

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Yulianna Tolkunova

## Geometrie stínu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika v kombinaci s deskriptivní geometrií

Praha 2014

Ráda bych na tomto místě poděkovala RNDr. Petře Surynkové, Ph.D. která mě vedla při mé práci. Ze srdce děkuji za její čas, spolehlivost, dobré rady a hlavně za velkou trpělivost a toleranci mých jazykových nedostatků.

Děkuji také Eduardu Suleymanovi za jeho podporu a poskytnutí pomoci s počítačovými softwary.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne.....

podpis

## Abstrakt

**Název práce:** Geometrie stínu  
**Autor:** Yulianna Tolkunova  
**Katedra (Ústav):** Katedra didaktiky matematiky  
**Vedoucí bakalářské práce:** RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

**Abstrakt:** Předložená práce se věnuje geometrickému osvětlení a metodám jeho sestrojování. Zejména je zaměřená na rovnoběžné osvětlení. Práce obsahuje teoretickou část, ve které se lze dozvědět o vlastnostech a základních pojmech souvisejících s geometrickým osvětlením. Po ní následuje praktická část, která obsahuje sadu příkladů s uvedeným řešením a poté nevyřešené příklady pro samostatné procvičení. Celý text je doplněn množstvím obrázků pro zvýšení představitivosti čtenáře o principech a metodách osvětlení. Při sepisování práce byl důraz především kladen na srozumitelnost a použitelnost metod. Obecně práce *Geometrie stínu* může posloužit všem zájemcům, kteří chtějí blíže poznat geometrické osvětlení. Práce by mohla být užitečným učebním textem pro studenty a učitele deskriptivní geometrie.

**Klíčová slova:** osvětlení, stín, mez stínu, projekce

**Title:** Geometry of shadows  
**Author:** Yulianna Tolkunova  
**Department:** Department of Mathematics Education  
**Supervisor:** RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

**Abstract:** The present thesis deals with geometric lighting and methods of its construction. In particular, it is directed at parallel lighting. The work includes a theoretical part, in which you can learn about the properties and basic concepts related to geometric lighting. Afterwards, there is a practical part, which contains a set of examples with their solutions and then unsolved examples for independent practice. The project is filled up with a number of pictures to enhance the reader's imagination about the principles and methods of lighting. In my work I emphasized intelligibility and usability of the methods listed there. In general, thesis *Geometry of shadows* is devoted to everybody who wants to learn more about the geometry of shadows. The work could be a useful study material for students and teachers of descriptive geometry.

**Keywords:** shadow, boundaries of shadows, projection

# Obsah

<b>Úvod.....</b>	<b>4</b>
<b>1 Geometrie stínu.....</b>	<b>6</b>
1.1 Úvod do osvětlení.....	6
1.2 Základní vlastnosti geometrického osvětlení.....	7
1.3 Osvětlení bodů.....	10
1.4 Osvětlení přímek.....	12
1.5 Metoda zpětných paprsků.....	15
<b>2 Osvětlení jednotlivých těles.....</b>	<b>17</b>
2.1 Osvětlení hranatých těles.....	17
2.2 Osvětlení rotačního válce.....	18
2.3 Osvětlení rotačního kužele.....	20
2.4 Osvětlení koule.....	22
<b>3 Příklady na osvětlení v jednotlivých promítáních.....</b>	<b>26</b>
3.1 Mongeovo promítání.....	26
3.2 Kosoúhlé promítání.....	29
3.3 Pravoúhlá axonometrie.....	41
3.4 Příklady pro samostatnou práci.....	48
<b>4 Použití počítačů k sestrojení osvětlení.....</b>	<b>50</b>
<b>Závěr.....</b>	<b>55</b>
Symbolika a značení.....	56
Seznam použité literatury.....	57

# Úvod.

Tématem této práce je geometrie stínu neboli geometrické osvětlení. Je to velice důležité téma, široce použitelné v praxi. Práce je více zaměřená na rovnoběžné osvětlení do roviny. Princip středového osvětlení je uveden jenom krátce pro obecný přehled osvětlení.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s geometrickým osvětlením, jeho principy a vlastnostmi. V současné době literatura věnovaná osvětlení není moc rozšířená, ve většině učebnic z deskriptivní geometrie se tomuto tématu věnují jenom stručně nebo ho vynechávají úplně. Navíc se většinou jedná o starší učebnice. Proto byla vytvořena tato práce, která podává přehled základních principů geometrického osvětlení. Navíc práce je napsána co nejvíce pochopitelným a jednoduchým jazykem, aby čtenář lépe porozuměl tématu a aby text byl co nejvíce zajímavým. Celý text je doplněn množstvím obrázků pro zvýšení představivosti čtenáře o principech osvětlení. Veškeré obrázky jsou nově vytvořeny v modelovacím softwaru Rhinoceros, zařazeno je také několik obrázků nakreslených přímo ve Wordu. Účelem této práce není jenom vysvětlit teorii geometrického osvětlení, ale také procvičit teoretické znalosti čtenáře pomocí příkladů. V práci jsou úlohy s popsáním řešením, navíc jsou přidány neřešené úlohy pro samostatné procvičení. Příklady jsou především věnované osvětlení v rovnoběžných promítáních.

