] Patterson B. C.: *The Origins of the Geometric Principle of Inversion*. Isis 19(1933), 154–180.

[7] Yaglom I. M.: *Felix Klein and Sophus Lie*. Birkhäuser, Basel, Boston, 1988.

Adresa

Mgr. Stanislav Novák
Katedra matematiky PřF UJEP
Klíšská 30
400 01 Ústí nad Labem
e-mail: *novakstanislav@email.cz*

POJETÍ ARITMETIKY A ALGEBRY U JANA CARAMUELA Z LOBKOVIC

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: Juan Caramuel Lobkowitz (1606–1682) was a versatile thinker of his time. His opus magnum *Mathesis biceps* comprises all contemporary lines of mathematics. Caramuel's concept of algebra grows out of his research on numeration systems. Thanks to his experiences with Cabbala and considerations on universal language and speculative grammar, he made a great attempt to the usage of modern mathematical symbols.

1 Matematika – nástroj zkoumání veškerenstva

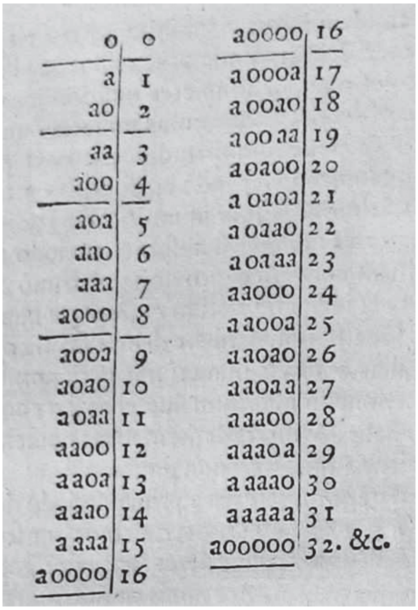
Dílo Jana Caramuela z Lobkovic (1606–1682) zahrnuje širokou škálu témat od filosofie a theologie (doktorát theologie obhájil v 32 letech na tehdy nejprestižnější fakultě v nizozemské Lovani) přes jazykovědu, etiku a politologii až po praktické obory jako pevnostní stavitelství nebo námořní navigaci. Caramuel se již v mládí rozhodl pro řeholní život, v 19 letech se stal mnichem cisterciáckého kláštera ve španělském Valladolidu a to mu poskytlo optimální podmínky pro budoucí intelektuální dráhu.

Byl typickým barokním kosmopolitou, udržoval kontakty s představiteli evropské vědy (dochovala se jeho korespondence s R. Descartesem) i členy římské kurie. Kromě rodného Španělska působil v Portugalsku, kde vyučoval na řádových školách, věhlas brilantního theologa získal při disputacích v již zmíněné Lovani. Hrůzy třicetileté války poznal na vlastní kůži ve 40. letech, kdy byl opatem v německém Disibodenbergu a koadjutorem arcibiskupa v Mohuči. Jeho příspěvek k teorii šifrovacích klíčů (*Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc*. [1] z roku 1635) byl patrně důvodem, proč jej císař Ferdinand II. pozval do Prahy. Zde Caramuel strávil celou dekádu (1646 až 1656). Z císařova pověření se úspěšně angažoval při mírových jednáních na Vestfálském kongresu, byl generálním vikářem pražského arcibiskupa Harracha a nezanedbatelný byl stimul, který vnesl do života pražské intelektuální komunity. I pro samotného Caramuela šlo o významné a plodné období. V Praze vznikla jeho *Theologia rationalis* [2], rozsáhlé dílo věnované spekulativní gramatice, kde se konstituují Caramuelovy snahy o vytvoření umělého jazyka. Poslední čtvrtstoletí svého života Caramuel pobýval v Itálii. Nejprve byl roku 1657 povolán jako biskup na jih do Satrijsko-Campagneské diecéze, od roku 1673 spravoval diecézi se sídlem ve Vigevanu.

Klíčem k pochopení Caramuelových snah, tím, co skutečně sjednocuje celé jeho dílo bez ohledu na tematické zařazení, je role matematiky nebo spíše formálních metod, které z matematiky a logiky vycházejí. Dobově je tato tendence podmíněna stavem společnosti, krizí jejích institucí a ztrátou důvěry v možnost universálního uchopení a řešení problémů. Pro vůdčí myslitele 17. století je příznačné, že naději vkládali do nalezení nových základů vědeckého zkoumání, které budou vyhovovat přísným požadavkům racionality. Pro Caramuela byla přirozeným východiskem matematika. Svoji roli jistě mělo rodinné prostředí. Caramuelův otec před příchodem do Španělska působil na pražském dvoře císaře Rudolfa II. jako matematik a astronom a první publikací malého chlapce (ve 12 letech!) byly astronomické tabulky. Nelze vyloučit ani otcovo zprostředkování atmosféry rudolfinské Prahy s jejím mysticismem. Dalším zásadním vlivem bylo Caramuelovo seznámení s židovskou kabalou během studia filosofie na universitě v Alcale. Tato hebrejská nauka o stvoření světa slovem Božím poskytuje filosofické argumenty pro korespondenci jazyka a stvořené skutečnosti. Protože písmenům hebrejské abecedy jsou jedoznačně přiřazeny číselné hodnoty, lze očekávat, že formulace a řešení problémů bude zvládnutelné užitím matematických a speciálně kombinatorických metod. Caramuelovo přesvědčení o správnosti této cesty prolíná celým jeho dílem a je zdrojem originálních výsledků zejména v jazykovědě, kde přináší návrh metafyzického dialektu a uvažuje o zásadách tvorby umělých jazyků – viz [2]. Přímou inspiraci kabalou lze nalézt v Caramuelově teorii šifrování, tzv. steganografii, jíž je věnován spis [1].

2 Mathesis biceps

Završením Caramuelova čistě matematického díla je encyklopedický spis *Mathesis biceps*. Napsal jej jako biskup v době svého působení v Satrijsko-Campagneské diecézi a vydal ve dvou svazcích *Mathesis biceps vetus et nova* [3] roku 1667 a *Mathesis nova* [4] roku 1669 ve své vlastní tiskárně v Campanii. Dílo má úctyhodný rozsah více než 1700 stran. Jde o tisk foliového formátu, na začátku prvního svazku je podrobný obsah a věcný rejstřík. Grafická úprava je velice kvalitní; zahrnuje 52 stran obrazových příloh a u obou svazků titulní listy s celostránkovými rytinami.



0	0	aoooo	16
a	1	aoooa	17
ao	2	aooao	18
aa	3	aooaa	19
aoo	4	aoaoo	20
aoa	5	aoaoa	21
aao	6	aoaao	22
aaa	7	aoaaa	23
aooo	8	aaooo	24
aooa	9	aaooa	25
aoao	10	aaoao	26
aoaa	11	aaoaa	27
aaoo	12	aaaoo	28
aaoa	13	aaaoa	29
aaao	14	aaaao	30
aaaa	15	aaaaa	31
aoooo	16	aooooo	32. &c.

Obr. 1: Reprezentace binární aritmetiky v *Mathesis biceps*

Mathesis biceps je programovým propojením teorie a praktických aplikací matematiky. Autor shromáždil a zasvěceně referoval o všech oblastech soudobého poznání, kde se matematika uplatňuje, rozebírá i novinky, jako např. tehdy aktuální problematiku pevnostního stavitelství, kterému se sám věnoval v době třicetileté války. Při výkladu spekulativně laděných kapitol věnovaných matematické teorii je nejlépe patrná jeho intence pojímat matematiku jako universální nástroj poznání.

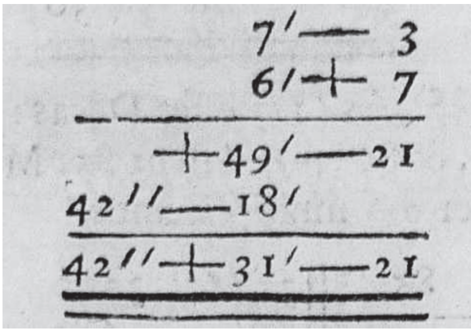
3 Od aritmetiky k algebře

Povaha Caramuelova přínosu k vývoji matematiky je patrná na jeho pojetí aritmetiky a algebry. Tak jako jeho přístup k jazyku je matematický a kombinatorický, zde naopak využívá svých zkušeností ze studia jazyka, konkrétně spekulativní gramatiky ve spisu [2]. Výklad aritmetiky dělí na tři části. *Proarithmetica* je disciplínou propedeutickou, která postuluje její filosofické základy. Autor definuje pojem čísla (*Numerus est, quod numeratus*) a upozorňuje na posun oproti klasickému Eukleidovu pojetí. Číslo v Caramuelově pojetí již není složeno z jednotek, je daleko obecnější entitou, má “instrumentální” povahu. Aritmetika pak umožňuje různé konkrétní reprezentace čísla. Za předchůdce této myšlenky považuje Řeky a Kopty, kteří jako aritmetické značky (*notæ*) používali písmena abecedy (*literrae*). Je tedy ve skutečnosti více aritmetik. Tento krok vedl Caramuela k zavedení různých číselných soustav. Podrobně rozebírá binární, ternární, kvaternární, obecně *n*-ární aritmetiku pro $n = 2,\ldots, 10, 12, 60$. Pro reprezentaci užívá písmena *o, a, b, c,* … , tedy *n* navzájem různých znaků pro danou číselnou soustavu.

A	B	C	D	E
Progr. Geom.	Proportionum Nomina.	Characteres Comm.	Geysii.	Nostri
1				
2	Simplex	S	a	′
4	Quadratus	Q	aa	′′
8	Cubus	C	aaa	′′′
16	Biquadratus	Bq	aaaa	′v
32	Subsolidus	Ss	aaaaa	v
64	Quadricubus	Qc	aaaaaa	v′
128	Bissubsolidus	Bs.	aaaaaaa	v′′
256	Triquadratus	Tq	aaaaaaaa	v′′′
512	Cubicubus	Cc	aaaaaaaaa	′x

Obr. 2: Poslední sloupec tabulky zachycuje Caramuelovo značení mocnin v algebře

Druhá část — *Synarithmetica*, tj. *techné arithmetiké*, *numerandi ars*, studuje aritmetické operace s čísly nezávisle na jejich konkrétní reprezentaci. Techniku výpočtu popisuje obecně a předvádí řadu ukázek v desítkové, ale i v jiných číselných soustavách. Kromě čtyř základních operací uvádí metody *Regula Aurea* a *Regula societatis* včetně jejich aplikací v obchodním podnikání, metody výpočtu druhé a třetí odmocniny a algoritmy usnadňující technicky náročné výpočty využitím tabulky *Scala Pythagorae*.



Obr. 3: Ukázka násobení dvojčlenů

Třetí částí je *Metarithmetica* neboli algebra. Důvodem pro její zvláštní statut (*Metarithmetica* znamená v řečtině “za” aritmetikou) se Caramuelovi staly zákonitosti aritmetických operací invariantní vzhledem k volbě konkrétní číselné soustavy. Esenciálním objektem algebry pak není *Arithmos*, ale *Enarithmos*, číslo “artificiální”, které je vyjádřením poměru, tj. závislosti na proměnné. Akcidentálním objektem algebry je *Hyperarithmos*, konkrétní hodnota jednoznačně určená v závislosti na proměnné nějakým abstraktním poměrem. Caramuelovou inovací v algebře je užívání symbolů (*characteres*) již velice blízkých modernímu značení (viz obr. 3). Vychází přitom z principu kompozicionality a chápe matematický zápis jako univerzální jazykový fenomén. Podstatným krokem je koncept proměnné, v textu zvané *numerus hypotheticus* nebo též *numerus tantuslibet*, již značí, byť ne zcela důsledně, písmenem *A* od slova *As* užívaného obecně pro peněžní jednotku.

Protože reprezentace artificiálních čísel, v dnešní dikci vlastně algebraických výrazů, “kopírují” strukturu zápisu čísel v rámci všech myslitelných aritmetik, podléhají stejným zákonům a lze na ně zobecnit aritmetické operace a metody *Synarithmetiky* (viz obr. 4). Caramuel důkladně popisuje i technickou stránku výpočtů a výsledky též interpretuje, tzn. porovnává cesty, jakými lze dospět k hodnotě *Hyperarithmos*.

V textu se též připravuje zrod budoucí terminologie. Caramuel začíná rozlišovat čísla, která jsou objektem aritmetiky (*numerus naturalis,* resp. *Arithmos*), a čísla “umělá” (*numerus artificialis,* resp. *Enarithmos, Hyperarithmos*), která v algebře mohou, ale nemusí nabývat hodnoty zlomku, odmocniny, atd. Pojmy však zatím nejsou technizovány v dnešním slova smyslu, autor akcentuje spíše jejich ontologickou odlišnost, tj. rozdíl v modu existence.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc*. Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc*. Francofurti, 1654.

[3] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis biceps vetus et nova*. Campaniae, 1667.

[4] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis nova*. Campaniae, 1669.

Poděkování

Za laskavé pořízení fotokopií z díla Jana Caramuela z Lobkovic v majetku Královské kanonie premonstrátů na Strahově děkuji pracovnici klášterní knihovny paní Hedvice Kuchařové, Ph.D., z oddělení starých tisků.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *otavova@vse.cz*

SOME REMARKS ABOUT CLASSIFICATION OF MANIFOLDS

ZDZISŁAW POGODA

Abstract: The paper presents a very brief history of problems of classification of manifolds one of the most important concepts in mathematics of the twentieth century. Special attention is pointed out on the classification of two dimensional, three dimensional and four dimensional manifolds. The specificity of each of the dimensions is highlights. Also the problem of existence of non-equivalent structures on manifolds from the historical point of view is mentioned

Problemy klasyfikacyjne należą do najważniejszych i często zarazem najtrudniejszych w matematyce. Twierdzenia klasyfikujące różne obiekty stanowią ukoronowanie wielu teorii. Chyba pierwszym twierdzeniem klasyfikacyjnym w historii matematyki było twierdzenie o klasyfikacji wielościanów foremnych z *Elementów* Euklidesa. Później Apolloniusz z Pergi w swoim dziele o stożkowych sklasyfikował przekroje stożka. Problemami klasyfikacji interesował się Pappus z Aleksandrii, Kepler, Kartezjusz, Newton, Leibniz, Euler i wielu innych wybitnych matematyków. Próbom klasyfikacji podawano rodziny krzywych, wielościanów, odwzorowań i innych obiektów matematycznych, które pojawiały się wraz z rozwojem królowej nauk.

Jednym z najważniejszych pojęć, które zrobiły w XX wieku ogromną karierę jest pojęcie rozmaitości. Z jednej strony rozmaitość n-wymiarowa lokalnie przypomina n-wymiarową przestrzeń euklidesową, a z drugiej strony globalnie jest to przestrzeń topologiczna o, często, bardzo skomplikowanej strukturze. Specyficzna konstrukcja rozmaitości pozwala na wykorzystanie do ich badania nie tylko metod topologicznych, lecz również analizy matematycznej i innych dopuszczanych w przestrzeniach euklidesowych. Dlatego też obiekty te stały się niezwykle przydatne do modelowania, przede wszystkim, różnorodnych sytuacji w fizyce, a z czasem i w innych dziedzinach. Historycznie pojęcie rozmaitości wywodzi się z pojęcia krzywej oraz powierzchni i jest ich naturalnym uogólnieniem. Logiczne jest pytanie o klasyfikację rozmaitości w danym wymiarze z dokładnością do homeomorfizmu. Pytanie to, jak wszystkie dotyczące klasyfikacji, należy do najważniejszych i specjaliści poświęcają mu szczególną uwagę.

Choć precyzyjna definicja rozmaitości została sformułowana w połowie lat trzydziestych XX wieku, to sama idea pojawiła się w połowie XIX wieku. Za twórcę uważa się Bernharda Riemanna, który w słynnym wykładzie habilitacyjnym z 1854 roku zaproponował uogólnienie pojęcia powierzchni nazwane później właśnie rozmaitością. Trzy lata wcześniej Riemann rozważał powierzchnie, nazwane później powierzchniami Riemanna, które próbował klasyfikować ze względu na typ spójności nie dowodząc jednak swoich spostrzeżeń (por. [12], [15]). Pierwszą udaną próbę klasyfikacji powierzchni z dowodem zawdzięczamy Möbiusowi. W niezwykle pomysłowy sposób Möbius scharakteryzował orientowalne powierzchnie bez brzegu nazywane obecnie również dwuwymiarowymi rozmaitościami zamkniętymi (por. [12]). Orientowalność możemy rozumieć w ten sposób, że powierzchnia nie zawiera w sobie wstęgi Möbiusa albo inaczej, że z powierzchni nie da się wyciąć wstęgi Möbiusa. Powierzchniami nieorientowalnymi zajął się uczeń Kleina – Walter von Dyck. W zasadzie Dyck opisał klasyfikację wszystkich powierzchni zamkniętych. Jednak nie sformułował podsumowującego twierdzenia, a i nie wszystkie szczegóły rozumowania były precyzyjne (por. [15]). Pełne twierdzenie klasyfikujące powierzchnie z dokładnością do homeomorfizmu przedstawili Max Dhen i Paul Heegaard w artykule *Analysis situs* umieszczonym w Encyklopedii Nauk Matematycznych (*Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften*) z 1907 roku ([2]). Tam też autorzy opisali klasyfikacje rozmaitości jednowymiarowych.

Sukces w przypadku powierzchni zachęcał matematyków do podjęcia prób klasyfikacji rozmaitości wyżej wymiarowych. Z początku wydawało się, że stosując podobne metody jak dla powierzchni uda się sklasyfikować twory wyżej wymiarowy. Wspomniany Walter von Dyck w komunikacie z 1884 roku nakreślił pewne idee (por. [15]). Próbował też scharakteryzować rozmaitości n-wymiarowe. Szybko jednak zauważono, że już dla obiektów trójwymiarowych i tym bardziej n-wymiarowych tak łatwo nie uda się problemu rozwiązać. Techniki algebraiczne, które umożliwiły klasyfikację powierzchni okazały się za słabe w wyższych w wyższych wymiarach. Podstawowymi narzędziami służącymi do badania rozmaitości w tym czasie były grupy homologii i grupa podstawowa. To z ich pomocą klasyfikowano powierzchnie. Zasada, stosowana potem powszechnie w topologii algebraicznej, była naturalna. Jeśli obiekty topologiczne (rozmaitości) były homeomorficzne, to odpowiadające im twory algebraiczne były izomorficzne. Zatem gdy odpowiednie grupy nie były izomorficzne, to rozmaitości nie mogły być homeomorficzne. Właśnie w przypadku trójwymiarowym miały miejsce sytuacje niewygodne: twory niehomeomorficzne miały izomorficzne grupy im odpowiadające. Poincaré skonstruował przykład tzw. sfery homologicznej, rozmaitości trójwymiarowej niedającej się odróżnić za pomocą grup homologii od klasycznej sfery trójwymiarowej. Przy okazji zadał pytanie, czy podobne zjawisko mogłoby zajść dla grupy homotopii – jest to słynna hipoteza Poincarégo (por. [9], [10], [11]). Prace Poincarégo poświęcone analysis situs, jak równoważnie nazywano na początku XX wieku topologię, dały poważny impuls do zajęcia się rozmaitościami trójwymiarowymi. Dzięki pracom Heegarda, Tietze'go, Dehna, Alexandera, Knesera, Reidemeistera, Seiferta, Threlfalla i Whiteheada dość dobrze poznano wiele rodzin rozmiatości trójwymiarowych. Na szczególną uwagę zasługują prace Heegaarda ([6]), Dehna ([1]) i Knesera ([7]), w których opisano techniki, które okazały się bardzo efektywne przy badaniu 3-rozmaitości, jak w skrócie nazywali je specjaliści.

Matematycy przypuścili także atak na próby klasyfikacji rozmaitości wyżej wymiarowych. Okazało się jednak, że ich wysiłki muszą być skazane na niepowodzenie. W 1958 roku A. A. Markow udowodnił, że dla rozmaitości cztero i wyżej wymiarowych problemu klasyfikacji nie da się rozwiązać (por. [4]). Dokładniej, pokazał mniej więcej coś takiego, że dla dowolnego algorytmu rozróżniającego z dokładnością do homeomorfizmu np. rozmaitości czterowymiarowe, zawsze można znaleźć takie rozmaitości, których nie da się rozróżnić za pomocą tego algorytmu. A zatem można co najwyżej próbować klasyfikować pewne specjalne podrodziny rozmaitości danego wymiaru oraz ... rozmaitości trójwymiarowe, dla których twierdzenie Markowa nie obowiązuje. Z tym większą determinacją podejmowano próby klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych. Zaczęto też dokładniej przyglądać się wybranym rodzinom rozmaitości wyżej wymiarowych. Szczególnie zwrócono uwagę na tak zwane rozmaitości jednospójne to znaczy takie, w których każda pętla da się w sposób ciągły zdeformować do punktu lub, używając bardziej technicznego języka, dla których grupa podstawowa jest trywialna.

W wyższych wymiarach matematyków też czekały spore niespodzianki. Po pierwsze okazało się, że obiekty czterowymiarowe zachowują się zupełnie inaczej niż ich wyżej wymiarowe odpowiedniki. Z początku nic nie zapowiadało anomalii. Nie zwrócono uwagi na pojawiające się sygnały, jak choćby praca V. Rohlina z 1952 roku (por. [13]). Gdy jednak próbowano przenieść rezultaty i techniki z wyższych wymiarów, to napotykano na niespodziewane trudności – metody nie działały albo uzyskane wyniki były inne niż przypuszczano. Z początkiem lat sześćdziesiątych XX wieku dzięki pracom Smale'a i Stallingsa rozstrzygnięto uogólnienie hipotezy Poincarégo na wymiary wyższe niż cztery (por. [9]) . Trój i czterowymiarowa wersja hipotezy broniła się skutecznie. Dopiero w 1982 roku M. H. Freedman uporał się z przypadkiem czterowymiarowym klasyfikując jednocześnie czterowymiarowe zwarte rozmaitości jednospójne (por. [5]). Klasyczna hipoteza Poincarégo musiała czekać do roku 2002, gdy G. Perelman, stosując wyrafinowane techniki udowodnił twierdzenie geometryzacyjne sformułowane jeszcze w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku przez W. Thurstona (por. [9]).

Przy okazji pracy Freedmana z dużą siłą ujawniły się kolejne anomalie.

Jak już zaznaczyliśmy na wstępie, rozmaitości są uogólnieniem koncepcji powierzchni i krzywych na wyższe wymiary. Wyróżnia się trzy główne typy rozmaitości: różniczkowe, kawałkami liniowe i topologiczne. Rozmaitości różniczkowe, inaczej gładkie, są uogólnieniem powierzchni gładkich – „bez kantów", a rozmaitości kawałkami liniowe są uogólnieniem powierzchni wielościennych – tu kanty są dopuszczalne. Najmniej intuicyjne są rozmaitości topologiczne. Jeśli wyobrazimy sobie sferę rogatą z nieskończoną ilością rogów, a na każdym z nich znów rogi i do tego nawzajem zaplecione, to mamy jeden z „naturalnych" przykładów dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej. Gdy kształtowało się pojęcie rozmaitości, to „w domyśle" były to rozmaitości wyposażone w pewną strukturę – różniczkową (gładką) lub kawałkami liniową – nawet, gdy wprost o tym nie wspominano. W XIX wieku i na początku XX nie wyobrażano sobie, że mogą istnieć rozmaitości „czysto topologiczne". Na każdej rozmaitości gładkiej lub kawałkami liniowej można zadać wiele różnych atlasów, jednak atlasy te mogą opisywać tę samą strukturę. Wprowadza się mianowicie relację równoważności w rodzinie atlasów na danej rozmaitości: dwa atlasy są w relacji, gdy ich suma znów jest atlasem, czyli mapy badanych atlasów muszą spełniać warunek zgodności. W ten sposób każdy atlas wyznacza pewien atlas maksymalny nazywany strukturą – różniczkową lub kawałkami liniową (PL-strukturą).

W 1957 roku J. Milnor udowodnił twierdzenie o istnieniu nierównoważnych gładkich struktur na sferze siedmiowymiarowej (por. [8]). Pojęcie struktury jest ściśle związane z definicją rozmaitości i specjaliści byli przekonani, że z każdą rozmaitością związana jest dokładnie jedna struktura wyznaczona przez zadany atlas. Potwierdzały to wyniki dla rozmaitości dwu i trójwymiarowych. Wynik Milnora był kompletnym zaskoczeniem dla matematyków, ale to był dopiero początek zdarzeń niezwykłych. Co prawda udało się pokazać, że n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami i dopuszcza jedną gładką strukturę, był jednak pewien wyjątek $n = 4$, gdzie znów znane metody nie działały (por. [14]).

W 1983 roku S. Donaldson wykorzystując rezultaty Freedmana i Rohlina udowodnił, że przestrzeń czterowymiarowa dopuszcza nierównoważne struktury gładkie (por. [3]). Więcej, niebawem pokazano, że takich struktur może być nieprzeliczalnie wiele. Jeśli w przypadku wyżej wymiarowym regułą jest istnienie skończonej liczby struktur nierównoważnych, to na rozmaitościach czterowymiarowych jest ich nieskończenie wiele lub dokładnie jedna. Ponadto stwierdzono istnienie niewygładzanych rozmaitości czterowymiarowych, co w przypadku niżej wymiarowym jest niedopuszczalne (por. [3], [5], [14]).

Udana klasyfikacja powierzchni z jednej strony potwierdziła słuszność wykorzystania metod algebraicznych w topologii, z drugiej jednak pokazała, że zastosowane metody są zbyt słabe, by rozstrzygać podobne problemy w wyższych wymiarach. Okazało się również, że w niskich wymiarach nie ma jednej uniwersalnej metody pozwalającej klasyfikować obiekty ustalonego wymiaru. Każdy z wymiarów trzy i cztery wymaga osobnych, specyficznych technik, a uzyskane rezultaty przeszły wszelkie oczekiwania i zaskoczyły matematyków. Nietypowe były też metody wykorzystane do rozwiązania problemów. W przypadku trójwymiarowym przydatne okazały się potoki Ricciego i zaawansowane metody geometrii różniczkowej (por. [9], [15]). Czterowymiarowe zagadnienia zwróciły uwagę matematyków na teorię pól gauge i równania Yanga-Millsa (por. [3], [14]). Metody fizyki matematycznej znalazły się w centrum zainteresowania topologów. Po raz kolejny można się było przekonać, że, mimo dramatycznego rozdrobnienia, matematyka stanowi jedność, a nowe, ważne rezultaty powstają na styku, często (pozornie) bardzo odległych dziedzin.

Literatura

[1] Dehn M.: *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*. Math. Ann. 69(1910), 137–168

[2] Dehn M., Heegaard P.: *Analysis Situs*. Encyklopädie Math. Wiss. III AB, Teubner, Leipzig, 1907, 153–220.

[3] Donaldson S.: *An application of gauge theory to four dimensional topology*. J. Diff. Geom. 18(1983), 279–315.

[4] Fomenko A. T.: *Topologiczeskije wariacjonnyje zadaczi*. (ros.) Izd. Moskowskowo Uniwersiteta,1984.

[5] Freedman M. H.: *The topology of four dimensional manifolds*. J.Diff. Geom. 17(1982), 357–454.

[6] Heegard P.: *Sur l'Analysis Situs*. Bull. Soc. Math. France 44(1916), 161–242.

[7] Kneser H.: *Geschlossene Fläche in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten*. Jahresber. Deutch. Math.-Verein. 38(1929), 248–260.

[8] Milnor J.: *On manifolds homeomorfic to the 7-sphere*. Ann. of Math. 64(1957), 399–405.

[9] O'Shea D.: *The Poincaré Conjecture*. In *Search of the Shape of the Universe*, Walker & Company, New York, 2007.

[10] Poincaré H.: *Analysis Situs*. J. École Polytech. 2 I(1895), 1–121.

[11] Poincaré H.: *Cinquiemme complemént a l'Analysis Situs*. Rend. Circ. Mat. Palermo 18(1904), 45–110.

[12] Pogoda Z.: *Teoria Morsa według Möbiusa*. Zeszyty OKM 31(VII 2003).

[13] Rohlin V.: *New results in the theory of four dimensional manifolds*. Dokl. Acad. Nauk USSR 84(1952), 221–224.

[14] Scorpan A.: *The Wild World of 4-Manifolds*. AMS, 2005.

[15] Volkert K.: *Das Homöomorphismus problem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1892–1935*. Philosophia Scientice Cahier spécial 4 Éditons Kimé, 2002.

Adres

Zdzisław Pogoda Ph.D.
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
e-mail: *zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl*

TIBOR NEUBRUNN – ŽIVOT A DIELO

BELOSLAV RIEČAN

Abstract: Tibor Neubrunn was a professor of mathematical analysis and its applications. From this point of view he initiated research in many new areas: quantum structures, real functions and multi functions, nonstandard measure and integration theory. He was one of the main persons in the Slovak school of mathematical analysis. Moreover, he belonged to the set of the best university teachers and he was a man with outstanding human properties.

1 Úvod

1.1 Súčasný stav

Dejiny modernej slovenskej matematiky začínajú druhou polovicou dvadsiateho storočia. Azda preto sú tak slabo spracované. Príspevok, ktorý tu prezentujeme, chce podnietiť k systematickému výskumu diela zakladateľských osobností slovenskej matematiky.

1.2 Východzie poznatky

Nemáme spracované ani dve základné osobnosti slovenskej matematiky, akými boli Jur Hronec a Štefan Schwarz. Kniha [3] hovorí totiž skôr o organizačných aktivitách prof. Hronca, aj keď v tejto oblasti si získal prof. Hronec najväčšie zásluhy. Kniha [6] obsahuje súpis spoločenských vystúpení prof. Schwarza, nedotýka sa však jeho diela vedeckého. Kniha [2] je encyklopedického charakteru, ale aj tam nám chýba posledných 10 rokov. Najbližšie nášmu zámeru je publikácia [1] založená na diplomovej práci vedenej prof. Čižmárom. Aj podnetom k prítomnému referátu bola bakalárska práca [5] vedená autorom.

2 Nové výsledky

2.1 Charakterizácia vedeckej práce Tibora Neubrunna

Podrobnejšie budeme charakterizovať výsledky T. Neubrunna v týchto oblastiach:

a) kvantové štruktúry,
b) teória reálnych funkcií,
c) teória miery a integrálu.

2.2 Charakterizácia pedagogickej práce Tibora Neubrunna

Uvedieme vyjadrenia niekoľkých pamätníkov prof. Neubrunna spomedzi jeho priateľov a bývalých študentov. Okrem toho spomenieme niekoľko Neubrunnových publikácií pedagogického a popularizačného charakteru.

3 Záver

3.1 Zhrnutie výsledkov

Získali sme zhrnutie hlavných vedeckých výsledkov Tibora Neubrunna a jeho vedeckej školy. Okrem toho svedectvo súčasníkov T. Neubrunna charakterizujúce jeho osobnosť.

3.2 Dalšie perspektivy

Opis vedeckej školy založenej na Neubrunnových výsledkoch.

Literatúra

[1] Furčáková M., Čižmár J.: *Život a dielo profesora Moravčíka a profesora Marušiaka*. ŽU, Žilina, 2008.

[2] Hlaváč A.: *Matematici, fyzici a astronómovia na Slovensku*. JSMF, Bratislava 1999.

[3] Hronec O., Riečan B., Suláček J.: *Starý pán: Kniha o Jurovi Hroncovi*. VEDA, Bratislava, 1999.

[4] Jodas V.: *Za Tiborom Neubrunnom*. Matematické obzory 38(1992), 9.

[5] Maslíková M.: *Tibor Neubrunn – Život a dielo*. Bakalárska práca, Univerzita M. Bela, Banská Bystrica, 2013.

[6] Nemoga K., Riečan, B.: *Matematika v b mol: Štefan Schwarz – matematik a pedagóg*. VEDA, Bratislava, 1999.

[7] Riečan B., Šalát T.: *Professor Tibor Neubrunn (1929–1990).* Mathematica Slovaca 41(1991), 437– 442.

Adresa

Prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.

FPV UMB Tajovského 40

97401 Banská Bystrica

e-mail: *Beloslav.Riecan@umb.sk*

KUTTAKA

IRENA SÝKOROVÁ

Abstract: Kuttaka is the name given to ancient Indian method of solving indeterminate linear equation with two unknowns. The aim of this paper is to describe the method and present how medieval Indian mathematicians used it to solve problems.

1 Úvod

Matematika a zejména algebra byla ve středověké Indii velmi uznávaným vědním oborem a indičtí učenci dosáhli několika zajímavých výsledků, například při řešení neurčitých rovnic.[1] Tento článek je věnován metodě *kuttaka* – středověkému indickému algoritmu na hledání celočíselného řešení lineární rovnice o dvou neznámých

$$ax + c = by, \qquad a, b, c \in Z.$$

Prvním indickým učencem, který studoval neurčité rovnice, byl Árjabhata I (asi 476 až 550). Ve své převážně astronomické práci *Árjabhatíja* popsal metodu řešení rovnice $ax + c = by$ s přirozenými koeficienty, jejíž řešení hledal rovněž v oboru přirozených čísel. Jeho následovník Bháskara I (asi 600 až 680) ukázal, že stejná metoda může být použita i pro řešení rovnice $ax - c = by$ a navíc, že řešení této rovnice lze odvodit z řešení rovnice $ax - 1 = by$. Tyto metody přejali i další autoři, například Árjabhata II (asi 920 až 1000) popsal, jak lze v některých případech řešení zjednodušit, a upozornil na případy, kdy metody selhávají. Většina autorů při popisu rovnice ještě upozornila na to, že koeficienty *a, b, c* musí být nesoudělné, protože jinak by bylo možno rovnici zkrátit.

Jedním typem úloh vedoucích na neurčitou lineární rovnici byl problém nalézt přirozené číslo *n*, které po vydělení přirozenými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2.[2] Druhým typem byly úlohy, kde se hledalo takové přirozené číslo *x*, které vynásobené daným celým číslem *a* a zvětšené či zmenšené o jiné celé číslo c, je dělitelné číslem *b* beze zbytku. V úloze prvního typu byly koeficienty a_1, a_2 označeny jako dělitelé a čísla r_1, r_2 se nazývala zbytky. V úlohách druhého typu se konstantě *a* říkalo dělenec, konstantě *b* dělitel a konstantě *c* přidané číslo. Neznámá *x* se nazývala násobitel a pro neznámou *y* se používal termín podíl. Mahávíra (asi 800 až 870) neznámou *x* nazýval číslo (ve smyslu neznámé číslo, viz [7]). Analýza neurčitých rovnic prvního stupně se nazývala *kuttaka.*[3] Kořen tohoto slova *kutt* znamená rozdrtit, rozmělnit či rozdrobit; název metody *kuttaka* je možné přeložit jako metoda rozdrobení. O tom, jak významné místo ve staré indické algebře tato metoda měla, svědčí i fakt, že termín *kuttaka* nebo *kutaka-ganita* byl někdy používán pro celou algebru.[4]

---

[1] Neznámou staří Indové nazývali *tolik-kolik* (*yavat-tavat*) a značili *ya*. Pokud bylo potřeba počítat s více neznámými, termín *yavat-tavat* označoval první z nich a pro ostatní se používaly názvy barev (viz [3]).

[2] Podobnou úlohou se zabývali i staří Číňané. Podle čínské věty o zbytcích lze řešení vyjádřit explicitně vzorečkem (viz [5]).

[3] Někdy též *kuttákáara, kuttikára* nebo krátce jen *kutta*.

[4] Indický matematik a astronom Brahmagupta (598–670) je autorem veršované astronomické práce *Brahma-sphuta-siddhanta*, v níž 18. kapitola o algebře se jmenuje *Kuttaka* (viz [2]).

2 Bháskarovo řešení rovnice s přirozenými koeficienty

Árjabhata I řešil úlohu prvního typu: nalézt číslo *n*, které po vydělení danými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2 (viz [6]). Původní formulace však není příliš srozumitelná.[5] Později se řešením rovnice $ax + c = by$ s přirozenými koeficienty *a, b, c* zabývali i další indičtí matematikové, např. Bháskara I, Brahmagupta (asi 598 až 670), Mahávíra, Šrípati (1019–1066), Bháskara II (1114–1185), kteří se věnovali i některým speciálním případům, zejména rovnicím $ax - c = by$ nebo $ax \pm 1 = by$. Uvedeme pravidlo pro řešení rovnice $ax + c = by$ s přirozenými koeficienty *a, b, c,* které popsal Bháskara II ve slokách 55 až 57 druhé kapitoly algebraické práce *Bídžaganita* (viz [2]):

Děl vzájemně dělence [*a*] *a dělitele* [*b*], *které jsou již nesoudělné, dokud není zbytek dělení jednička. Zapiš postupně pod sebou podíly, pod nimi přidané číslo* [*c*] *a dolů nulu.*

Vynásob předposlední [číslo] *číslem přímo nad ním a přičti poslední. Pak vynech poslední a opakuj tento postup, dokud nezůstane pouze dvojice čísel.*

Jestliže horní z nich vydělíme dělencem, zbytek je podíl. Jestliže dolní vydělíme dělitelem, zbytek je násobitel. Tento postup platí, jestliže počet podílů je sudý.

Když je lichý, pak se nalezená čísla musí odečíst od dělence nebo dělitele. Tyto rozdíly budou skutečným podílem [*y*] *a násobitelem* [*x*].

První část pravidla říká, že se ve staré Indii k výpočtu užíval postup odpovídající Eukleidovu algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel *a* a *b*. Označíme-li podíly získané Eukleidovým algoritmem q_0, q_1, $\cdots$, q_n, pak v dalších krocích se počítalo s čísly q_0, q_1, $\cdots$, q_{n-1}, *c*, 0, která se postupně nahrazovala novými hodnotami vypočítanými rekurentně podle Bháskarova pravidla pro *j* = 1, 2, ... , *n* – 1:

$$z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2}, \qquad z_{-1} = c,\ z_{-2} = 0\,.$$

Celý postup předvedeme na příkladu $100x + 90 = 63y$, který předložil Bháskara II. Postupným dělením čísel $100:63$ se nejprve vypočítaly podíly $q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 2$, $q_5 = 1$, $q_6 = 3$, které se, kromě posledního, zapsaly do sloupce a pod ně se ještě připojily hodnoty 90 a 0. Pak se tyto hodnoty postupně přepisovaly novými, jak je uvedeno v jednotlivých sloupcích následující tabulky.

z_5	$q_0 = 1$	1	1	1	1	1	2430
z_4	$q_1 = 1$	1	1	1	1	1530	1530
z_3	$q_2 = 1$	1	1	1	900	900	
z_2	$q_3 = 2$	2	2	630	630		
z_1	$q_4 = 2$	2	270	270			
z_0	$q_5 = 1$	90	90				
z_{-1}	$c = 90$	90					
z_{-2}	0						

[5] Árjabhatova pravidla jsou uvedena ve druhé kapitole práce *Árjabhatíja*, sloky 32–33 (viz [1]).

Ve staré Indii bylo zvykem čísla nepotřebná k dalšímu výpočtu mazat, proto na konci výpočtu zbyla pouze dvě. Protože počet použitých podílů byl sudý ($n = 6$), stačilo výpočet dokončit podle třetí části pravidla. Nejmenší přirozené řešení se získalo jako zbytky dělení

$$2430 : 100 = 24(zb.30)\ ,\ 1530 : 63 = 24(zb.18) \quad \Rightarrow \quad y = 30,\ x = 18 .$$

V dalším pravidle Bháskara vysvětlil, jak je možné z jednoho řešení rovnice $ax + c = by$ odvodit další řešení této rovnice (viz [2]):

Násobitel [x] *a podíl* [y], *když se přičtou ke svým dělitelům vynásobeným libovolnými čísly, stanou se jinými* [řešeními].

Takto bylo možné nalézt libovolné řešení původní rovnice jako

$$y = 30 + 100t, \quad x = 18 + 63t, \qquad t \in Z .$$

Autor sám uvedl další dvě řešení $y = 130,\ x = 81$ a $y = 230,\ x = 144$.