Práce má následující strukturu:

První kapitola poskytuje popis obecných vlastností geometrického osvětlení, důležité definice a pojmy. Dále jsou uvedené obecné principy sestrojování stínů.

Druhá kapitola je teoretickým podkladem pro osvětlení konkrétních významných těles, takových jako rotační válec, rotační kužel a kulová plocha. Také je zde popsán princip osvětlení hranatých těles.

Třetí kapitola se skládá z konkrétních vyřešených příkladů na osvětlení v různých rovnoběžných promítáních, konkrétně v Mongeově, kosoúhlém promítání a v pravoúhlé axonometrii. Na konci kapitoly je sada nevyřešených úloh pro čtenáře. Všechny uvedené příklady jsou nově navrženy a samostatně vypracovány.

Poslední čtvrtá kapitola je věnovaná použití počítačů k sestrojení stínů, což je velice aktuální v dnešní době. Poskytuje informaci o některých softwarech, které by mohly být použity pro sestrojení osvětlení.

Součástí práce je také přiložené CD, na němž se nachází celá práce v elektronické podobě a příklad ve formátu MATLAB, o kterém se mluví v poslední kapitole.

K dobrému porozumění této práci je třeba ovládat základní pojmy deskriptivní geometrie, například půdorys, nárys, stopník a podobně. V textu jsou však uvedeny odkazy na tyto pojmy do literatury. Čtenář by měl rovněž znát základní principy promítání. Jinak pojmy související přímo s osvětlením jsou vždy vysvětlené v textu práci.

Tento materiál by měl být užitečný pro studenty a učitele deskriptivní geometrie na středních i vysokých školách. Osvětlení je ale aspektem, kterým se kromě deskriptivní geometrie zabývají i jiné oblasti, o tom se čtenář může přesvědčit při čtení práce. Obecně, práce *Geometrie stínu* může posloužit všem zájemcům, kteří chtějí blíže poznat geometrii stínů.

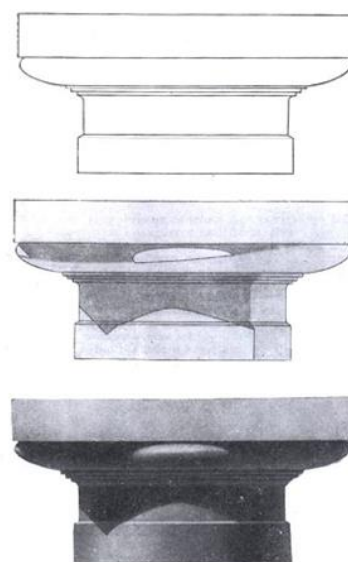
# 1 Geometrie stínu.

## 1.1 Úvod do osvětlení.

Co to je deskriptivní geometrie? Deskriptivní geometrie má několik různě formulovaných definic, z nichž se každá snaží popsat danou vědu co nejpodrobněji a maximálně vysvětlit její cíle a smysl. Každá z definic se nám ale snaží říct jednu společnou věc. Jednoduše řečeno, deskriptivní geometrie je věda, která se zabývá zobrazením trojrozměrných objektů (dále bude používána zkratka 3D, v případě dvojrozměrných objektů – 2D) na papír čili převáděním 3D objektů na 2D objekty. Hlavním cílem je to, aby 2D průmět nějakého objektu, tj. výsledek geometrického promítání byl co nejreálnější a nejnázornější. Proto se v deskriptivní geometrii zavádí tzv. osvětlování objektů. Stín dělá obrázek názornějším, pochopitelnějším a živějším. Pomocí stínů získáváme zdání další dimenze. Vhodným osvětlením lze nahradit další průmět tělesa, protože z vrženého stínu lze pochopit tvar tělesa, které osvětlujeme, říká to také (K. Drábek a kol, 1979).