3 Podobnost s řetězovými zlomky

Indická metoda *kuttaka* velmi připomíná metodu využívající řetězové zlomky. Podíl koeficientů $\frac{a}{b}$ můžeme vyjádřit řetězovým zlomkem $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \cdots, q_n]$. Vynecháme-li poslední číslo q_n, získáme $(n-1)$-ní sblížený zlomek $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$. Obecné řešení rovnice $ax + c = by$ s přirozenými nesoudělnými koeficienty *a, b, c*, můžeme vyjádřit ve tvaru[6]

$$y = (-1)^n a_{n-1} c + at, \qquad x = (-1)^n b_{n-1} c + bt, \qquad t \in Z .$$

Čísla a_{n-1} a b_{n-1} se počítají podle rekurentních vztahů pro pro j = 2, 3, ... , n – 1:

$$a_j = q_j a_{j-1} + a_{j-2}, \qquad a_1 = q_0 q_1 + 1, \quad a_0 = q_0 ,$$
$$b_j = q_j b_{j-1} + b_{j-2}, \qquad b_1 = q_1, \quad b_0 = 1 .$$

Tyto vzorce se podobají rekurentnímu vztahu, který používal Bháskara II. S využitím vlastností řetězových zlomků se dá ukázat (viz [8]), že Bháskarovo „horní“ číslo je $z_{n-1} = a_{n-1}c$ a „dolní“ číslo $z_{n-2} = b_{n-1}c$. Protože staří Indové hledali nejmenší přirozené řešení, uvažovali zbytky dělení $z_{n-1} : a = p(zb.y_1)$ a $z_{n-2} : b = p(zb.x_1)$. Vzhledem k tomu, že v Bháskarově příkladě bylo n sudé ($n = 6$), tvar obecného řešení odpovídá vzorcům vyjádřeným pomocí čitatele a jmenovatele ($n-1$)-ního sblíženého zlomku

$$y = a_{n-1}c + at = y_1 + a(t + p), \quad x = b_{n-1}c + bt = x_1 + b(t + p), \qquad t \in Z .$$

---

[6] Odvození je možné nalézt například v [4].

Pro n liché by se však tímto postupem získalo řešení x_1, y_1 rovnice $ax - c = by$, proto bylo třeba ještě podle poslední části pravidla *nalezená čísla odečíst od dělence nebo dělitele*, tedy jako řešení původní rovnice $ax + c = by$ se pak uvažovala čísla $x_2 = b - x_1$, $y_2 = a - y_1$.

4 Závěr

Metoda *kuttaka* byla ve středověké indické matematice velmi důležitá nejen pro časté použití v astronomických výpočtech. Její znalost byla předpokladem při řešení dalších úloh, například tzv. Pellovy rovnice. Výhoda indického výpočtu čísel a_{n-1} a b_{n-1} je v tom, že obě hodnoty byly získány najednou, zatímco jejich stanovení pomocí řetězových zlomků vyžaduje rekurence dvě. Staré indické texty však neobsahují žádné důkazy ani odvození popisovaných metod, správnost byla zřejmě ověřena pouze bohatými početními zkušenostmi.

Literatura

[1] Clark W. E.: *The Aryabhatiya of Aryabhata*. The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1930.

[2] Colebrooke H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. John Murray, London, 1817.

[3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (Part II)*. Motilal Banarsidass, Lahore, 1938.

[4] Chinčin A. J.: *Řetězové zlomky*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[5] Křížek M., Somer L., Šolcová A.: *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím*. Academia, Praha, 2011.

[6] Plofker K.: *Mathematics in India*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[7] Rangacarya M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes*. Government Press, Madras, 1912.

[8] Sýkorová I.: *Znali staří Indové řetězové zlomky?* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 57 (2012), 296–306.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *sykorova@vse.cz*

HISTORIE CAUCHYOVY FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

PETR ŠATNÝ

Abstract: The contribution deals with the best known functional equation, namely, Cauchy's functional equation. After a short comment on the topic of functional equations we introduce Cauchy's equation and describe its original procedure of solution. Finally, we consider historical development of this equation from its modification by Briggs in 1624 to the discovery of discontinuous solutions by Hamel in 1905.

1 Úvod

Teorie funkcionálních rovnic je jedním z nejstarších odvětví matematické analýzy, které je aktuální i v současnosti ([1]). Již na střední škole se žáci setkávají s jednoduchými funkcionálními rovnicemi, aniž vůbec tuší, jak velká oblast výzkumu a výsledků se za nimi skrývá. Jako příklad může posloužit zjednodušená definice sudé, resp. liché funkce, což jsou funkce splňující funkcionální rovnici $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(x)$. Jiné významné třídy funkcí (jako jsou funkce lineární či exponenciální) nemají funkcionální rovnici ve své definici, přesto je lze vhodnou rovnicí, která vyjadřuje, jak funkce dané třídy „fungují", plně charakterizovat. Ověřit přitom, že funkce s daným předpisem danou funkcionální rovnici splňuje, je většinou snadné dosazení; mnohem obtížnější je najít všechny funkce, které danou rovnici splňují, neboť neexistuje obecný postup, jak se k takovým funkcím „dobrat". Funkcionální rovnice a metody jejich řešení se po staletí těší velké pozornosti matematiků. Mezi nimi je na prvním místě bezesporu Cauchyova funkcionální rovnice, na kterou lze určitými transformacemi převést i řadu dalších významných rovnic.

Augustin Louis Cauchy (21. srpna 1789 – 23. května 1857) byl excelentní francouzský matematik. Jako průkopník matematické analýzy rozvíjel dále dílo, které započali Gottfried Wilhelm Leibniz a Sir Isaac Newton ([2]). Od roku 1815, kdy se stal profesorem analýzy a mechaniky na École Polytechnique[1] v Paříži, pracoval podle svých přednášek na svazcích díla *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (anglicky komentovaný překlad lze nalézt v [9]). Naši pozornost si zaslouží první svazek [4], který se z části věnuje oblasti funkcionálních rovnic[2], a pojednává i o funkcionální rovnici, které dnes říkáme Cauchyova. Ke všem rovnicím, které Cauchy do svazku zahrnul, nalezl jejich spojitá řešení, tj. všechny spojité funkce, které je splňují.

2 Cauchyova funkcionální rovnice

Znění věty a následující odvození tvaru všech spojitých funkcí $f: \Re \to \Re$ splňujících Cauchyovu funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro libovolná $x, y \in \Re$ nyní

---

[1] Francouzská vysoká škola technického zaměření založená v roce 1794 ([8]).

[2] Jedním z důvodů, proč se Cauchy funkcionálními rovnicemi vůbec zabýval, bylo ukázat, jakým užitečným nástrojem mohou být pro zavedení limity nebo spojitosti funkce [5, str. 368].

uvedeme v přesném překladu stejně (až na malé odchylky způsobené překladem a z důvodu srozumitelnosti) jako ve výše zmíněném Cauchyově textu [4]. Upravený a matematicky korektní důkaz lze nalézt například v [3], str. 31–34.

Problém. Určete funkci $\phi(x)$ *tak, aby mezi libovolnými dvěma body byla spojitá a aby pro všechny reálné hodnoty* x *a* y *splňovala*

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y). \tag{1}$$

Pokud v rovnici postupně nahrazujeme y za $y+z$, z za $z+u$, &c. . . , dostaneme[3]

$$\phi(x+y+z+u+\ldots)=\phi(x)+\phi(y)+\phi(z)+\phi(u)+\&\mathrm{c}\ldots$$

Uvedená rovnice zřejmě platí pro libovolný počet proměnných, který si označíme m. Po nahrazení každé proměnné kladnou konstantou a, tj. $x=y=z=u=\ldots=a$, obdržíme

$$\phi(ma)=m\phi(a).$$

Pro rozšíření poslední rovnice pro případ, kdy m je nahrazeno zlomkem $\frac{m}{n}$ nebo dokonce libovolným číslem μ, položíme nejdříve $r=\frac{m}{n}a$, kde m a n jsou celá čísla. Dostaneme tak

$$n\cdot r=m\cdot a,$$
$$n\cdot\phi(r)=m\cdot\phi(a),$$
$$\phi(r)=\phi\left(\frac{m}{n}a\right)=\frac{m}{n}\phi(a).$$

Konvergují-li zlomky $\frac{m}{n}$ k číslu μ, pak s využitím limity získáme rovnici $\phi(\mu\cdot a)=\mu\cdot\phi(a)$. Položíme-li nyní $a=1$, přejde získaná rovnice do tvaru

$$\phi(\mu)=\mu\cdot\phi(1). \tag{2}$$

Následným limitním přechodem pro μ k bodu nula dostaneme $\phi(0)=0$. Navíc, když v rovnici (1) položíme $x=\mu$ a $y=-\mu$, získáme $\phi(-\mu)=\phi(0)-\phi(\mu)=-\mu\cdot\phi(1)$. Rovnice (2) tedy platí i po nahrazení μ číslem $-\mu$. Celkem jsme tak odvodili, že pro libovolné x platí $\phi(x)=x\cdot\phi(1)$. Z této rovnice plyne, že každá funkce vyhovující zadání je tvaru $\phi(x)=a\cdot x$. Po dosazení do (1) obdržíme identitu $a(x+y)=ax+ay$ bez ohledu na to, jaké a bylo zvoleno. Tedy každá funkce ve tvaru $\phi(x)=a\cdot x$ splňuje zadání pro libovolné a.

3 Vývoj Cauchyovy funkcionální rovnice

Modifikaci Cauchyovy funkcionální rovnice $g(xy)=g(x)+g(y)$ použil Henry Briggs v roce 1624 při konstrukci logaritmu[4], jehož vlastnost $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$ koresponduje s uvedenou rovnicí. Tato událost se považuje vůbec za první, kdy byla určitá funkce definována pomocí nějaké funkcionální rovnice ([5, str. 360]).

[3] &c. značí *et cetera*, česky *a tak dále*.
[4] *Arithmetica Logarithmica,* folio, London, 1624.

V roce 1797 se Sylvestre François Lacroix ve své knize[5] zabýval otázkou rozvoje $(1+x)^{\alpha}$. Ukázal, že koeficienty rozvoje závisí rekurzivně na prvním koeficientu, který si označil $f(\alpha)$. Poté dokázal, že pro tento první koeficient v závislosti na exponentu α platí funkcionální rovnice $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$. Při jejím řešení postupoval Lacroix podobně jako Cauchy. Od místa, kde se ukáže, že $f(\alpha)=\alpha$ pro libovolné racionální α, se důkazy obou matematiků liší (Lacroix nepoužil vlastnosti limity a spojitosti [5, str. 366]).

V prvním svazku *Course d'Analyse* Cauchy nejen vyřešil základní rovnici $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$ za předpokladu spojitosti funkce *f* (jak jsme vyložili v oddíle 2), ale za stejného předpokladu odvodil i tvary řešení následujících modifikovaných[6] rovnic:

$$\phi(x+y)=\phi(x)\cdot\phi(y)^{7}\ \left(\text{řešení } \phi(x)=[\phi(1)]^{x}\right),$$
$$\phi(x\cdot y)=\phi(x)+\phi(y)\ \left(\text{řešení } \phi(x)=a\cdot L(x)\right)^{8}$$
$$\phi(x\cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)\ \left(\text{řešení } \phi(x)=x^{a}\right).$$

Preciznost Cauchyova díla a jeho celkové shrnutí známých funkcionálních rovnic včetně jejich tvaru řešení byly příčinou toho, že rovnici $f(x+y)=f(x)+f(y)$ nazýváme jeho jménem, ačkoliv Cauchy nebyl první, kdo našel všechna spojitá řešení. Podle [3, str. 96] byla tato rovnice včetně modifikací a tvaru řešení známa již A. M. Legendrovi[9] v roce 1791.

V roce 1875 aplikoval Jean Gaston Darboux Cauchyovu funkcionální rovnici na skládání vektorů sil a ve stejném roce oslabil Cauchyův předpoklad o spojitosti funkce na celé množině reálných čísel na spojitost pouze v jednom bodě, aniž by se změnil tvar řešení. Darboux taktéž dokázal, že předpoklad spojitosti lze nahradit buď monotónií nebo požadavkem, aby funkce nabývala v nezáporných číslech nezáporných hodnot ([5, str. 371]). V roce 1880 Darboux dokonce ukázal, že stačí, aby funkční hodnoty měly stejné znaménko (+ nebo –) na nějakém intervalu $(0,\delta)$. Rovněž dokázal, že spojité je každé takové řešení Cauchyovy rovnice, které je omezenou funkcí na některém intervalu (kladné délky) ([6, str. 63]).

K překvapujícímu výsledku se dopracoval Georg Hamel v roce 1905, kdy se mu podařilo dokázat existenci nespojitých řešení Cauchyovy rovnice ([3, str. 36]). Konstrukci těchto řešení založil na tzv. *Hamelově bázi* reálných čísel. Tato báze je nespočetnou podmnožinou reálných čísel s vlastností, že každé $x\in\Re$ lze jednoznačným způsobem vyjádřit ve tvaru konečné lineární kombinace $x=r_1h_1+\ldots+r_kh_k$, kde $h_1,\ldots,h_k$ jsou prvky této báze a $r_1,\ldots,r_k$ jsou racionální čísla.[10] Je snadné ukázat, že při libovolné volbě hodnot $f(h_i)$ na všech prvcích h_i Hamelovy báze dostaneme řešení *f* Cauchyovy rovnice, když pro každé reálné *x* podle výše uvedené lineární kombinace položíme $f(x)=f(r_1h_1+\ldots+r_kh_k)=f(r_1h_1)+\ldots+f(r_kh_k)=r_1f(h_1)+\ldots+r_kf(h_k)$. Je přitom jasné, že již volbou dvou hodnot $f(h_i)$ můžeme docílit toho, že funkce nebude tvaru $f(x)=ax$.

[5] Lacroix S. F.: *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Chez Courcier, Paris, 1797.
[6] V některých textech se i tyto modifikace nazývají Cauchyovy funkcionální rovnice.
[7] Rovnici Cauchy využil v důkazu binomické věty [5, str. 367].
[8] L(x) značí logaritmus.
[9] Legendre A. M.: *Éléments de geometrie*, Note II, Paris 1791.
[10] Existence Hamelovy báze je netriviální poznatek, k jehož důkazu potřebujeme *axióm výběru*.

4 Závěr

Jak jsme naznačili úvodem, jsou funkcionální rovnice stále se rozvíjejícím oborem matematiky, o čemž svědčí nemalé množství otevřených problémů a nerozřešených rovnic. Cauchyova funkcionální rovnice mezi nimi zaujímá vyjímečné postavení nejen tím, že i s velmi slabými požadavky na funkci, která má rovnici splňovat, obdržíme její předpis ve tvaru $f(x) = cx$ a že mnoho jiných rovnic lze na ni převést, ale také využitím v řadě jiných matematických disciplín a jiných vědních oborů (podrobněji viz [5]).

Literatura

[1] Davidov L.: *Funkcionální rovnice*. Mladá fronta, Škola mladých matematiků, Praha, 1984, svazek 55.

[2] Wikipedia (The free encyclopedia): *Augustin Louis Cauchy* [online]. Poslední revize 9. března 2013 [cit. 6. 5. 2013].

http://cs.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy.

[3] Neuman F.: *Funkcionální rovnice*. SNTL, Praha, 1986.

[4] Cauchy A.-L.: *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. De l'imprimerie royale, Debure frères, 1821, svazek 1, 104–106.

[5] Aczél J., Dhombres J. G.: *Functional Equation in Several Variables*. Cambridge University Press, 1989.

[6] Radulescu T.-L., Radulescu V. D., Andreescu T.: *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*. Springer, 2009.

[7] Wikipedia (The free encyclopedia): *Augustin Louis Cauchy* [online]. Poslední revize 12. března 2013 [cit. 6. 5. 2013].

http://fr.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy.

[8] Wikipedia (The free encyclopedia): *École Polytechnique* [online]. Poslední revize 24. března 2013 [cit. 6. 5. 2013].

http://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%89cole_Polytechnique.

[9] Bradley R. E., Sandifer C. E.: *Cauchy's Cours d'analyse*. An annotated translation, Springer, New York, 2009.

Adresa

Mgr. Petr Šatný
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: *satnyp@mail.muni.cz*

CHARAKTERISTIKY MATIC A GRAFŮ

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Abstract: In 1880s, Corrado Segre and Eduard Weyr introduced characteristics which are defined for square matrices. One hundred years later, Hans Schneider and Daniel Hershkowitz studied characteristics of graphs. Surprisingly, there are close relationships between all the characteristics.

1 Úvod

Historie některých matematických pojmů je, tak jako život lidský, plná vzestupů a pádů. Příspěvek se věnuje „osudům“ několika posloupností přirozených čísel. Ačkoliv počátky některých z nich dělí přibližně jedno století a zavedeny jsou řečí různých teorií, existují mezi nimi překvapivé a elegantní souvislosti.

Již v osmdesátých letech 19. století byla zavedena tzv. *Segreova charakteristika*, která se objevovala – a stále objevuje – v odborných publikacích lineární algebry. Přibližně ve stejné době byla definována tzv. *Weyrova charakteristika*. Ač se jedná jistým způsobem o analogii charakteristiky Segreovy, upadla Weyrova charakteristika téměř v zapomnění. K jejímu vzkříšení došlo především v osmdesátých a devadesátých letech 20. století, kdy byla, spolu s několika dalšími posloupnostmi, studována v úzké souvislosti s teorií grafů. Každému z uvažovaných grafů lze přiřadit (ne nutně jedinou) matici a pro jistou třídu matic lze všechny níže uvedené grafové posloupnosti a Weyrovu charakteristiku uspořádat pomocí tzv. *relace majorizace*. V tomto uspořádání hraje výsadní roli právě Weyrova charakteristika.

2 Charakteristiky teorie matic

2.1 Segreova charakteristika

V roce 1884 zavedl italský matematik Corrado Segre[1] (1863–1924) v článku *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero dualunque di dimensioni* [9] posloupnost čísel, která se váže ke čtvercové matici a která dnes nese jeho jméno.

Uvažujme komplexní matici A řádu n, její Jordanův kanonický tvar J a některé její vlastní číslo λ. Nerostoucí posloupnost $\xi(\lambda) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_q)$ sestavená z řádů všech Jordanových buněk vztahujících se k vlastnímu číslu λ se nazývá *Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu* λ.

[1] Corrado Segre studoval a působil v Turíně. Již od mládí hojně publikoval, po dlouhá léta korespondoval s Felixem Kleinem (1849–1925). Studoval především geometrické invarianty při lineárních transformacích, algebraické křivky a plochy. Významně oživil v Itálii zájem o geometrii, svým přínosem pro tamější geometrickou školu je řazen hned za takovou osobnost, jakou byl Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830–1903).

Posloupnost $\xi(A)$, která obsahuje všechny Segreovy charakteristiky matice A příslušné jejím navzájem různým vlastním číslům, se nazývá *Segreova charakteristika matice A*.[2]

2.2 Weyrova charakteristika

V druhé polovině osmdesátých let 19. století přistoupil český matematik Eduard Weyr[3] (1852–1903) velmi originálně k problematice kanonických tvarů matic. Při studiu této otázky definoval některé nové pojmy, které se staly součástí poznatků dnes souhrnně nazývaných *Weyrova teorie charakteristických čísel* (viz např. krátká poznámka *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* [14] z roku 1885 nebo knížka *O theorii forem bilinearných* [15] z roku 1889), jejímž základním pojmem je tzv. *nulita matice*. Tento pojem však byl zaveden již roku 1882 britským matematikem Jamesem Josephem Sylvesterem (1814–1897) v článku *On the properties of a split matrix* [12]. Nulita je definována pouze pro čtvercové matice a je rovna rozdílu řádu a hodnosti matice (nulitu matice A budeme značit nul A). Pomocí nulit jsou definována tzv. *charakteristická čísla matice*. Zaveďme nyní zmíněné pojmy.

Nechť A je komplexní matice řádu n, nechť λ je její s-násobné vlastní číslo a nechť E značí jednotkovou matici příslušného řádu. Potom existuje přirozené číslo t (tzv. *index matice A příslušný vlastnímu číslu λ*), pro které

$$\operatorname{nul}(A-\lambda E) < \operatorname{nul}(A-\lambda E)^2 < \ldots < \operatorname{nul}(A-\lambda E)^t = \operatorname{nul}(A-\lambda E)^{t+1} = \ldots$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
&\operatorname{nul}(A-\lambda E) = \eta_1,\\
&\operatorname{nul}(A-\lambda E)^2 = \eta_1+\eta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\operatorname{nul}(A-\lambda E)^t = \eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_t,
\end{aligned}$$

potom přirozená čísla $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ jsou *charakteristická čísla matice A příslušná vlastnímu číslu λ.*

Posloupnost $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t)$ se nazývá *Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ*, soubor $\eta(A)$ všech Weyrových charakteristik matice A příslušných všem jejím vlastním číslům se nazývá *Weyrova charakteristika matice A*.

---

[2] V originální práci [9] byla zavedena takto:

Ora il Weierstrass ha dimostrato ... che la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa effettuare questa trasformazione è che i divisori elementari del determinante $|a_{ik}-\rho b_{ik}|$ coincidano con quelli del determinante $|p_{ik}-\rho q_{ik}|$. Dicendo $e_t, e'_t, ..., e_t^{(h_t-1)}$ i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante $|a_{ik}-\rho b_{ik}|$ corrispondenti ad una stessa radice ρ, e chiamando caratteristica l'insieme di questi gradi cosi raggruppati:

$$[(e_1, e'_1, ..., e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, ..., e_2^{(h_2-1)}), ..., (e_r, e'_r, ..., e_r^{(h_r-1)})],$$

noi divideremo le omografie in classi a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intenderemo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica. ([9], str. 136–137)

[3] Eduard Weyr studoval na pražské polytechnice a také v zahraničí (Göttingen, Paříž, Berlín), působil na české technice, na pražské a později na české univerzitě. V letech 1884/85 a 1890/91 zastával na technice funkci rektora. Zabýval se především geometrií, dále algebrou (determinanty, matice, kvaterniony) a analýzou.

2.3 Vztah Segreovy a Weyrovy charakteristiky

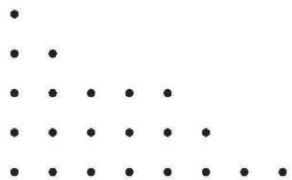
K odtajnění prosté souvislosti mezi Segreovou a Weyrovou charakteristikou nejdříve definujme nové pojmy.

Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ je nerostoucí posloupnost přirozených čísel. Uvažujme diagram vytvořený z t sloupců teček, z nichž k-tý sloupec má právě α_k teček. První (spodní) tečky všech sloupců jsou umístěny na stejném, posledním řádku, druhé tečky na předposledním řádku atd. Tímto způsobem sestrojené schéma se nazývá *Ferrersův diagram posloupnosti* α.[4] Posloupnost α^* nazveme *duální k posloupnosti* α, jestliže její členy značí počty teček v jednotlivých řádcích (čteno odspodu) Ferrersova diagramu posloupnosti α.

Nyní nám nic nebrání formulovat následující větu, z níž je zřejmé, že každou ze dvou uvažovaných charakteristik lze elementárním způsobem odvodit z charakteristiky druhé.

Segreova a Weyrova charakteristika matice, které přísluší stejnému vlastnímu číslu, jsou duálními posloupnostmi.

Je-li tedy jednou z charakteristik například posloupnost (5, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1), je k ní duální posloupností posloupnost (8, 6, 5, 2, 1), jak lze vyčíst z následujícího Ferrersova diagramu



Vztah duality mezi zmíněnými charakteristikami se objevuje již v prvních monografiích teorie matic publikovaných v třicátých letech 20. století. Jmenujme například knihu *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [13], kterou roku 1932 publikovala autorská dvojice Herbert Western Turnbull (1885–1961) a Alexander Craig Aitken (1895–1967), nebo úsporně napsaný text *The Theory of Matrices* [7] z roku 1933, jehož autorem je americký matematik Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961).

Uvedený diagram je pojmenován po anglickém matematikovi Normanu Macleodu Ferrersovi[5] (1829–1903), který však výsledky spojené se zmíněným diagramem nepublikoval. Zveřejnil je James Joseph Sylvester v článku *On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients* [11] z roku 1853 na základě jejich vzájemné korespondence.

---

[4] Setkáme se též s termínem *Youngovo tablo*, resp. *Youngův diagram*.

[5] Norman Macleod Ferrers pocházel z dobře situované rodiny. Postupně vystudoval matematiku v Cambridge, právo v Londýně a teologii v Cambridge. Právu se nevěnoval, knězem se stal v roce 1860, v jeho kariéře však nakonec zvítězila matematika. Ferrers pak působil v Cambridge, v roce 1884/85 zde byl rektorem.

3 Charakteristiky teorie grafů

Od konce sedmdesátých let[6] 20. století začal kolektiv soustředěný kolem dvou výrazných osobností lineární algebry, britsko-amerického matematika Hanse Schneidera[7] (nar. 1927) a izraelského matematika Daniela Hershkowitze[8] (nar. 1953), studovat vztah Weyrovy charakteristiky matice příslušné vlastnímu číslu 0, kterou však ve většině prací nazývali *výšková charakteristika* (*height characteristic*) a značili $\eta(A)$, a posloupností zavedených prostředky teorie grafů. Studium této problematiky vyvrcholilo na konci osmdesátých a v první polovině devadesátých let 20. století. Představme alespoň ve stručnosti základy odborné náplně prací zabývajících se touto problematikou.

3.1 Úrovňová charakteristika

Každou čtvercovou komplexní matici lze simultánními permutacemi řádků a sloupců[9] převést na tzv. *Frobeniův normální tvar*. Jedná se o blokově dolní trojúhelníkovou matici, jejíž bloky na diagonále jsou čtvercové a tzv. *ireducibilní*. Matici nazveme ireducibilní, jestliže ji nelze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na tvar

$$A = \begin{pmatrix} K & L \\ O & M \end{pmatrix}, \qquad \text{resp. na tvar} \qquad A = \begin{pmatrix} K & O \\ L & M \end{pmatrix},$$

kde K a M jsou čtvercové matice (řádu alespoň jedna) a O je nulová matice.

Pro Frobeniův normální tvar (resp. pro každou blokovou matici A) s p bloky na diagonále lze definovat *redukovaný graf* $R(A)$ jako graf o p vrcholech, v němž existuje hrana z i-tého vrcholu do j-tého právě tehdy, když je blok v i-tém řádku a j-tém sloupci Frobeniova normálního tvaru nenulovou maticí. Vrchol i redukovaného grafu se nazývá *singulární*, je-li příslušný i-tý blok na diagonále singulární maticí.

Demonstrujme nové pojmy na konkrétním příkladě. Uvažujme například matici

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

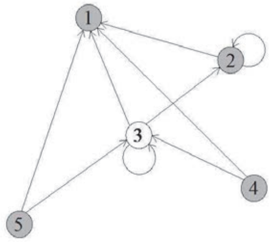
[6] Některé základní vlastnosti byly ve zcela jiné terminologii dokázány Hansem Schneiderem již na počátku padesátých let 20. století (viz dále).

[7] Hans Schneider patří mezi nejvýraznější osobnosti současné lineární algebry. V období 1987 až 1996 byl prvním prezidentem nově založené *The International Linear Algebra Society* (ILAS; v prvních dvou letech působila pod názvem *The International Matrix Group*). Působil například na univerzitě v Belfastu, jeho profesionální dráha je však spojena především s *University of Wisconsin*, kde je nyní emeritním profesorem. Každé tři roky je udělována *Hans Schneider Prize* za vynikající úspěchy v lineární algebře nebo celoživotní přínos tomuto oboru. Pro zajímavost uveďme, že jeho kořeny sahají na naše území, neboť se jeho otec narodil v Karviné.

[8] Rovněž Daniel Hershkowitz je jedním z předních představitelů dnešní komunity lineárních algebraiků. Vystudoval a působí na *Technion – Israel Institute of Technology*. Také on je bývalým prezidentem ILASu, funkci zastával v letech 2002 až 2008. Od roku 2009 je ministrem věd a technologie v izraelské vládě.

[9] Simultánními permutacemi řádků a sloupců matice A rozumíme transformaci $P^{-1}AP(=P^TAP)$, kde P je permutační matice, což je matice, která má v každém řádku a v každém sloupci právě jednu jedničku a na zbývajících pozicích nuly. Jednoduše řešeno, zaměňujeme-li i-tý a j-tý řádek, zaměňujeme také i-tý a j-tý sloupec matice.

která je ve Frobeniově normálním tvaru. Jednotlivé bloky jsou odděleny čarami. Příslušný redukovaný graf $R(A)$ má pět vrcholů. S výjimkou vrcholu 3 přísluší všechny vrcholy singulárním maticím, a jsou tedy singulární (tyto vrcholy budeme značit podbarvením). Redukovaný graf $R(A)$ matice A vypadá takto:



Cestou budeme rozumět posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_k$, $k \geq 1$, různých vrcholů grafu, ve které jsou každé dva po sobě jdoucí vrcholy spojeny orientovanou hranou, tj. hrany jdou z i_1 do i_2, z i_2 do i_3 atd. až z i_{k-1} do i_k. Vrchol považujeme rovněž za cestu.

Uvažujme singulární vrchol i redukovaného grafu $R(A)$, kde A je ve Frobeniově normálním tvaru, a všechny cesty v $R(A)$ v něm končící. Z těchto cest vyberme takovou cestu, která obsahuje největší počet singulárních vrcholů. *Úrovní* singulárního vrcholu i redukovaného grafu $R(A)$ rozumíme počet singulárních vrcholů na této cestě. Nechť m je největší z úrovní všech singulárních vrcholů v grafu $R(A)$. Potom *úrovňovou charakteristikou* $\lambda(A)$ matice A rozumíme posloupnost $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, kde λ_k značí počet singulárních vrcholů grafu $R(A)$ majících úroveň k.

V našem příkladě je úroveň singulárního vrcholu 1 rovna třem, neboť ze všech cest, které v něm končí, mají nejvíce singulárních vrcholů cesty 5, 3, 2, 1 a 4, 3, 2, 1, a to tři. Obdobně zjistíme, že úroveň vrcholu 2 je dva, úrovně vrcholů 4 i 5 jsou shodně jedna. Úrovňová charakteristika matice A je tedy $\lambda(A) = (2, 1, 1)$.

Vypočítáme-li Weyrovu charakteristiku matice A příslušnou vlastnímu číslu 0, tj. výškovou charakteristiku matice A, zjistíme, že

$$\operatorname{nul} A = 2, \qquad \operatorname{nul} A^2 = 3, \qquad \operatorname{nul} A^3 = 4, \qquad \operatorname{nul} A^4 = 4,$$

a proto $\eta(A) = (2, 1, 1)$. Shoda obou charakteristik není náhodná.

Hans Schneider již ve své disertační práci *Matrices with non-negative elements* [10] z roku 1952 dokázal (ve zcela jiné symbolice a terminologii), že ve dvou speciálních případech se pro třídu tzv. *M-matic*, což jsou čtvercové matice mající na diagonále nezáporné prvky a na ostatních místech prvky nekladné, tyto dvě charakteristiky rovnají. Jedná se jednak o případ, kdy jsou charakteristiky jednoprvkové (tj. $\lambda(A) = \eta(A) = (t)$), a o situaci, kdy charakteristiky obsahují pouze jedničky (tj. $\lambda(A) = \eta(A) = (1, 1, ..., 1)$). V uvedené práci Schneider současně vznesl otázky, v jakých jiných případech se charakteristiky pro M-matice rovnají a jaký je obecně mezi nimi vztah.

Na první otázku bylo odpovězeno až téměř po čtyřiceti letech ve společných článcích Schneidera a Hershkowitze. Jedná se o práci *Height bases, level bases and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix* [3] z roku 1989 a článek *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic* *of an M-matrix* [4] z roku 1991. V prvním textu bylo uvedeno dvanáct podmínek ekvivalentních vztahu $\lambda(A) = \eta(A)$, o pouhé dva roky později bylo těchto podmínek známo již třicet pět.

Odpověď na otázku ohledně vztahu obou charakteristik je obsažena v následující větě, v níž symbol « značí tzv. *majorizaci*[10] posloupnosti $\lambda(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$ posloupností $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, tj. pro prvky uvedených posloupností platí:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \le \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k \qquad \text{pro } k = 1, \ldots, t-1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_t = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t.$$

Uveďme slíbenou větu, jejíž důkaz nalezneme v článku *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix* [8], který roku 1979 publikovali Hans Schneider a jeho doktorand Daniel Richman (nar. 1944), nebo též v již zmíněné práci [3] z roku 1989.

Pro každou M-matici je

$$\lambda(A) \ll \eta(A).$$

Hershkowitz v roce 1989 toto tvrzení zpřesnil v článku *A majorization relation between the height and the level characteristics* [2], učinil tak navíc pro obecnější třídu matic než jsou *M*-matice (příkladem těchto matic je i výše uvedená konkrétní matice *A*).

Nechť A je blokově trojúhelníková matice se čtvercovými bloky na diagonále, z nichž ty singulární mají 0 *jako jednoduché vlastní číslo. Potom*

$$\lambda^{\circ}(A) \ll \eta(A),$$

kde symbol $\lambda^{\circ}(A)$ *značí posloupnost, která vznikla z posloupnosti* $\lambda(A)$ *uspořádáním jejích prvků do nerostoucí posloupnosti.*

Dokázaný vztah majorizace vyvolal v algebraické komunitě řadu nových otázek následujícího typu: Je-li dána výšková charakteristika, jak vypadají všechny možné úrovňové charakteristiky, které s ní jsou spjaty přes nějakou *M*-matici? A naopak, jaké jsou všechny možné výškové charakteristiky *M*-matic dané úrovňové charakteristiky? Odpovědi na tyto otázky byly formulovány ve Schneiderově a Hershkowitzově článku *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* [5] z roku 1991.

Protože pro blokově trojúhelníkové matice, které na diagonále obsahují blok mající vícenásobné vlastní číslo 0, vztah majorizace neplatí, začaly se hledat nové posloupnosti, které by úrovňovou charakteristiku v relaci nahradily. Na počátku devadesátých let 20. století se ukázalo, že vhodnými posloupnostmi budou charakteristiky grafů zavedené pomocí tzv. *pokrytí grafu cestami*, což je taková množina cest grafu, že každý vrchol grafu náleží právě jedné z těchto cest. Jednou z nejvýznamnějších prací z této oblasti je Schneiderův a Hershkowitzův text *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* [6] z roku 1993.

Zaveďme dvě posloupnosti využívající pokrytí grafu cestami. Nechť symbol $p_k(G)$, $k = 1, 2, \ldots$, značí maximální počet vrcholů bez smyček, které mohou být zahrnuty v k (či méně) vrcholově disjunktních cestách grafu G. Položme $p_0(G) = 0$. Dále nechť t je nejmenší počet vrcholově disjunktních cest grafu G, které jsou nutné k pokrytí všech vrcholů

[10] Relace majorizace posloupností byla obecně zavedena v pracích mimo uvažovanou problematiku.

grafu G, které nemají smyčky. Evidentně je $p_{k-1}(G) < p_k(G)$ pro $1 < k \le t$, a $p_{k-1}(G) = p_k(G)$ pro $k > t$. Odtud plyne, že pro $k = 1, 2, \ldots, t$ lze definovat přirozená čísla

$$\pi_k(G) = p_k(G) - p_{k-1}(G).$$

Symbolem $\pi(G)$ budeme značit posloupnost

$$(\pi_1(G), \pi_2(G), \ldots, \pi_t(G)).$$

Nechť G je acyklický graf (smyčky mít může). Množina vrcholů grafu G, které nemají smyčky, se nazývá *k-systém*, jestliže žádná její $(k+1)$-prvková podmnožina neleží na stejné cestě. Symbol $d_k(G)$ nechť dále značí maximum z počtu prvků všech k-systémů, $k = 1, 2, \ldots,$ a nechť $d_0(G) = 0$. Nechť t značí největší počet vrcholů bez smyček grafu G ležících na téže cestě. Zřejmě $d_{k-1}(G) < d_k(G)$ pro $1 < k \le t$, a $d_{k-1}(G) = d_k(G)$ pro $k > t$. Pro $k = 1, 2, \ldots, t$ označme

$$\delta_k(G) = d_k(G) - d_{k-1}(G).$$

Symbolem $\delta(G)$ budeme rozumět posloupnost

$$(\delta_1(G), \delta_2(G), \ldots, \delta_t(G)).$$

S pomocí těchto posloupností formulujme překvapivou větu, která platí pro tzv. *téměř trojúhelníkové matice*, tj. pro matice, které lze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na matice trojúhelníkové.

Každá téměř trojúhelníková matice A splňuje vztahy

$$\lambda(A) \ll \lambda^{\circ}(A) \ll \delta(G(A)) \ll \pi(G(A))^{*} \ll \eta(A).$$

V roce 1999 Daniel Hershkowitz publikoval přehledový článek *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices* [1]. V něm shrnul dosud známé výsledky dokázané v předchozích desetiletích v několika desítkách prací, z nichž ty nejdůležitější jsme již představili, a v závěru rovněž dokázal nová tvrzení. K jejich formulaci však musel zavést nové typy grafů, resp. mírně pozměnit definici majorizace posloupností. Na přelomu tisíciletí došlo svým způsobem k uzavření studia těchto otázek, v článcích publikovaných po roce 2000 je zřejmý odklon od typické náplně předchozích prací.

4 Závěr

Pro českého čtenáře je jistě potěšitelné, že Weyrova charakteristika, analogie známější charakteristiky Segreovy, se takřka sto třicet let po svém zavedení stále objevuje v předních odborných časopisech. Má úzký vztah k několika posloupnostem teorie grafů, které lze například pro téměř trojúhelníkové matice umístit do řady pěti navzájem se majorizujících posloupností. Na jejím konci stojí Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu nula, zatímco všechny její předchůdci v této řadě jsou historicky jejími následovníky, a to přibližně o sto let mladšími.

Literatura

[1] Hershkowitz D.: *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices*. Linear Algebra and its Applications 302/303(1999), 173–191.

[2] Hershkowitz D.: *A majorization relation between the height and the level characteristics*. Linear Algebra and its Applications 125(1989), 97–101.

[3] Hershkowitz D., Schneider H.: *Height bases, level bases and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix*. Linear and Multilinear Algebra 25(1989), 149–171.

[4] Hershkowitz D., Schneider H.: *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix*. Linear and Multilinear Algebra 29(1991), 21–42.

[5] Hershkowitz D., Schneider H.: *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics*. Israel Journal of Mathematics 75(1991), 105–117.

[6] Hershkowitz D., Schneider H.: *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 59(1993), 172–187.

[7] MacDuffee C. C.: *The Theory of Matrices*. Springer, Berlin, 1933; reprinty: Chelsea, New York, 1946, 1959; Dover, Mineola, New York, 2004.

[8] Richman D. J., Schneider H.: *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix*. Aequationes Mathematicae 17(1978), 208–234.

[9] Segre C.: *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei III 19(1884), 127–148.

[10] Schneider H.: *Matrices with non-negative elements*. Ph.D. Thesis, University of Edinburgh, 1952.

[11] Sylvester J. J.: *On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients*. Philosophical Magazine 5(1853), 199–202.

[12] Sylvester J. J.: *On the properties of a split matrix*. Johns Hopkins University Circulars 1(1882), 210–211.

[13] Turnbull H. W., Aitken A. C.: *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*. Blackie & Son, Ltd., London, Glasgow, Bombay, 1932, další vydání: 1945, 1948, 1950, 1952; reprint: Dover, New York, 1961, 2005.

[14] Weyr Ed.: *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 966–969.

[15] Weyr Ed.: *O theorii forem bilinearných*. Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české společnosti nauk v Praze č. II, Praha, 1889.

Adresa

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *martinastepanova@centrum.cz*

JEŠTĚ O DIGITÁLNÍ MATEMATICKÉ KNIHOVNĚ

JIŘÍ VESELÝ

Abstract: The article explains the present activities in the Czech Digital Mathematical Library (DML-CZ) and its relation to the European Digital Mathematical Library (EuDML). The work on its part Eminent Czech Mathematicians will be described in details.

1 Úvod

1.1 Současný stav

DML-CZ není třeba podrobně představovat; pokud např. v internetovém vyhledávači zkusíte zadat jen „dml“, objeví se DML-CZ na jednom z předních míst. Protože tato knihovna již vstoupila do povědomí širší matematické veřejnosti, připomenu pouze její URL: http://dml.cz/about – zde jsou všechny základní informace a odsud se dostanete i na ostatní věci, které si můžete vyzkoušet (viz též [1], [4]).

1.2 Výchozí poznatky

Od ukončení projektu v roce 2009 v DML-CZ přibývají nová čísla našich matematických časopisů s plnými texty, které jsou přístupné vždy po určité době pevně dohodnuté s vydavateli (tzv. moving wall). Přibyl i oddíl věnovaný historii JČMF a další knížky, např. Jarníkovy učebnice diferenciálního a integrálního počtu. Pro zájemce o historii matematiky jsou zajímavé nejen články z hůře dostupných starších ročníků časopisů, ale i knížky ze série *Dějiny matematiky*. Ty tam však najdete také s jistým zpožděním, zveřejňujeme je po dohodě s editory. Od posledních zpřístupněných informací se událo pár důležitých věcí a na ně bych chtěl v tomto příspěvku upozornit.