Stínování se používá v nejrůznějších oblastech, např. v malířství, architektuře, strojírenství, designu. Používá je každý malíř, osvětlení je důležitou částí teoretického základu umělecké činnosti. Pokud se podíváte na jakýkoliv obraz nebo obrázek, určitě tam naleznete stín. Každý architekt také určitě zná důležitou roli (závažnost) stínu. Zásluhou stínu dostáváme lepší představu o reliéfu budovy, jeho jednotlivých objemech a částech. Šerosvit kompenzuje špatnou názornost některých promítání a nepřítomnost třetího rozměru. Stíny na ryse také dávají možnost lépe poznat vzájemnou polohu jednotlivých objektů, tzv. objemově-prostorovou kompozici budovy.

Na obrázku 1.1<sup>1</sup> můžeme vidět a porovnat, jak se mění vnímání objektu v závislosti na stínu. Horní obrázek je jenom souhrn čar a nemá žádné



**Obrázek 1.1.**

<sup>1</sup> Obrázek 1.1 je převzat z [10] str. 6.

osvětlení, proto vypadá tak ploše. Obrázek uprostřed už má zvýrazněnou mez vlastních a vržených stínů, což mu přidává na názornosti a zdánlivě na objemu. Většinou, při zpracování rysů v deskriptivní geometrii, se zastavíme na této etapě. Poslední, dolní obrázek ukazuje už pokročilejší úroveň stínování, osvětlení je vytvořeno pomocí modelovacího softwaru. Tak by mohla vypadat práce, například, z architektonické grafiky.

Vybudování stínů, které v plné míře budou odpovídat skutečnosti, je dost náročný úkol, ale pomocí určitých pravidel a zjednodušení, které nám poskytuje deskriptivní geometrie je možné daný problém vyřešit.

## 1.2 Základní vlastnosti geometrického osvětlení.

Zdrojem světla může být tzv. vlastní bod<sup>2</sup>. V tomto případě se osvětlení nazývá *středovým* (centrálním). Jako příklad takového osvětlení může sloužit jakékoliv umělé světlo, např. baterka, lampa, lucerna nebo reflektor. Zdroj světla se nachází relativně blízko tělesa. Vzniká tedy svazek paprsků s počátkem v daném zdroji. Světelné paprsky ve středovém osvětlení jsou polopřímky vycházející ze středu osvětlení S (příklad středového osvětlení je znázorněn na obrázku 1.2).

Jestliže zdrojem světla je nevlastní bod čili směr, jde o *rovnoběžné osvětlení* (paralelní). Světelné paprsky v rovnoběžném osvětlení jsou orientované přímkami, které jsou navzájem rovnoběžné, přičemž jsou souhlasně orientované se směrem osvětlení (viz obr. 1.3). Příkladem takového osvětlení je přirozené sluneční světlo. V tomto případě máme slunce jako zdroj světla, které se od nás nachází tak daleko, že můžeme uvažovat jeho polohu v nekonečnu. Podobně jsou tyto pojmy zavedeny v učebnici (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998).

**Poznámka 1.1:** Nemá smysl zkoumat případ, že směr osvětlení je rovnoběžný s rovinou, do které osvětlujeme. Podobně neuvažujeme případ, že vlastní střed osvětlení leží v rovině, do které osvětlujeme. Dále vždy považujeme směr osvětlení za různoběžný s rovinou, do které osvětlujeme, a vlastní střed osvětlení za ležící vně roviny, do které osvětlujeme. ■

---

<sup>2</sup> Definici vlastního a nevlastního bodu čtenář může nalézt v libovolné učebnici z Deskriptivní geometrie například v (K. Drábek a kol, 1979).