2 Nově v DML-CZ

2.1 Evropská digitální matematická knihovna

Těsně po skončení českého projektu DML-CZ se rozběhl další, mnohem obsáhlejší digitalizační projekt. Byl zaměřen na evropskou koordinaci národních iniciativ a na vytvoření společného portálu s množstvím doplňkových služeb. V období tří let od února 2010 se ho zúčastnilo 17 institucí. Byly mezi nimi jednak „lokální“ digitální matematické knihovny, ale též vědecké instituce, univerzity, knihovny, softwaroví specialisté, vydavatelé matematické literatury, provozovatelé informačních databází a další subjekty. S výstupy projektu se můžete seznámit prostřednictvím internetu. Na stránkách EuDML (viz http://eudml.org/) je možné mnoha způsoby prohledávat velkou část *evropské* matematické literatury. Jsou zde totiž na jednom místě zpřístupněny najednou digitální knihovny jednotlivých účastníků včetně DML-CZ. Lze zde ale nalézt i nástroje, které DML-CZ přímo neposkytuje, vše ve velmi intuitivní a lehce srozumitelné podobě (interface má mnoho jazykových mutací). O projektu přinesou podrobnější informaci Pokroky MFA, kterou napsal kol. Jiří Rákosník (viz [3]). Několik aspektů bych chtěl alespoň stručně popsat.

Dá se říci, že bylo odkud vycházet: značná část relevantní zpřístupněné literatury byla již při zahájení EuDML digitalizována a tento projekt se dalším digitalizováním nezabýval. Rovněž postup digitalizace byl v podstatě již ustálený (v DML-CZ jsme vycházeli ze zkušeností Digitalisierungszentrum v Göttingen a projektu NUMDAM v Grenoble), ale samotná vytvořená data mohla mít různou strukturu a kvalitu. Bylo nutné vše sladit a dohodnout se na určitém minimálním standardu. Cílem bylo (viz [3]):

– umožnit dlouhodobé uchování digitalizovaných dokumentů,
– zpřístupnit je online v podobě trvalé digitální sbírky, která se systematicky rozrůstá,
– zajistit k dokumentům volný přístup po uplynutí určité rozumně stanovené lhůty,
– zpřístupnit náročné služby pro vyhledávání a vzájemné propojení dat.

To se do velké míry v rámci projektu EuDML podařilo. Plné texty nejsou centrálně shromažďovány, zůstávají v lokálních knihovnách, přístup k nim je zprostředkovaný; sklízejí se pouze metadata jednotlivých publikací, které partneři do celkového souboru přinášejí, a podle potřeby se upravují a doplňují.

Je potěšitelné, že role DML-CZ je v tomto směru nemalá: co do počtu zveřejněných dokumentů jsme mezi účastníky projektu na třetím místě a technická úroveň našich dokumentů také patří k těm nejlepším v projektu. A co je ještě důležité: i když projekt skončil a není dále financován z prostředků EU, běží ve skromnějších podmínkách dál a jeho budoucnost na nejméně tři další roky je zajištěna prostřednictvím zúčastněných organizací.

Jedním z důvodů dobré pozice české reprezentace v EuDML je dobrá připravenost na tento projekt. Pod patronací Evropské matematické společnosti proběhlo v minulosti několik neúspěšných pokusů o získání podpory pro EuDML od Evropské komise. Když tento poslední pokus vyšel, projekt DML-CZ právě skončil, a tak zkušenosti v něm nabyté bylo možno bezprostředně využít. EuDML se patrně nějakou dobu nebude kvalitativně rozvíjet takovým tempem jako v průběhu projektu, ale kvantitativní růst bude zajištěn. A s tím souvisí i další růst DML CZ, na který se teď soustředíme.

2.2 Novinky DML-CZ

DML-CZ obsahuje několik sekcí podle typu dokumentů (časopisy, sborníky, knihy). Poslední, kterou jsme zřídili, je sekce nazvaná Eminent Czech Mathematicians, která je věnována význačným osobnostem české matematiky. Tak jako v celé DML-CZ, „české" je zde chápáno v širším smyslu, nikoli v souvislosti se vznikem České republiky. Chceme se věnovat i osobnostem, které v širším smyslu lze zahrnout do pojmu „česká matematika" bez ohledu na to, kdy zde žily. Prvním a zatím jediným matematikem, který je zařazen do této části, je prof. Otakar Borůvka, což souvisí s tím, že v roce 2009 uplynulo 110 let od jeho narození. Na dalších postavách české matematiky pracujeme. Postupně se dospělo k formátu vystavované informace: je to především informace o osobnosti (stručná, ale i v podrobné verzi), její literární dílo zahrnující vědecké práce, knihy i ostatní práce, např. popularizačního charakteru, a práce jiných autorů o dané osobnosti (typicky články k významným jubileím, nekrology apod.) Snažíme se přitom shromáždit informace o všech pracích včetně různých vydání knih (nepočítáme ale se zveřejněním úplných textů všech vydání), jejich jazykových mutací, přetisků či jejich reprodukcí.

Již z tohoto popisu je patrné, že to není jednoduché. Uveďme jako příklad další osobnost, kterou chceme do této části DML-CZ zařadit: prof. Vojtěch Jarník. Osvědčilo se nejprve sestavit co možná nejúplnější seznam relevantních prací podle popsaného schématu. Za základ bylo možné vzít seznam z publikace [2]. I když časopisecky či knižně vydané soupisy bývají vcelku úplné a téměř bez chyb, je nutné provést pečlivou kontrolu. K tomu v tomto případě je dobré užít databáze MathSciNet (1940 a dále), vzniklé z referativního časopisu Mathematical Reviews, a ZMATH, která obsahuje data z Jahrbuch über die Fortschritte der Matematik a z Zentralblatt für Matematik (1868 a dále). V našem případě jen část prací zachycují obě databáze, neboť první Jarníkův článek *O kořenech funkcí Besselových* vyšel r. 1920. Přesto se však nakonec ukázalo, že v knihovnách lze najít další texty, které v databázích nejsou uvedeny, a bylo nutné řešit otázku, zda jsou či nejsou publikacemi, které bychom měli do přehledů zařadit.

Máme-li seznam všech prací, je třeba je roztřídit. Je poměrně jasné, co napsal Jarník a co napsali jiní o Jarníkovi, i když autorství u článků podepsaných šifrou může být drobným problémem. Složitější je to například s rozlišením vědeckých prací a ostatních prací, hranice může být obtížněji rozeznatelná. Ale i přes velkou péči je třeba počítat s tím, že se později objeví ještě další práce, které bude třeba chronologicky zařadit.

2.3 Metadata

Každou práci je třeba popsat. Je-li článek v jiném jazyce než anglicky, pak je ovšem třeba – v souladu se standardem DML-CZ – titul článku přeložit. Je-li tedy např. článek napsán česky a jeho recenze v referativním časopisu je ve francouzštině, přibude přirozeným způsobem další překlad titulu. Angličtina je pro DML-CZ závazná, už proto, že usnadňuje vyhledávání. V seznamech však užíváme vždy originální formu titulu článku, takže vyhledávání ruských názvů je možné např. i v transkribované ruštině. Také zdánlivě bezproblémové autorství se musí ošetřit: je třeba, aby při vyhledávání v databázi bylo možno použít i jiné formy jména (nejen Vojtěch Jarník, V. Jarník, ale i Jarník Vojtěch, Jarník, Vojt., atp.).

Někdy je složitá i identifikace pramene, typicky časopisu. Názvy ve zkratkách, i když jsou často standardní, mohou vytvářet problém, neboť ani standardy nejsou neměnné. K tomu přistupuje rozmanitost: např. prof. Jarník publikoval jeden článek v časopise *Revista de Ciencias*, který vychází v Limě. A také se může stát, že máme k dispozici separát nebo elektronickou verzi článku, ale zdroj je velmi obtížně identifikovatelný. Táž verze článku může být dokonce vedena pod dvěma časopisy a nastává problém, zda jde jen o jiný název, nebo zda existovaly skutečně dva různé fyzické exempláře těchto periodik.

Pro usnadnění věcného vyhledávání používáme kódy *Mathematics Subject Classification* (MSC). Určení takového kódu není zdaleka přímočaré. K dokumentům je přiřazujeme všechny, jak ty, které uvádí autor, tak i ty, které jsou uvedeny v recenzích v referativních časopisech. Často se však stává, že i když v každém z nich jsou uvedeny např. tři kódy, jejich průnik je prázdný. Ke starším článkům, které nejsou v databázích uvedeny, přiřazujeme MSC kód podle aktuální klasifikace (ta se, mimochodem, modifikuje každých deset let).

2.4 Co s pouhými metadaty

Pokud již existuje elektronická verze článku a je dostupná (to může být otázka finanční, ale též právní), je třeba ji najít a pak eventuálně jednat o možnosti převzetí. Další možností je skenování, ale k tomu je třeba získat fyzický exemplář časopisu, případně knihy, ten vypůjčit – případně prostřednictvím Mezinárodní knihovní výměnné služby – a skenování provést, sken upravit (skvrny v originále, srovnání textu apod.)

a pokusit se získat textovou vrstvu pomocí vhodného programu pro Optical Character Recognition (OCR). Tím se umožní textové vyhledávání, v obrázku žádná slova standardně nevyhledáte. Přitom tuto činnost je třeba koordinovat, neboť se na ní typicky podílí více lidí. Je zřejmé, že příprava materiálů je složitá i v případě, že jde o autora, o kterém existuje jedna či více monografií nebo víceméně úplné vydání sebraných spisů. V tom nám pomáhají zkušenosti i standardizované postupy získané a ověřené v dosavadní realizaci DML-CZ.

3 Závěr

3.1 Proč vás s tím seznamujeme

Patrně každý již některé články či knihy na síti vyhledával, je to snadné a velmi pohodlné. Ale tato možnost nevzniká automaticky, je za ní mnoho práce. Tam je třeba vidět motivaci této stručné a zdaleka ne úplné informace. Je to nabídka se na této zajímavé a tak trochu detektivně-dobrodružné práci podílet. Jsme malá země, ale v této oblasti se nám daří úspěšně konkurovat i těm větším a bohatším zemím. Chceme díla našich významných matematiků zpřístupnit nejen české, ale i celosvětové matematické veřejnosti. I příprava podkladů pro zpracování jedné takové osobnosti je pro nás velikým přínosem. A do této užitečné a smysluplné práce lze zapojit i studenty. Není to sice práce, která by zpracovatelům přinášela peníze, ale v naší společnosti může být i smysluplnost atraktivní, protože v řadě všedních „povinností“ se stává vzácnou.

3.2 Perspektivy?

Co zbývá v DML-CZ zpracovat? Patrně všechny důležité časopisy jsou již pokryty včetně jejich aktuálních přírůstků, avšak mnoho zbývá v oblasti závažných knih a významných osobností. Některé jsou známé spíše jen u nás, ale některé jsou známé celosvětově. Máme již naskenovánu většinu matematických prací *Bernarda Bolzana*, vedle Vojtěcha Jarníka bychom rádi též zpracovali dílo *Eduarda Čecha* a *Jindřicha Nečase*. Z historických důvodů bychom chtěli brzo zpracovat *Karla Petra* a *Matyáše Lercha*. Vedle toho je samozřejmě nutné neustále zlepšovat formu vystavení již zařazených děl včetně nových prostředků pro vyhledávání apod. Zkrátka, je to jeden z projevů nekonečna praktické povahy. A budete-li chtít pomoci, kontaktujte nás.

Literatura

[1] Bartošek M.: *Česká digitální matematická knihovna*. INFORUM 2008, 14. konference o profesionálních informačních zdrojích, Praha, 28.–30. 5. 2008, 1–11.

[2] Novák B.: *Life and work of Vojtěch Jarník*. JČMF, Prometheus, Praha, 1999.

[3] Rákosník J.: *Evropská digitální matematická knihovna*. PMFA (v tisku).

[4] Ulrych O., Veselý J.: *DML-CZ – současnost a budoucnost*. PMFA 54(2009), 48–55 (viz http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/141909).

Adresa

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.
Matematický ústav UK, MFF UK,
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *jvesely@karlin.mff.cuni.cz*

NIC NOVÉHO POD SLUNCEM ANEB POUČENÍ ZE STARÝCH KNIH

IVA VOJKŮVKOVÁ

Abstract: The article focuses on two more than 130 years old mathematical books. Briefly deals with personalities of their authors and gives an overview of the content of books. The main aim of paper is to show that even historical texts can be nowadays inspiring.

1 Úvod

Příspěvek se zabývá dvěma knihami, které byly vydány před více než 130 lety. Byly určeny učitelské veřejnosti. Je uveden přehled obsahu a je citováno několik pasáží. Nechybějí biografické údaje o autorech včetně zasazení do historického kontextu. Cílem konferenčního vystoupení bude ukázat, že i „staré" knihy mohou ještě dnes být překvapivě „současné" a přinášet inspiraci.

2 Geometrické tvarosloví pro školy obecné. Návod pro učitele ku vyučování geometrickému

2.1 Franz Močnik

Franz (Franc, František) Močnik (1814–1892) se narodil v Cerknu na území Slovinska. Studoval na gymnáziu a lyceu v Lublani, poté studoval teologii v Gorici a byl vysvěcen na kněze. V Grazu se věnoval studiu matematiky, které završil v roce 1840 získáním titulu doktora filozofie. V roce 1846 byl jmenován profesorem elementární matematiky na technické akademii ve Lvově, odkud v roce 1849 přešel na univerzitu do Olomouce, kde byl ustanoven profesorem matematiky a děkanem filozofické fakulty. Po roce působení v Olomouci však byl jmenován členem školské rady a inspektorem škol reálných a obecných ve Slovinsku. V roce 1860 získal funkci inspektora národních škol pro Štýrsko a Korutansko a roku 1869 byl jmenován zemským inspektorem 1. třídy. Za službu rakouské monarchii obdržel řád železné koruny a byl přijat do stavu rytířského s právem užívat erb. Zemřel na mrtvici v Grazu. Franz Močnik byl publikačně velmi činný. Byl autorem velkého množství učebnic, které byly přeloženy do mnoha jazyků a sloužily na celém území monarchie včetně zemí českých. Jeho učebnice vynikaly velkou srozumitelností a logickým uspořádáním.

2.2 O knize

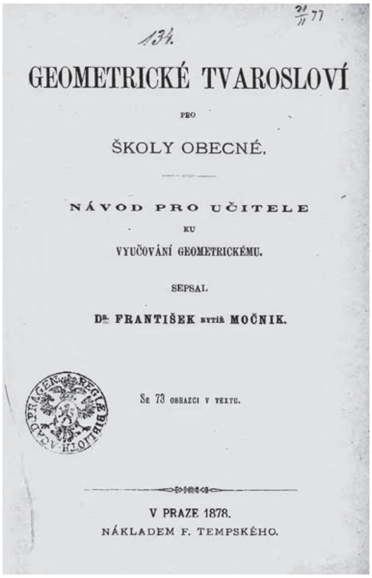
Močnikova kniha [1] o rozsahu 99 stran je, jak již napovídá název, metodickou příručkou pro výuku geometrie na obecné škole. Jedná se o překlad z němčiny. O rozsahu a způsobu výuky matematiky na obecných školách v době vydání této knihy je možno získat představu v práci [4] (str. 166–208).

Kniha je členěna do dvou oddílů následovně:
Oddíl první: Názorný rozbor těles a tvarů prostorných na nich se vyskytujících

I. *Krychle*
II. *Hranol*
III. *Pravidelný čtyřstěn*
IV. *Jehlanec a komole jehlancová*
V. *Válec*
VI. *Kužel a komole kuželová*
VII. *Koule*
VIII. *Přehledné opakování probrané látky učebné*

Oddíl druhý: Vypočitávání ploch a těles
Připomenutí vůbec

I. *Vypočitávání ploch*
II. *Vypočitávání těles*


GEOMETRICKÉ TVAROSLOVÍ
PRO
ŠKOLY OBECNÉ.
NÁVOD PRO UČITELE
KU
VYUČOVÁNÍ GEOMETRICKÉMU.
SEPSAL
Dr. FRANTIŠEK RYTÍŘ MOČNIK.
Se 73 obrazci v textu.
V PRAZE 1878.
NÁKLADEM F. TEMPSKÉHO.

V úvodu autor píše: *Geometrické tvarosloví má ve škole obecné ten účel, aby žákům zjednána byla jasná známost nejdůležitějších tvarů prostorných i jich vlastností, pak bezpečné vědomé jich zužitkování v rozličných okolnostech života obecného. Neníť zde účelem, aby žáci připravováni byli ku pozdějšímu vědeckému probírání geometrie, nýbrž aby se jim podalo tolik, by věděli a uměli z geometrie, kolik prostým poměrům životním stačí, a to sice co celek sobě samostatný a úplný. Všeliké vyučování ve škole obecné má vzdělávati ducha a spolu má působiti k užití praktickému.* (str. 1) a dále pokračuje: … *patrno jest také, jak důležité místo zaujímá geometrické tvarosloví mezi učebnými předměty škol obecných v ohledu formalném i věcném. Navádějíc žáky ku rozumnému věcí pozorování, budí jejich tvaroslovný vtip, ostří soudnost, a pobádajíc takto činnost duchovní, slouží přímo vzdělávání formalnému. Zároveň však má i cenu věcnou, jelikož metodicky seřaděným kreslením, měřením a vypočitáváním … výtečnou poskytuje přípravu k živobytí praktickému.* (str. 2)

Žáci mají kreslit od ruky, použití kružítka a pravítka je vyloučeno. Učitel kreslí na tabuli, žáci nejprve na tabulku, potom na papír. Je uveden seznam doporučených pomůcek, které by měly být ve třídě (např. dřevěné rozkládací modely těles, dále metr, čtvereční metr a krychlový decimetr rozdělený na menší jednotky). F. Močnik preferuje přístup, kdy se začíná od nazírání těles – žák má těleso nebo jeho prototyp před sebou a má popsat, co vidí. Učitel pak pozorování shrne a vyvodí další záležitosti. Kromě pohledu na tělesa se črtají i jejich sítě. Návod v duchu tohoto přístupu podává první oddíl knihy. Kupříkladu z pozorování krychle se „zavádějí" názorně pojmy přímka, vodorovný, svislý směr, rovnoběžky, různoběžky, mimoběžky. Na základě pozorování hranolů jsou „objeveny" a klasifikovány úhly, pozorování jehlanů vede k „objevu" a klasifikaci trojúhelníků, na jehlanech a komolých jehlanech je sledována shodnost a podobnost trojúhelníků, z pozorování válce je možno dojít ke kruhu a kružnici, ale i k elipse. Najdeme zde také jednoduchá odvozování (na str. 11 je např. induktivně pro $n = 2$ až 16 vyjádřen počet přímek určených n body). Ke každé kapitole jsou připojena cvičení.

Ve druhém oddílu F. Močnik uvádí: *Velevážná část vyučování geometrického ve škole obecné jest určování velikosti ploch a těles. Ono se zakládá na větách, udávajících, kterak z jistých rozměrů, jimižto se určuje velikost plochy nebo tělesa, velikost tuto počtem nalézti možno. Věty tyto nemají se žákům sdělovati hotové anebo jako něco daného, nýbrž žáci mají je z vlastností nazíraných ploch a těles pomocí povzbuzujícího návodu učitelova sami odvoditi* *a pak četnými příklady bedlivě se v nich vycvičiti. Jen to, co žáci názorným vývinem sami naleznou a čemu mnohostranným cvičením co nejjasněji porozumí, stane se jejich živým, stálým majetkem. Úkoly ke cvičením … vzaty mají býti ze života, pak povedou také ku poznání života.* (str. 75)

Zatímco první oddíl knihy je dobrou inspirací i pro současnou výuku, z druhého oddílu by bylo třeba již vybírat obezřetněji. Zajímavý je uváděný důkaz Pythagorovy věty (str. 81). Poněkud nejasná je partie týkající se pravidelných mnohoúhelníků. Velmi nenázorná je z dnešního pohledu partie věnovaná kruhu. Perličkou je přibližný vzorec pro objem sudu.

3 O dějinách geometrie

3.1 Josef Sylvestr Vaněček

Bratři Josef Sylvestr Vaněček (1848–1922) a Matěj Norbert Vaněček (1859–1922) pocházeli z osmi sourozenců chudé rodiny táborského zedníka. Studovali na vyšší reálce, vysokoškolské studium nemohli z finančních důvodů dokončit řádně. Josef po tříletém studiu architektury odešel roku 1873 vyučovat matematiku do Osijeku v Chorvatsku, v roce 1875 se stal učitelem nižší reálky v Jičíně. V letech 1878–1879 studoval ve Francii, kam vzal s sebou také mladšího bratra Matěje. Ten měl již na reálce velký zájem o matematiku a setkání s některými francouzskými matematiky ho velmi povzbudilo. Zatímco Matěj N. Vaněček dosáhl profesních úspěchů na poli pedagogickém i vědeckém, Josef S. Vaněček, ačkoliv měl srovnatelné předpoklady, se místa na vysoké škole nedočkal. Po návratu z Francie učil dále v Jičíně. V roce 1884 podal žádost o habilitaci z matematiky na univerzitu v Praze, ale neuspěl. Nebyl ani přeložen na pražskou střední školu, i když o to žádal. V roce 1895 se účastnil konkursu na místo profesora deskriptivní geometrie na České vysoké škole technické v Praze, ale přijat byl profesor Pelz. Po tomto neúspěchu se úplně přestal věnovat vědecké činnosti. Do roku 1906 působil v Jičíně. Po odchodu do výslužby žil v Praze a v Táboře, kde také zemřel. Poměr bratří k pražským matematikům soustředěným kolem Jednoty nebyl po uvedených peripetiích patrně příliš kladný. Velmi málo publikovali v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, více prací uveřejnili v publikacích Královské české společnosti nauk. Většinu prací vydali v zahraničí, některé vlastním nákladem. Více o životě a díle bratří Vaněčků viz [6].

3.2 O knize

Vztah J. S. Vaněčka k české matematické komunitě odrážejí i jeho slova z úvodu ke knize resp. článku [5] (str. 3–4): *Shledáme … jak pranepatrně, a to až v posledním čase, Čechové naproti jiným národům si geometrie si všímají.* Studium geometrie považuje za velmi důležité, protože … *geometrická věda má především tu vlastnost, že vyžaduje na každém, kdo se jí učí, důkladného přemýšlení. I kdo se jí věnovati nechce, měl by se jí více obírati, by se tak pro svůj vlastní směr připravil. Rozličné poučky většinou sice zapomene, avšak zvykne přesně mysleti a mluviti.* Jeho pohled na historii matematiky je ovlivněn soudobými poznatky. Velmi vysoko hodnotí řeckou geometrii, v souvislosti s osobou Platona přidává postesknutí (str. 10): *Jedině autoritě jeho máme co děkovati, že na základě jeho výroků o geometrii a mathematických vědách vůbec ponechali humanisté ve vyučování školním též místečko pro tyto vědy.* Provádí periodizaci vývoje na období „staré" geometrie, analytické geometrie a deskriptivní geometrie. V závěru píše o současnících, zejména vyzdvihuje roli Francie. V souvislosti s českými zeměmi zmiňuje pouze časopis Dr. Studničky (1871). V závěru apeluje: *Kéž by naši mladí geometrové … pěstovali krásnou vědu geometrickou se zálibou a upřímnou sna-*

hou, aby národ náš dodělal se kýženého blahobytu! Na učitelích středních škol v prvé řadě jest, aby studentstvo ve směru tom vedli a v něm lásku k této královské vědě probouzeli. Povinností mládeže pak zase jest, aby si hleděla více studií skutečných, než aby počítala leta, která má ztráviti ve školách, aby byla k tomu neb onomu úřadu připuštěna, a jakmile toho dosáhne, ihned všeho dalšího vzdělávání zanechává. (str. 40)

4 Závěr

Příspěvek je věnován dvěma zdánlivě zcela nesouvisejícím knihám, které spojuje snad jen datum vydání. Jedná se o nejstarší prezenčně dostupné matematické publikace věnované elementární geometrii a historii geometrie z fondu Studijní a vědecké knihovny v Hradci Králové, které si nikdo již dlouhou řadu let ke studiu nezapůjčil. Hlubší zasazení obou knih a autorů do historického kontextu přesahuje možnosti tohoto příspěvku. Hlavním cílem bylo ukázat, že při četbě takovýchto „zapomenutých" knih zejména nezasvěcený čtenář „překvapivě" zjistí, že metodické návody z knihy F. Močnika jsou ve shodě s moderními didaktickými přístupy a citované myšlenky J. S. Vaněčka by po převodu do současné češtiny mohly zaznít na nejednom setkání učitelů. Autorka článku se domnívá, že i toto stručné nahlédnutí do starých textů může být pro čtenáře motivací k dalšímu studiu.

Literatura

[1] Močnik F.: *Geometrické tvarosloví pro školy obecné. Návod pro učitele ku vyučování geometrickému*. F. Tempský, Praha, 1878.

[2] Navaříková P.: *Historie matematiky na olomoucké univerzitě* [online]. Prezentace diplomové práce na UP Olomouc, 2001 [cit. 20. 4. 2013].

http://navarikp.sweb.cz/index.html.

[3] Folta J., Šišma P.: *Významní matematici v českých zemích* [online]. Poslední revize 2. ledna 2003 [cit. 20. 4. 2013].

http://inserv.math.muni.cz/biografie/

[4] Mikulčák J.: *Nástin dějin vyučování v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*. Matfyzpress, Praha, 2010. (Dostupné také z http://dml.cz/dmlcz/400987.)

[5] Vaněček J. S.: *O dějinách geometrie*. F. a V. Hoblík, Pardubice, 1882.

[6] Folta J.: *Čtyřicet let od smrti bratří Vaněčků*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 8(1963), 28–30. (Dostupné také z http://dml.cz/dmlcz/137247.)

Adresa

Mgr. Iva Vojkůvková
Katedra informatiky a kvantitativních metod
Fakulta informatiky a managementu
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové 3
e-mail: *iva.vojkuvkova@uhk.cz*

POWSTANIE I ROZWÓJ LOGIKI MATEMATYCZNEJ W POLSCE NA POCZĄTKU XX WIEKU

WIESŁAW WÓJCIK

Abstract: The paper is devoted to the first works of logic that became a base for the Warsaw School of Logic. We present works of J. Sleszyński, J. Łukasiewicz, S. Leśniewski, A. Tarski and others. Łukasiewicz, based on Sleszyński idea, called for autonomy of logic and its strict connection with sciences. That conception of logic was fulfiled only in the Warsaw School of Logic. It was not realised neither in Cracow nor in Lvov. In those centres logic was treated only as an auxilliary science. I demonstate that J. Łukasiewicz and the whole Warsaw School followed Sleszyński ideas concerning a way of logic formalization and the history of logic researches. Trials of logical formalization of the key philosophical issues had great significant, for example Łukasiewicz formalisation of Stoic logic and Tarski formalization of the classical definition of truth.

1 Wprowadzenie

Próbując dorzeć do źródeł warszawskiej szkoły logicznej okresu międzywojennego, natrafiamy na trzech polskich uczonych: Kazimierza Twardowskiego, Jana Sleszyńskiego i Zygmunta Janiszewskiego. Działalność naukowa każdego z nich wykraczała poza logikę, jednak ich podejście do logiki (uznanie dla logiki, wskazanie miejsca logiki w nauce i w badaniach nauki) sprawiło, że mimo oporu większości środowiska naukowego wobec logiki matematycznej, rozwinęła się ona w środowisku warszawskim w okresie międzywojennym tak gwałtownie, że Warszawa stała się w latach trzydziestych głównym centrum światowej logiki. Uważam, że dopiero połaczenie trzech koncepcji wspomnianych uczonych mogło dać taki efekt.

Zauważmy, że ani Kraków, ani Lwów nie stały się ośrodkami rozwoju szkół logicznych, lecz jedynie Warszawa. Poza zgromadzeniem w stolicy kilku wybitnych uczonych (J. Łukasiewicz, S. Leśniewki, A. Tarski, Z. Janiszewski, S. Sierpiński, K. Kuratowski, K. Ajdukiewicz, T. Kotarbiński i inni), mamy do czynienia z bardzo płodnym przenikaniem się idei pomiędzy logiką, matematyką i filozofią. Mimo pewnych animozji, istniało wzjemne uznawanie wartości uprawianych dyscyplin i wymiana myśli (czego brakło w ośrodkach lwowskim i krakowskim). Przyjrzyjmy się teraz, co każdy z tych uczonych wniósł do warszawskiej szkoły logicznej.

2 Szkoła lwowsko-warszawska i jej twórca

Kazimierz Twardowski (20 X 1866, Wiedeń – 11 II, Milanówek), uczeń F. Brentano i A. Meinonga, zaszczepił w polskim środowsku zamiłowanie do badań logicznych. Ukazał wartość badań podstaw nauki (w tym matematyki) w duchu B. Bolzano (który w swojej czterotomowej *Wissenschaftslehre* z roku 1837 dał podwaliny współczesnej logiki). Wykształcił całą plejadę uczniów, „zarażonych" logiką i filozofią analityczną, w tym J. Łukasiewicza, S. Leśniewskiego, K. Ajdukiewicza, T. Kotarbińskiego, T. Czeżowskiego. Jako pierwszy w Polsce wprowadził w swoich wykładach, już w roku akademickim 1899/1900, elementy logiki matematycznej i konsekwentnie polemizował z relatyzwizmem poznawczym i aksjologicznym. W ten sposób powstawała filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska (część uczniów podjęła pracę w Warszawie), w której logicy stanowili znaczącą grupę. K. Twardowski angażował sie też w obronę uniwersalności zasad logiki (w tym zasady sprzeczności), polemizując ze swoim uczniem J. Łukasiewiczem ([34], s. 315–375).

Myślę, że bez tego zaplecza filozoficznego, miejsca i klimatu dyskusji nad podstawami nauki, nie byłoby rozwoju polskiej logiki. Okazało się, że naturalne było, w przypadku wielu uczonych przejście od filozofii do logiki (Łukasiewicz, Ajdukiewicz, Kotarbiński). Najczęściej to przejście nie wiązało sie z zerwaniem kontaktów z filozofią, lecz wzmacniało głębię i zakres rozpatrywanych zagadnień filozficznych.

3 Projekt Zygmunta Janiszewskiego

Drugim źródłem warszawskiej szkoły logicznej był projekt Janiszewskiego badania i uściślenia podstaw matematyki przy pomocy nowej dziedziny matematyki – teorii mnogości. Ta nowa nauka miała stać zarazem głównym obiektem badań polskich matematyków. Zygmunt Janiszewki (12 VI 1888, Warszawa – 3 I 1920, Lwów) był jednym z głównych twórców polskiej szkoły matematycznej. Jego postawa naukowa i społeczna, erudycja, wszechstronność przyczyniły się w dużej mierze do sukcesu matematyki polskiej. Studia matematyczne i filozoficzne w ośrodkach naukowych zachodniej Europy skierowały jego zainteresowania na badania podstaw matematyki. W tym czasie rodziły się nowe dyscypliny matematyczne, które przez wielu uczonych nie były uznawane za teorie matematyczne. Natomaist Z. Janiszewski uznał je za w pełni matematyczne i mające fundamentalne znaczenie dla matematyki (i całej nauki) – chodzi o topologię, teorię mnogości i logistykę (logikę matematyczną). Poczynając od 1907 studiuje w kolejnych ważnych ośrodkach matematycznych: w Zurychu, Monachium, Getyndze i Paryżu (u Hilberta, Minkowskiego, Zermelo, Goursata, Hadamarda, Lebesgue'a, Picarda, Poincaré'go). Jego praca doktorska *Sur les continus irréductibles entre deux points* ([7]) poświęcona jest analizie podstawowych pojęć geometrycznych metodami topologii i teorii mnogości. Wprowadza nowe pojęcia („łuk", „continuum zgęszczenia") i podaje ich charakterystykę topologiczną i teoriomnogościową. Te badania podstaw matematyki kontynuował i „zaraził" nimi innych polskich matematyków z ośrodków lwowskiego i warszawskiego. Natomiast logika matematyczna jest w jego rozumieniu częścią „wielkiej" teorii mnogości i tak ją we wszystkich swoich pracach traktuje. Sama teoria mnogości ma w matematyce rangę szczególną: jest nauką najbardziej podstawową (na niej opierają się inne działy matematyki), zarazem centralną (wraz z teorią grup pełni rolę łącznika między geometrią z jednej strony i analizą, algebrą i arytmetyką z drugiej) i o najwyższej ważności.

Janiszewski od 1912 prowadzi wykłady na Uniwersytecie Lwowskim i uczestniczy w seminarium Sierpińskiego, poświęconym głównie teorii mnogości i badaniu podstaw matematyki. Tam w 1913 uzyskuje habilitację w oparciu o pracę *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* ([5]). Praca poświecona jest topologii płaszczyzny i doprowadziła do podania parę lat później przez Kuratowskiego topologicznej charakterrystyki sfery dwuwymiarowej.

Perturbacje wojenne sprawiły, że Janiszewski, Sierpiński (oraz Łukasiewicz, Mazurkiewicz, Leśniewski) znajdują swoje miejsce na utworzonym w 1915 Uniwersytecie Warszawskim. Tam Janiszewski formułuje swój manifest *O potrzebach matematyki w Polsce* w którym postuluje stworzenie silnego ośrodka twórczej pracy matematycznej, skoncentrowanego na jednej gałęzi matematyki i powołanie czasopisma naukowego, publikującego prace głównie matematyków polskich z tej wybranej gałęzi (tą gałęzią ma być teoria mnogości powiązana z logiką matematyczną i topologią). Wydaje też w 1914 *Poradnik dla samouków,*w którym znajdują się, miedzy innymi, takie prace jak: *Wstęp ogólny* (znajduje się w nim klasyfikacja matematyki), *Logistyka, Zagadnienia filozoficzne matematyki* i *Zakończenie* ([6]), ważne dla ustalenia miejsca logiki matematycznej wśród innych nauk matematycznych. Krótko potem podjęto decyzję o powołaniu czasopisma „Fundamenta Mathematicae" (pierwszy numer w 1920), a w składzie rady naukowej znaleźli się matematycy (Janiszewski, Sierpiński, Mazurkiewicz) i logicy (Łukasiewicz, Leśniewski). Było to nie tylko symboliczne uznanie logiki jako dyscypliny matematycznej. Według Janiszewskiego, nowe działy matematyki (w tym logika matematyczna) są wyzwaniem i szansą dla filozofii. Janiszewski zwraca uwagę na próbę budowania matematyki (przez Whiteheada i Russela) na podstawach wyłącznie logicznych oraz na rozwój metody aksjomatycznej. Logika pokazała swoją szczególna skuteczność. Dzięki jej metodom możemy: 1) przenosić całe teorie z jednej dziedziny do drugiej (ma to miejsce np. pomiędzy topologią, teorią mnogości i teorią grup); dzieje się tak dzięki posiadaniu tych samych (lub odpowiadających sobie) aksjomatów; 2) głębiej wniknąć wistotę teorii wyszukując (w aksjomatach) te własności, na których ta teoria się opiera; 3) w prowadzać nowe pojęcia – szuka się nowych pojęć czyniących zadość pewnym warunkom; 4) abstrahować od wszystkich własności indywidualnych tworzących daną teorię i badać tylko formę logiczną.[1]

4 Jan Sleszyński

Jan Sleszyński (11 VII 1854 Łysianka, powiat żmigrodzki, Kijowszczyzna – 9 III 1931 Kraków) był przede wszystkim logikiem, ale też matematykiem i filozofem. Wykształcenie zdobył w szkołach rosyjskich (Kiszyniów, Odessa) oraz w Berlinie (pod kierunkiem K. Weierstrassa, L. Kroneckera, E. E. Kummera). Od roku 1882 wykłada na Uniwersytecie Odesskim (od 1898 jako profesor zwyczajny). Prowadził wykłady z analizy matematycznej, algebry, teorii grup, rachunku wariacyjnego i teorii funkcji analitycznych. Przetłumaczył na język rosyjski *L'Algèbre de la logique* L. Couturata. We wstępie Sleszyński ukazuje miejsce logiki matematycznej w matematyce. Prowadził też w seminarium naukowe, gdzie analizowane były podstawy geometrii (euklidesowej i nieeuklidesowej), przy pomocy narzędzi logicznych przez niego wypracowanych. Owocem było, między innymi, sformułowanie przez jego ucznia B. F. Kagana nowego systemu aksjomatów dla geometrii euklidesowej. W roku 1911 przeprowadza się do Krakowa i rozpoczyna wykłady na Uniwersytecie Jagiellońskim z logiki matematycznej, analizy matematycznej, teorii wyznaczników, rachunku prawdopodobieństwa, teorii dowodu oraz arytmetyki liczb zespolonych. Specjalnie dla niego zostaje powołana katedra logiki (pierwsza w Polsce).

Aktywnie włączył się w budowanie krakowskiej matematyki i logiki, uczestnicząc w spotkaniach matematyków i filozofów krakowskich, prowadząc zajęcia dodatkowe dla studentów różnych kierunków (podstawy matematyki, logika). 29 listopada 1917 na spotkaniu Towarzystwa Filozoficznego w Krakowie wygłosił referat *O logice tradycyjnej* ([30]), mający istotny wpływ na Jana Łukasiewicza. Napisał tez ważne teksty w *Poradniku dla samouków*: *O znaczeniu logiki dla matematyki* oraz *Rozwój pojęć nieskończonościowych* ([31], 1923). Jego uczniowie opracowali część jego wykładów i w ten

[1] Z. Janiszewski, *Zakończenie*, Poradnik dla samouków, t. 1, Warszawa 1915, s. 538–543.

sposób zostały wydane dwie ważne książki: dwutomowa *Teoria dowodu* ([29]) (opracował S. K. Zaremba) oraz *Teoria wyznaczników* (opracował S. Rosental).

Teoria dowodu była nowoczesnym ujęciem nauki dedukcyjnej i wykładem historii logiki, poczynając od Arystotelesa, poprzez logikę średniowieczną i Leibniza aż do koncepcji Boole'a, Jevonsa, Grassmana, Peany, Russela i Whiteheada. Metoda badań historycznych Sleszyńskiego została podjęta przez Łukasiewicza, a program rekonstrukcji logicznej dowodów matematycznych realizował S. Jaśkowski. Wiele jego pomysłów i metod logiki można odnaleźć w warszawskiej szkole logicznej. W pewnym stopniu oddziałał również na środowisko krakowskie, dzięki niemu badaniami podstaw matematyki i logiką zainteresowali się A. Hoborski, W. Wilkosz i O. Nikodym, jednak większy wpływ miała nich koncepcja S. Zaremby, który nie przyznawał logice zbyt istotnego miejsca w matematyce.

5 Powstanie warszawskiej szkoły logicznej

Warszawska szkoła logiczna jest ściśle sprzężona z powstaniem i rozwojem logiki matematycznej. Odkrycia tej szkoły były niezbędne dla rozwoju współczesnej logiki i nadania jej tak wysokiego znaczenia. Szkoła nawiązywała w swoich badaniach do różnych nurtów i radycji naukowych. Jej istotnym rysem było budowanie logiki jako samodzielnej dyscypliny naukowej, zgodnie z metodą matematyczną (tradycja odwołująca się do Arystotelesa i regego). Kolejną cechą była algebraizacja logiki (Leibniz, de Morgan, Boole, Peirce'a, Schrödera i Couturata) oraz koncepcji logicyzacji matematyki Russella i Whiteheada, gdzie logika (matematyczna) miała stać się główną dziedziną matematyki, do której inne miały zostać sprowadzone.

Jakie wydarzenia można uznać za początek tej szkoły? Można wskazać kilka czynników i sytuacji znaczących dla jej powstania. Głównymi twórcami szkoły byli Jan Łukasiewicz (21 XII 1878 Lwów – 13 II 1956 Dublin) oraz Stanisław Leśniewski (30 III 1886, Sierpuchowo, Rosja – 13 V 1939, Warszawa). Fundamentalne znaczenie dla jej rozwoju miał Alfred Tarski (14 I 1901, Warszawa – 27 X 1983, Berkeley, USA), który będąc uczestnikiem seminariów obu logików, umiał przyjmować i rozbudowywać najważniejsze idee obu bardzo różniących się poglądami uczonych (Leśniewski nie uznawał cantorowskiej teorii mnogości, odcinał się od filozofii i uważał, że budowana przez niego logika jest całkowicie samowystarczalna w wyjaśnianiu zagadnień filozoficznych). Współpracował również z T. Kotarbińskim (uważał go za swojego mistrza), W. Sierpińskim, K. Kuratowskim, S. Banachem i wieloma innymi. Warszawska szkoła logiczna rozwijała się przy wydatnym udziale logików – filozofów takich jak, między innymi, K. Ajdukiewicz, T. Kotarbiński, T. Czeżowski, L. Chwistek oraz matematyków zainteresowanych logiką (K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, S. Sierpiński i inni).

Momentem kluczowym dla powstania warszawskiej szkoły logicznej było powołanie Łukasiewicza i Leśniewskiego na profesorów Uniwersytetu Warszawskiego (pierwszy w 1915, drugi w 1919), rozpoczęcie wykładów z logiki matematycznej i podstaw matematyki oraz prowadzenie seminarium naukowego. W krótkim czasie dołączają do nich uczniowie: pierwszym był A. Tarski, a później Adolf Lindenbaum (podał wynik, mający duże znaczenie w teorii modeli, stwierdzający, że każdy system aksjomatyczny niesprzeczny można rozszerzyć do systemu niesprzecznego i zupełnego), Stanisław Jaśkowski (twórca systemu logiki opartego o reguły założeniowe), Mordechaj Wajsberg (twórca pierwszej aksjomatyzacji logiki trójwartościowej), Jerzy Słupecki (wykazał rozstrzygalność sylogistyki Arystotelesa, pokazał możliwość zbudowania pełnego systemu aksjomatycznego dla logik wielowartościowych, zbudował teorię dedukcyjną opartą na konsekwencji odrzuceniowej, podał deterministyczną interpretację logik wielowartościowych), Andrzej Mostowski (współtwórca teorii modeli oraz prekursor teorii forcingu), Bolesław Sobociński, Czesław Lejewski (rozwijali mereologię Leśniewskiego) i inni.

Dorobek całej szkoły jest ogromny. Największe osiągnięcia mają oczywiście J. Łukasiewicz, S. Leśniewski i A. Tarski. Duża część wyników to wyniki wypracowane wspólnie, często publikowane jako wspólne prace. Mimo upływu wielu lat ciągle dorobek warszawskiej szkoły logicznej nie jest w pełni opracowany. Najwięcej wkładu w opracowanie fenomenu tej szkoły mają: Jan Woleński, Jacek Juliusz Jadacki i Roman Murawski. Są też wspomnienia Łukasiewicza, jego autobiografia oraz analiza dokonań szkoły i mistrzów przeprowadzona przez uczniów (Mostowskiego, Słupeckiego, Sobocińskiego i innych).

Chciałbym wskazać jedynie kilka prac „otwierających" działalność warszawskiej szkoły logicznej. W nich zawarte były główne idee, dalej konsekwentnie rozwijane przez przedstawicieli szkoły. Trzeba jednak przyznać, że nie było niewolniczego trzymania się przyjętych wcześniej założeń. Łukasiewicz, na przykład, który na początku kwestionował uniwersalną wartość zasady sprzeczności, po kilkunastu latach zmodyfikował swój pogląd, zauważając jej obowiązywanie również w logikach wielowartościowych. Istniały też duże różnice między głównymi przedstawicielami szkoły, przede wszystkim między Łukasiewiczem i Leśniewskim. Jednym z ważniej ustaleń metalogicznych szkoły było uznanie, iż logika nie może być jedynie „sztuką dla sztuki", lecz ma być nieustannie konfrontowana z wynikami nauk przyrodniczych i przebudowywana tak, aby nadążać za ich rozwojem. Przyjęte w szkole założenie o autonomii logiki, nie tylko nie wyklucza, ale wręcz domaga się jej ciągłego kontaktu z rzeczywistością.

A. Książka J. Łukasiewicza *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* ([18], 1910) otwierała dyskusję nad budową alternatywnych, wobec logiki klasycznej, zasad logicznych.

B. Praca J. Łukasiewicza *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* ([23], s. 76–113) wpisywała się w trwającą od lat próbę zbudowania ścisłych podstaw dla rachunku prawdopodobieństwa. Propozycja Łukasiewicza zbudowania tego rachunku na logice nie została zrealizowana; uznanie znalazła idea H. Steinhausa oparcia rachunku prawdopodobieństwa na teorii miary.

C. L. Chwistek, *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella* (1912). Rozpoczęcie badań nad modyfikacją teorii typów Russella i próba pogodzenia konstruktywizmu Poincarego z logicyzmem.

D. Praca S. Leśniewskiego *Podstawy ogólnej teorii mnogości* (1916) była próbą budowy niestandardowej teorii mnogości, która pozwalała na uniknięcie antynomii klas niezwrotnych Russella. W ten sposób zbudował mereologię (teoria zbiorów kolektywnych) opartej na nowym rachunku zdań (protetyce) i nazw (ontologii). Nawiązywał do koncepcji logiki G. Fregego.

E. W pracy *O pojęciu wielkości* ([17], 1916) Łukasiewicz polemizuje z definicją wielkości S. Zaremby z jego wstępu do *Arytmetyki teoretycznej.* Wykorzystuje logikę matematyczną, aby podać prostą definicję wielkości jako elementu zbioru uporządkowanego. Tym samym pokazuje „siłę” logii matematycznej i tworzy obóz jej zwolenników (L. Chwistek, K. Kuratowski i inni).

F. Prace Łukasiewicza: *O logice trójwartościowej* ([16], 1920), *Interpretacja liczbowa teorii zdań* ([15], 1922/23) i *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* ([20], 1930) zawierają konstrukcję trójwartościowej logiki zdań i rozpoczynają badania nad logikami wielowartościowymi. W pracach tych podał ogólną konstrukcję logik *n*-wartościowych (najpierw trójwartościowych). Wskazał, że poza klasycznymi wartościami 0 (fałsz) i 1 (prawda) można dodać jeszcze trzecią wartość logiczną (np. ½, różną od prawdy i fałszu), która odnosi się do zdarzeń, których przyczyny jeszcze nie istnieją (ani przyczyny zdarzeń przeciwnych) lub które już minęły; pokazał też możliwość budowania logiki o przeliczalnej liczbie wartości logicznych ($\aleph_0$-wartościowych) i logik modalnych (z funktorami implikacji, negacji i możliwości oraz znakami uznawania i odrzucania wyrażeń).

G. W pracy *Logika dwuwartościowa* (1921) Łukasiewicz pokazał, że system logiki dwuwartościowej można zbudować w oparciu o jeden funktor implikacji, kwantyfikator ogólny oraz cztery symbole: systemowe (1-prawda i 0-fałsz) i metasystemowe (*U*-uznawania zdań prawdziwych i *N*-odrzucania zdań fałszywych). Rozpoczął badania nad własnościami systemów aksjomatyczno-dedukcyjnych, dowodząc, że badany system jest niesprzeczny, niezależny i niezupełny.

H. W pracy *O wyrazie pierwotnym logistyki* ([22], 1923) A. Tarski pokazał możliwość zdefiniowania negacji przez kwantyfikator i równoważność, co pozwoliło Leśniewskiemu dokończyć konstrukcji swojej protetyki (uogólniony rachunek zdań).

I. W pracy J. Łukasiewicza i A. Tarskiego *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* ([32], 1930) udowodnione zostało twierdzenie, że wszystkie logiki wielowartościowe są niesprzeczne i niezupełne.

J. Praca Tarskiego *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* ([33], 1933) stanowi próbę wykorzystania logiki w filozofii, przy uściśleniu tzw. klasycznej definicji prawdy. Tarski pokazał, że w przypadku języków skończonego rzędu, w których rzędy wszystkich zmiennych są ograniczone, można sformułować poprawną definicję prawdy (semantyczną). Natomiast w przypadku języków nieskończonego rzędu taka definicja nie jest możliwa. Metoda T. polega na skonstruowaniu metajęzyka, który zawiera wszystkie odpowiednio przetłumaczone pojęcia języka oraz dodatkowo pojęcia semantyczne, czyli m.in. pojęcia „oznaczania”, „prawdziwości”, „definiowania”.

Literatura

[1] Ajdukiewicz K.: *Z metodologii nauk dedukcyjnych*. Lwów, 1921.

[2] Chwistek L.: *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella*. Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 1912.

[3] Feferman B., Feferman S.: *Alfred Tarski. Life and Logic*. Cambridge, 2004.

[4] Janiszewski Z.: *O potrzebach matematyki w Polsce*. Nauka Polska 1(1918), s. 11–18.

[5] Janiszewski Z.: *O rozcinaniu płaszczyzny przez continua*. Prace Matematyczno-Fizyczne 26(1913).

[6] Janiszewski Z.: *Wstęp ogólny* (s. 3–27); *Topologia* (s. 387–401); *Podstawy geometrii* (s. 402–426); *Logistyka* (s. 449–461); *Zagadnienia filozoficzne matematyki* (s. 462–489); *Zakończenie* (s. 538–543). In: *Poradnik dla samouków*, t. 1. Warszawa, 1914.

[7] Janiszewski Z.: *Sur les continus irreductibles entre deux points*. These, Gauthier-Villars, Paris, 1911.

[8] Jadacki J. J. (red.): *Alfred Tarski: Dedukcja i semantyka (Déduction et sémantique)*. Warszawa, 2003.

[9] Jadacki J.: *Orientacje i doktryny filozoficzne. Z dziejów mysli polskiej*. Warszawa, 1998.

[10] Jadacki J.: *Polish Analitycal Philosophy*. PWN, Warszawa, 2009.

[11] Kotarbiński T.: *Szkice z historii filozofii i logiki*. Warszawa, 1979.

[12] Leśniewski, *Podstawy ogólnej teorii mnogości*. Moskwa, 1916.

[13] Łukasiewicz J.: *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford, 1957.

[14] Łukasiewicz J. : *Elementy logiki matematycznej*. Warszawa, 1929.

[15] Łukasiewicz J.: *Interpretacja liczbowa teorii zdań*. Ruch Filozoficzny 7(1922/23), s. 92–93.

[16] Łukasiewicz J.: *O logice trójwartościowej*. Ruch Filozoficzny 5(1920), s. 170–171.

[17] Łukasiewicz J.: *O pojęciu wielkości.* Przegląd Filozoficzny 2(1916).

[18] Łukasiewicz J.: *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. Kraków, 1910.

[19] Łukasiewicz J.: *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej*. Nauka Polska 10(1929).

[20] Łukasiewicz J.: *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.* Comptes Rendus de la Société des Sciences 23(1930), s. 51–77.

[21] Łukasiewicz J.: *System of Modal Logic*. Journal of Computing Systems 1(1953), s. 111–149.

[22] Łukasiewicz J., Tarski A.: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Sprawozdania TNW 1(1930).

[23] Łukasiewicz J.: *Z zagadnień logiki i filozofii.* Warszawa, 1961.

[24] Mostowski A.: *L'oeuvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique*. Fund. Math. 44(1957), s. 1–11.

[25] Mostowski A.: *Logika matematyczna.* Monografie Matematyczne, Warszawa, 1948.

[26] Murawski R.: *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*. Toruń, 2011. *Odczyty polskie na Zjeździe Filozoficznym w Pradze*. Przegląd Filozoficzny 37(1934).

[27] Schulz H.: *Zarys historii logiki.* PWN, Warszawa, 1965.

[28] Sierpiński W.: *Zarys teorii mnogości.* Warszawa, 1912.

[29] Sleszyński J.: *Teoria dowodu* (opr. S. K. Zaremba). T. 1, Kraków, 1925; t. 2, Kraków, 1929.

[30] Sleszyński J.: *O logice tradycyjnej*. Towarzystwo Filozoficzne, Kraków, 1921.

[31] Sleszyński J.: *O znaczeniu logiki dla matematyki, Rozwój pojęć nieskończonościowych*. In: *Poradnik dla samouków*, t. 3. Warszawa, 1923, s. 39–88.

[32] Tarski A.: *O wyrazie pierwotnym logistyki*. Przegląd Filozoficzny 23(1926), s. 68–89.

[33] Tarski A.: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa 34(1993).

[34] Twardowski K.: *Wybrane pisma filozoficzne.* Warszawa, 1965.

[35] Voisé W., Skubała-Tokarska Z. (red.): *Z historii polskiej logiki.* Wrocław, 1881.

[36] Woleński J.: *Alfred Tarski jako filozof.* Wiad. Mat. 27(1987).

[37] Woleński J.: *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*. Warszawa, 1985.

[38] Woleński J.: *Historico Philosophical Essays*. Vol. 1. Copernicus Center Press, Rzeszów, 2011.

[39] Woleński J.: *Jan Łukaszewicz o indukcji, logice wielowartościowej i filozofii*. Studia Filozoficzne 32(1988), s. 117–122.

[40] Woleński J.: *Jan Łukasiewicz*. In: *Matematyka przełomu XIX i XX wieku*. Katowice, 1992, s. 35–38.

[41] Woleński J.: *Logika matematyczna*. In: *Historia nauki polskiej. Wiek XX. Nauki Ścisłe*, z. 1, Warszawa, 1995, s. 35–63.

Adres

Wiesław Wójcik
Instytut Historii Matematyki
Polska Akademia Nauk
Nowy Świat 72
00-330 Warszawa
e-mail: *wwoj@ihnpan.waw.pl*

PROBLÉMY Z GEOMETRIE VE SBÍRCE IOANNISE HOLFELDA EXERCITATIONES GEOMETRICAE

JAN ZAHRADNÍK

Abstract: In the Department of Historical Archives of The Research Library of South Bohemia, which is located in the Monastery of Zlatá Koruna, is a small textbook, containing collection of problems from the geometry of conics. The collection contains 47 solved problems, divided into four parts. I selected one problem from each part and commented on their assignment and solution.

1 O autorovi a jeho knize

Útlá knížka Ioannise Holfelda Exercitationes Geometricae[1] [1], vydaná v Praze roku 1773, je psána latinsky, tedy jazykem, kterým mluvili a psali vzdělanci tehdejší doby. Pro Ioannise Holfelda, autora knihy, byla latina jazykem, ve kterém se mu dostalo vzdělání a ve kterém se dokázal vyjadřovat přesně, exaktně a jemu i jeho kolegům po celé Evropě naprosto srozumitelně. V latinské podobě je na titulní stránce knihy uvedeno i jeho křestní jméno.

Zadáme-li jméno Johann Holfeld do vyhledávače Google, objeví se ve Wikisource krátký záznam z *Biographisches Lexikon des Kaiserthums Öesterreich (BLKÖ)* [4], který obsahuje odkaz na zdroj poznatků v něm uvedených – *Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste*[2] [2].

Podle této encyklopedie se Johann Holfeld narodil v roce 1747, pravděpodobně v Rakousku (*vermuthlich im Österreichischen*), vstoupil do jezuitského řádu, avšak duchovní stav opustil s jeho zrušením. Ještě v roce 1793 byl mimořádným učitelem praktické matematiky na univerzitě v Lembergu v Haliči (*Lemberg in Galizien)*, dnešním Lvově na Ukrajině. Později se stal řádným profesorem praktické a teoretické matematiky. Zemřel 7. listopadu 1814 v Lembergu. V encyklopedii [2] je doslova uvedeno, že napsal mimo jiné (*er schrieb unter andern*): *Neue Theorie von der Natur der Standlinien nebst trigonometrischer Berechnung der Fehler im Winkelmessen, die von der unrechten Lage des Geradbogens und des Visirstrahles herrühren (Lemb., 1793. 4.).* Na závěr příspěvku v *BLKÖ* je uvedeno, že se kromě uvedené knihy žádnou další práci Johanna Holfelda nepodařilo najít.

Dalším zdrojem informací o matematikovi s příjmením Holfeld je Archiv Univerzity Karlovy, jehož součástí je také Kartotéka jezuitů české provincie (autorka Anna Fechtnerová) [3], ve které jsou následující informace:

Jan (Joannes) Holfeld „Bohemus“ se narodil 16. dubna 1750 v Poděbradech. 21. října 1765 vstoupil do Tovaryšstva Ježíšova v koleji v Hradci Králové. V letech 1766 až 1767 pobýval dva roky v noviciátu v Brně a gymnaziální studia dokončil v roce 1768 v koleji v Klatovech. Od roku 1769 do roku 1772 absolvoval tříleté studium na filozofické fakultě

[1] Kniha se nachází ve fondu Oddělení starých tisků Jihočeské vědecké knihovny, umístěném v budově kláštera Zlatá Koruna. Podle razítka na titulní stránce patřila původně do knihovny Krumlovské prelatury.
[2] Tato encyklopedie byla vydávaná v letech 1818 až 1889 nejprve Johannem Samuelem Erschem a Johannem Gottfriedem Gruberem a dále dalšími generacemi doplňovaná.

Karlo-Ferdinandovy univerzity v Koleji u svatého Klimenta na Starém městě pražském, kde se také v roce 1771 věnoval speciálně matematice (*repetitio matheseos*). V roce 1773 působil Johann Holfeld v Koleji u sv. Klimenta na Starém městě pražském, kde vyučoval v gramatikálních třídách gymnázia.

Setkáváme se tedy se třemi stopami po matematikovi s příjmením Holfeld, žijícím ve druhé polovině osmnáctého století. Za prvé to je *Ioannis Holfeld*, autor knihy *Exercitationes Geometricae*, za druhé Johann Holfeld, uvedený v encyklopedii [2] a za třetí Jan (Joannes) Holfeld „Bohemus", uvedený v Kartotéce jezuitů české provincie [3]. Poslední dva zdroje navíc uvádějí rozdílné datum narození. Pro tvrzení, že se jedná o jednu a tutéž osobu, nám tedy tyto zdroje neposkytují dostatek podkladů.

Na titulní straně knihy je její autor uveden jako *Ioannis Holfeld Societatis Iesu, Sublimioris Matheseos Auditoris* (Johann Holfeld Tovaryšstvo Ježíšovo, posluchač vyšší matematiky). Název knihy je *Exercitationes Geometricae* (Geometrická cvičení). Vydavatelem byla Kolej u svatého Klimenta Tovaryšstva Ježíšova (*Charactere Collegii Clementini Societatis Jesu*), vytištěna byla tiskařem (*factore*) Janem Adamem Hagenem v Praze roku 1773.

Kniha má kromě titulní stránky 64 stran textu a obsahuje ve čtyřech částech celkem 47 řešených problémů. V knize nenajdeme žádnou úvodní nebo závěrečnou kapitolu. Každá část obsahuje na úvod stručnou charakteristiku problémů, které se v ní vyskytují. Na konci knihy jsou připojeny dva listy obrázků. Je jich celkem 36, jsou číslovány a vytištěny na obdélníkových listech, složených na formát knihy tak, aby je bylo možno po rozložení sledovat současně s četbou. Autor se na ně v zadání jednotlivých problémů odvolává uvedením symbolu *Fig.* a pořadového čísla příslušného obrázku. Některé obrázky používá autor i pro více problémů. Při popisu řešení problémů se už na obrázky přímo neodvolává.

Vzhledem k rozsahu příspěvku jsem provedl výběr problémů. Z každé části jsem vybral jeden problém, který je podle mého názoru v něčem zajímavý a který se svým zadáním a řešením liší od současného přístupu k této části geometrie.

2 Ukázky problémů z jednotlivých částí knihy

2.1 Geometrická cvičení část I. (*Exercitationum Geometricarum Pars I.*)

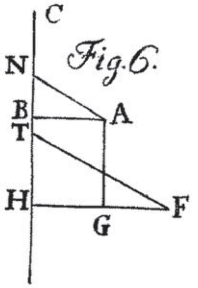
Tato část, obsahující 9 problémů, se podle autora zabývá různými způsoby, kterými je možné určit Apolloniovy paraboly. Jako ukázku úloh z této části uvádím problém č. 4.

Problema 4.: *Datis duobus perimetri Parabolae punctis A, F (Fig. 6), & positione diametri CH, ejusque parametro, Parabolam describere.*

Problém 4.: Jsou dány dva body *A, F* ležící na obvodu paraboly (Obr. 6). Dále je určena poloha průměru *CH* a jeho parametr. Popište parabolu.

Řešení: Ioannis Holfeld (dále I. H.) používá v zadání úlohy termín poloha průměru a jeho parametr. Nikde v celé knize tyto pojmy nevysvětluje ani přesně nespecifikuje.

Považuji proto za nutné to vysvětlit. Na obrázku 6. se objevují body *N* a *T*, které spolu s danými body paraboly *A* a *F* určují rovnoběžné přímky. Jedná se o přímky, jejichž společný směr je polárně sdružený s průměrem *CH.* Tento směr najdeme tak, že v bodě *A* sestrojíme tečnu paraboly, určíme její průsečík s daným průměrem a vzniklým bodem vedeme druhou tečnu k parabole s dotykovým bodem A'. Přímka AA' (sečna paraboly) určuje směr, polárně sdružený s daným průměrem. Podobné konstrukce provedeme i pro bod F. Přímka FF' (sečna paraboly) je rovnoběžná s přímkou AA' (patří do stejného směru). Body N a T vzniknou jako průsečíky těchto sečen s daným průměrem. Pak platí $AN^2 : NC = FT^2 : TC = p\,(1)$, kde p je parametr, příslušný k danému průměru. Pokud se jedná o obecnou polohu průměru, jako je tomu i v našem případě, nejsou první souřadnice (*abscissa NC*) a druhá souřadnice (*semiordinata AN*) na sebe kolmé, jejich úhel se nazývá úhel souřadnic (*angulus coordinatarum*). Úsečku typu CN v případě obecné polohy průměru budeme dále nazývat abscisa, úsečku typu NA semiordináta. Pokud průměr paraboly splývá s její osou, jsou abscisa x a semiordináta y libovolného bodu paraboly kolmé a platí pro ně vztah $y^2 = p \cdot x$, který je známý ze základního kurzu analytické geometrie jako rovnice paraboly v kartézské soustavě souřadnic.[3]



Obr. 6.

Při řešení problému I. H. nejprve označí $CN = x$, $TH = z$, $AG = BH = m$, $AB = b$, $FH = a$. Z podobnosti trojúhelníků NBA a THF odvozuje $b : NB = a : z$, z čehož určí $NB = \frac{bz}{a}$. V pravoúhlém trojúhelníku NBA platí $AN^2 = NB^2 + b^2 = \frac{b^2 z^2}{a^2} + b^2$.

Poznamenávám, že I. H. nezmiňuje, že využívá podobnosti trojúhelníků ani kolmosti úseček AB a HF na průměr CH.

Podle vlastnosti (1) platí $AN^2 = px$, tedy $px = \frac{z^2 b^2 + a^2 b^2}{a^2}$. Podobně, podle vlastnosti (1), platí $FT^2 = p \cdot CT$, kde p je známý parametr daného průměru. Dále I. H. používá vztah $CT = x + NB + m - z = x + \frac{bz}{a} + m - z$ (Pro upřesnění uvádím, že vztah je zřejmý z obrázku 6.). Z Pythagorovy věty I. H. zároveň vyvozuje, že $FT^2 = z^2 + a^2$.

S využitím těchto vztahů dostává I. H. rovnici $z^2 + a^2 = px + \frac{pbz}{a} + pm - pz$, do které dosazuje za výraz $px = \frac{b^2 z^2}{a^2} + b^2$, čímž z ní vyloučí proměnnou x.

Výsledná rovnice má tvar $z^2 + \frac{ap}{a+b} z - \frac{a^2\left(b^2 + pm - a^2\right)}{a^2 - b^2} = 0$. Vzhledem k tomu, že *a, b, m* i *p* jsou známé hodnoty, může z ní I. H. stanovit hodnotu *z*, což mu umožňuje určit

[3] Je nutné uvést, že I. H. pracuje s rovnicí paraboly ve tvaru $y^2 = p \cdot x$, kde p je parametr paraboly, což znamená, že vzdálenost ohniska paraboly od její řídící přímky je rovna polovině hodnoty parametru, vzdálenost hlavního vrcholu od ohniska i od řídící přímky je pak rovna čtvrtině hodnoty parametru.

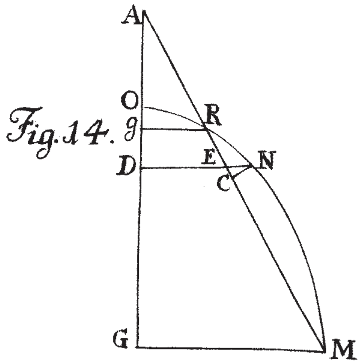
trojúhelník *HTF* a pomocí hodnoty x také vrchol daného průměru *C*. Zná také úhel souřadnic (*angulus coordinatarum*) *HTF*. Vzdálenost řídící přímky od vrcholu *C* je rovna čtvrtině parametru příslušného průměru. Tím je podle I. H. úloha vyřešena. Připomínám, že známe-li řídící přímku paraboly a její dva body, určíme snadno i její ohnisko.

2.2 Část druhá (*Pars Altera*)

V této části sbírky, která obsahuje 13 problémů, jsou podle I. H. vyřešeny problémy, týkající se zadaných kuželoseček. Na ukázku uvádím problém č. 10.

Problema 10.: *Data Parabolae subtensa RM (Fig. 14), ad diametrum OG semiordinatam DN ducere; cujus pars EN, inter subtensam, & arcum Parabolae intercepta, sit omnium ejusmondi partium maxima.*

Problém 10.: Je dána sečna paraboly *RM* (Obr. 14.), k jejímu průměru *OG* veďte semiordinátu *DN*, jejíž část *EN*, vymezená mezi sečnou a obloukem paraboly, je ze všech takových částí největší.



Obr. 14.

Řešení: I. H. jako první krok konstruuje tečnu paraboly, rovnoběžnou se sečnou *RM*, čímž získává bod *N* jako její bod dotyku, semiordinátu *ND* a její průsečík se sečnou *E*. Vzhledem k poloze oblouku *RNM* a tečny v bodě *N* podle I. H. platí, že délka úsečky mezi sečnou a obloukem paraboly je pro jakoukoli další přímku, rovnoběžnou s úsečkou *EN*, menší než jím nalezená úsečka *EN*.

I. H. dále uvádí, že může také uvažovat úsečku *RE*, odpovídající maximální úsečce *EN*. To mu umožňuje vyřešit problém jiným způsobem.

I. H. označí průsečík *GO* a *RM* jako bod *A* a dále uvažuje semiordináty *Rg* a *MG* příslušné k danému průměru. I. H. dále zavádí následující délky úseček: $AO = a$, $OG = b$, $OD = x$; parametr příslušného průměru *OG* označuje I. H. jako *p*. Pak podle I. H. platí (protože body *N* a *M* leží na parabole) $DN = \sqrt{p \cdot x}$; $GM = \sqrt{b \cdot p}$.

Dále I. H. uvádí vztah $(AO + OG) : GM = (AO + OD) : DE$. I. H. ovšem vyvozuje tento vztah bez předchozího upozornění na podobnost trojúhelníků *AGM, ADE*. Po dosazení pak dostává: $\left(a+b\right):\sqrt{b\cdot p}=\left(a+x\right):DE$, z čehož plyne $DE=\dfrac{a\sqrt{bp}+x\sqrt{bp}}{a+b}$. Pro úsečku *EN* dostává: $EN=DN-DE=\sqrt{px}-\dfrac{\left(a\sqrt{bp}+x\sqrt{bp}\right)}{a+b}$.

V tomto místě řešení chci uvést, že hledáme takovou hodnotu *x*, pro kterou je délka úsečky *EN* maximální, tedy maximum funkce dané předcházející formulí o proměnné *x*.

Tuto úvahu I. H. nevyslovuje, přistupuje rovnou k diferencování formule (*formulae differenciale*) s následujícím výsledkem: $\dfrac{dx\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{dx\sqrt{bp}}{a+b}$. Tento výraz pokládá rovný nule (ani tento krok I. H. nezdůvodňuje) a dostává rovnici: $\dfrac{\left(a+b\right)dx\sqrt{p}-2dx\sqrt{bpx}}{2\left(a+b\right)\sqrt{x}}=0$, kterou vydělí dx a $\sqrt{p}$ a získá řešení $x=\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4b}=\dfrac{AG^2}{4GO}$ (tím určí I. H. polohu bodu *D*). Semiordináta *DN* je pak rovnoběžná se semiordinátou *GM*.

I. H. dále uvádí, že může určit délky úseček *Og*, *OG*, *RM*, *gR* (které vycházejí ze zadání) a také délky úseček *OD*, *gG* a *gD*. Pak platí $gG:gD=RM:RE$, z čehož I. H. vyjádří *RE* a tím získává bod *E* a úsečku *EN*.

Na závěr řešení problému uvádí I. H. bez důkazu tři důsledky (*corollarium*):

Důsledek 1: Pokud je $a=0$, pak sečna prochází vrcholem průměru. Vyjde $x=\dfrac{1}{4}b$ a proto $RE=\dfrac{1}{4}RM$.

Důsledek 2: Je-li dále *R* hlavní vrchol a část osy mezi tímto vrcholem a semiordinátou *MG* vymezená je rovna parametru osy, pak *D* je ohnisko.

Důsledek 3: Zatímco *EN* je maximální ze všech rovnoběžných úseček, je rovněž kolmice na sečnu *NC* maximální, což je zřejmé z prvního řešení.

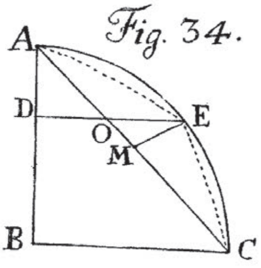
Pro pořádek uvádím stručné vysvětlení těchto důsledků: Důsledek 1 vyplývá okamžitě dosazením $a=0$ do rovnice pro *x*, tvrzení důsledku 2 vyplývá z toho, že ohnisko paraboly je vzdáleno čtvrtinu parametru od hlavního vrcholu a důsledek 3 vychází z vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku *ECN*.

2.3 Část III. (*Pars III.*)

V této části, obsahující 19 problémů, se autor sbírky zabývá vznikem křivek, přirozeně určených. Tuto charakteristiku upřesňuji tak, že se jedná o určování geometrických míst bodů (*locus punctorum*), podle současné terminologie množin všech bodů s danou vlastností. Z této části jsem vybral problém č. 40.

Problema 40.: *Datis iisdem Parabolis, dataque subtensa AC (Fig. 34) a communi vertice principali singulis Parabolis inscripta, super qua constructa sint triangula maxima AEC, invenire locum verticum E, in Parabolarum perimetris existentium.*

Problém 40.: Jsou dány paraboly; každé z nich je vepsána sečna dané délky *AC* (Obr. 34), procházející společným hlavním vrcholem parabol. Nad sečnou je sestrojen maximální trojúhelník *AEC*. Najděte geometrické místo bodů *E*, ležících na obvodu parabol.



Obr. 34.

Řešení: I. H. vychází při řešení tohoto problému z řešení Problému 10**.** z druhé části knihy, zejména důsledku 1. Podle něj v případě tohoto problému platí, že pokud sečna prochází vrcholem průměru a úsečka *OE* je maximální, pak abscisa $AD = \frac{1}{4} AB$. Dále platí (podle důsledku 3), že také výška *ME*, tedy i plocha trojúhelníka *AEC*, vepsaného do úseče paraboly, je maximální.

I. H. označí $AD = x$, $DE = y$, pak $AB = 4x$. Dále I. H. uvažuje, že $BC^2 : DE^2 = AB : AD$ (Pro objasnění této skutečnosti připomínám, že body *E* a *C* leží na parabole, tedy $BC^2 = p \cdot AB,\ DE^2 = p \cdot AD$). Podle I. H. tedy platí $BC^2 : DE^2 = 4:1$, tedy $BC : DE = 2:1$, takže $BC = 2y$.

I. H. dále označuje $AC = 2a$ a získává $AB = \sqrt{4a^2 - 4y^2}$. Po dosazení dostává $4x = \sqrt{4a^2 - 4y^2}$, což mu po krátké úpravě dává rovnici hledaného geometrického místa bodů. Rovnice má podle I. H. tvar $y^2 = a^2 - 4x^2$, z čehož autor sbírky vyvozuje, že hledaným geometrickým místem bodů je elipsa s velkou polosou rovnou *a* a s malou polosou rovnou polovině *a*.

2.4 Část čtvrtá (*Pars IV.*)

Čtvrtou a poslední část své sbírky věnuje I. H. určování objemů a povrchů těles, vzniklých rotací některých částí kuželoseček kolem sečen nebo jiných přímek. Ze šesti problémů v této části jsem vybral problém č. 42.

Problema 42.: *Invenire soliditatem corporis, geniti rotatione segmenti Parabolici AECA (Fig. 34) circa subtensam fixam AC, a vertice principali A ductam.*

Problém 42.: Určete objem tělesa, vzniklého rotací části paraboly *AECA* (Obr. 34.) kolem pevné sečny *AC*, vedené hlavním vrcholem *A*.

Řešení: I. H. zavádí následující úsečky: $AC = a$; $CB = b$ (*semiordinata axis*); $AB = c$. Libovolná část sečny *AC* budiž $AM = x$, k sečně kolmá úsečka $ME = y$. Dále I. H.sestrojí kolmici k ose paraboly, kterou značí *EOD* a vyjádří úsečky *AD, DE* pomocí proměnných (*variabilium*) *x*, *y*.

Učiní to tak, že ze zřejmé podobnosti trojúhelníků ABC a EMO dostane vztah $AB:BC = ME:MO$ (I. H. ale opět tuto podobnost přímo nezmiňuje), případně $c:b = y:MO$, tedy $MO = \frac{by}{c}$, čili $AO = x - \frac{by}{c}$. Ze stejné podobnosti získává $c:a = y:EO$, tedy $EO = \frac{ay}{c}$.

Z podobnosti trojúhelníků ABC, ADO plyne $a:c = AO:AD$, po dosazení za AO pak $a:c = \left(x - \frac{by}{c}\right):AD$, tedy $AD = \frac{cx - by}{a}$. Ze stejné podobnosti dostává $a:b = AO:DO$, čili $OD = \frac{bx}{a} - \frac{b^2 y}{ac}$. Proto $DE = DO + OE = \frac{\left(a^2 - b^2\right)y}{ac} + \frac{bx}{a} = \frac{cy + bx}{a}$.

Nyní I. H. vyjádřuje oblouk paraboly pomocí souřadnic x (abscisa) a y (semiordináta). Poprvé využívá toho, že body *A, E, C* leží na parabole. Předpokládá, že parametr osy paraboly je rovný p a dostává vztah $DE^2 = p \cdot AD$, ze kterého po dosazení získává vztah $\frac{pcx - pby}{a} = \frac{\left(cy + bx\right)^2}{a^2}$. Tato rovnice je pro řešení problému klíčová.

Já jsem ji nejprve upravil na tvar $c^2 y^2 + y\left(2bcx + apb\right) + b^2 x^2 - apcx = 0$ a řešil jako kvadratickou rovnici s neznámou y ($y > 0$). Po úpravě jsem dostal vyjádření proměnné y: $y = \sqrt{\frac{a^2 p^2 b^2}{4c^4} + \frac{apb^2 x}{c^3} + \frac{apx}{c}} - \frac{abp}{2c^2} - \frac{bx}{c}$. I. H. uvádí stejný výsledek, avšak podrobné řešení rovnice v knize uvedeno není.

V této rovnici, vyjadřující závislost proměnné y na proměnné x, I. H. označuje $\frac{a^2 p^2 b^2}{4c^4} = m^2$ a $\frac{apb^2}{c^3} + \frac{ap}{c} = n$ a získává její přehlednější tvar $y = \sqrt{m^2 + nx} - m - \frac{bx}{c}$.

V tomto místě řešení provádí I. H. základní úvahu pro následující výpočet objemu tělesa pomocí integrálu. Zavádí element objemu (*elementum solidi*) tělesa, vzniklý rotací elementární části paraboly, ve tvaru $\frac{Py^2 dx}{2r}$ a vysvětluje význam $\frac{P}{2r}$ (2) jako konstantní poměr délky kružnice a jejího průměru.[4] V dalším výpočtu tuto konstantu ale vynechává a upozorňuje na nutnost jí násobit výsledek.

I. H. dále bez komentáře sestavuje výraz pro integraci (*integrale formulae*) ve tvaru $2m^2 dx + nx\,dx + \frac{b^2 x^2\,dx}{c^2} + \frac{2mbx\,dx}{c} - 2m\,dx\sqrt{m^2 + nx} - \frac{2bx\,dx}{c}\sqrt{m^2 + nx}$ (to je výraz $y^2\,dx$), jehož jednotlivé členy jsou podle I. H. na první pohled (*primo conspectu patet*) algebraicky integrovatelné (*algebraice integrabiles*). Pro upřesnění uvádím, že I. H. počítá určitý integrál $\int_0^x y^2 dx$. Výsledkem této integrace je formule $2m^2 x + \frac{nx^2}{2} + \frac{b^2 x^3}{3c^2} + \frac{mbx^2}{c} + \frac{4m^4}{3n} - \frac{8bm^5}{15cn^2} + \left(\frac{8bm^4}{15cn^2} - \frac{4bm^2 x}{15cn} - \frac{4bx^2}{5c} - \frac{4m^3}{3n} - \frac{4mx}{3}\right) \cdot \sqrt{m^2 + nx}$, I. H. opět uvedená bez předchozího podrobného výpočtu.

[4] My známe vzorec pro element objemu ve tvaru $dV = \pi y^2 dx$, ale I. H. používá důsledně místo symbolu π pro Ludolfovo číslo tuto konstantu.

Po vynásobení této formule konstantou (2) nahrazující π dostává I. H. objem tělesa vzniklého řezem rovinou kolmou k ose rotace v bodě s abscisou *x*. Pokud za *x* dosadí *a*, vyjde objem celého tělesa.

Na závěr ještě I. H. uvádí zvláštní případ, kdy předpokládá, že $c = p$, tedy také $b = p$ ($b^2 = pc$) a $a = \sqrt{2p^2}$; pak platí, že $m = \frac{1}{2}\sqrt{2p^2}$ a $n = 2\sqrt{2p^2}$. Pro objem tělesa v tomto speciálním případě (*in casu hoc speciali*) vychází (příslušné výpočty I. H. neuvádí) $\frac{P}{2r}\cdot\frac{569-567}{120}p^2\sqrt{2p^2} = \frac{P}{2r}\cdot\frac{1}{60}p^2\sqrt{2p^2} = \frac{P}{2r}\cdot\frac{p^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2p^2}}{15}$. Výsledek I. H. interpretuje tak, že objem tohoto speciálního tělesa se rovná objemu válce, který má jako podstavu kruh o průměru *p* a výšku rovnou $\frac{1}{15}\sqrt{2p^2} = \frac{1}{15}a$.

3 Závěr

Při řešení problémů používá Ioannis Holfeld matematické nástroje a postupy své doby. Některé matematické pojmy, které jsou v současné době naprosto běžné, se v Holfeldově sbírce nevyskytují. Například chybí použití kartézské soustavy souřadnic, symbolika i postupy z teorie funkcí nebo zápisy používající množinovou symboliku.

Právě proto jsou Holfeldovy problémy a jejich řešení zajímavé a když se nám podaří porozumět matematickému textu druhé poloviny 18. století psanému v latině, najdeme v jeho úlohách poučení a inspiraci.

Některé závěry v procesu řešení problémů, které I. H. přijímá bez podrobnějšího zdůvodnění, nemusí být na první pohled pochopitelné. Snažil jsem se je proto svými komentáři vysvětlit. Všechna řešení, která jsou v tomto příspěvku uvedena, jsem ověřil. Používal jsem při tom metod současné matematiky.

Literatura

[1] Holfeld I.: *Exercitationes Geometricae*. Charactere Collegii Clementini Societas Jesu, Praha, 1773.

[2] Ersch J. S., Gruber J. G.: *Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste, Zweite Section H – N*. A. G. Hoffmann, Leipzig, 1833. [cit. 22. 4. 2013]. Dostupné na <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN360982794&DMDID=DMDLOG_0069>.

[3] Fechtnerová A.: *Databáze a kartotéka České provincie Tovaryšstva Ježíšova (1556–1773)*. ÚDAUK.

[4] Wikisource, der freien Quellensammlung: *Johann Holfeld*. Poslední revize 11.12. 2011 [cit. 22. 4. 2013]. Dostupné na <http://de.wikisource.org/wiki/BLKÖ:Holfeld,_Johann>

Adresa

RNDr. Jan Zahradník
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: *jzahradnik@pf.jcu.cz*

OBSAH

Přehled dosud vyšlých konferenčních sborníků

- M. Bečvářová (editorka): *27. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006*. Sborník sylabů, Praha, 2006, 74 stran.

- M. Bečvářová (editorka): *28. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Jevíčko, 24. 8. – 28. 8. 2007*. Sborník sylabů, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2007, 120 stran, ISBN 978-80-7378-016-6.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, 191 stran, ISBN 978-80-7378-048-7.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2009, 242 stran, ISBN 978-80-7378-092-0.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2010, 291 stran, ISBN 978-80-7378-128-6.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *32. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 26. až 30. 8. 2011*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2011, 301 stran, ISBN 978-80-7378-172-9.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *33. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 24. 8. až 28. 8. 2012*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2012, 303 stran, ISBN 978-80-7378-208-5.

Elektronické verze výše uvedených sborníků a další informace o mezinárodních konferencích Historie matematiky jsou dostupné na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

34. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Poděbrady, 23. až 27. 8. 2013

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 428. publikaci

Z připravených předloh
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání
Praha 2013

ISBN 978-80-7378-234-4