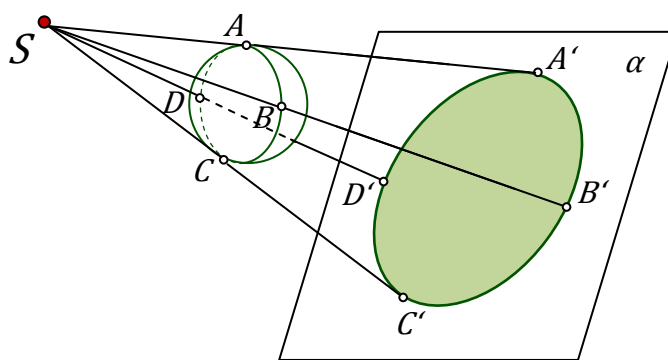


Zavedme dále základní pojmy geometrického osvětlení. Rozlišují se vlastní a vržené stíny. Máme-li v cestě světelných paprsků nějaké neprůhledné těleso (nebo plochu), pak je část tělesa (plochy) osvětlená a část je ve stínu. Část objektu, na kterou světelné paprsky dopadají, aniž by jim něco stálo v cestě, se nazývá *přímo osvětlená část*. Neosvětlená část osvětlovaného tělesa (plochy) je *vlastním stínem* tělesa (plochy). Uvědomíme si, že vlastní stín je stín přímo na povrchu tělesa. Hranici, která rozděluje osvětlené části a části ve stínu, nazýváme *mez vlastního stínu* (na obr. 1.2, 1.3 je to křivka procházející body  $ABCD$  na povrchu kulové plochy). Pak samozřejmě těleso (plocha) vrhá stín na jiná tělesa, roviny, nebo plochy, které se nacházejí dostatečně blízko. Tento stín nazýváme *vrženým stínem*. Vnější hranice vrženého stínu se nazývá *mez vrženého stínu* (na obr. 1.2, 1.3 je to křivka  $A'B'C'D'$  na rovině  $\alpha$ ). Podobně se tyto pojmy zavádějí v učebnici (K. Drábek a kol, 1979).

V naší práci se budeme zabývat výhradně osvětlováním těles do roviny. V tomto případě je osvětlení jednoznačně zadáno svým zdrojem (buď bodem, nebo směrem) a rovinou, do které osvětlujeme.

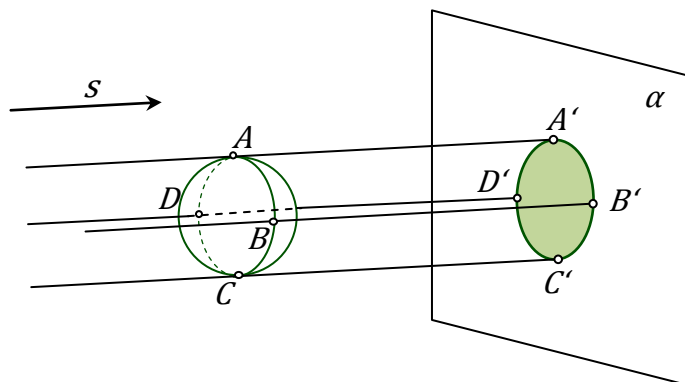
**Poznámka 1.2:** Měli bychom si uvědomit, že *mez stínu* (buď vlastního nebo vrženého) je čára (křivka). Vržený (vlastní) stín je část plochy. ■

Osvětleme například sféru umělým světlem (viz obr. 1.2), tj. relativně blízkým zdrojem do roviny kolmé ke spojnici středu sféry a středu osvětlení  $S$ . Mez vlastního stínu je obecná kružnice, na obrázku 1.2 kružnice procházející body  $ABCD$ . Velikost kružnice, která je mezi vrženého stínu čili kružnice procházející body  $A'B'C'D'$ , je větší než velikost kružnice, která je mezi vlastního stínu. Kromě toho zvětšíme-li vzdálenost roviny od sféry, zvětší se i velikost plochy vrženého stínu v rovině  $\alpha$ .



**Obrázek 1.2.** Středové osvětlení kulové plochy na rovinu.

Osvětíme-li tutéž sféru ale přirozeným světlem (viz obr. 1.3), potom dostaneme jiný výsledek. Na tělese vznikají dvě stejně velké části - osvětlená a neosvětlená. Mez vlastního stínu bude tvořit hlavní kružnice kulové plochy. Vrženým stínem na rovinu, kolmou na směr osvětlení, bude kruh se stejným poloměrem, jako má původní sféra. Zvětšení vzdálenosti roviny  $\alpha$  od sféry nemá vliv na velikost (nebo tvar) výsledných stínů.



**Obrázek 1.3.** Rovnoběžné osvětlení kulové plochy na rovinu kolmou ke směru osvětlení.

**Poznámka 1.3:** Speciálním případem rovnoběžného osvětlení je *technické osvětlení*. Tento druh osvětlení se často používá v technické praxi a architektuře. V technickém osvětlení jsou světelné paprsky rovnoběžné s tělesovou úhlopříčkou krychle. Krychle je umístěná tak, že jeden její vrchol leží v počátku souřadného systému a tři její hrany (vycházející z tohoto vrcholu) leží na osách  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Pravoúhlý průmět dané úhlopříčky (a zároveň světelného paprsku), na libovolnou ze tří rovin  $((x,y)$ ,  $(y,z)$ ,  $(x,z)$ ), svírá s příslušnou souřadnicovou osou úhel  $45^\circ$ . Důsledkem je značné zjednodušení sestavení stínů, v porovnání s libovolným obecným rovnoběžným osvětlením. Technické osvětlení dává možnost zobrazování osvětlení jenom do jedné průmětny (zpravidla do nárýsný). Technické osvětlení je podrobně popsáno v učebnici (V. Korotkij, 2010). ■

**Poznámka 1.4:** Konstrukce vrženého stínu nějakého útvaru na rovinu při rovnoběžném osvětlení je v podstatě konstrukcí rovnoběžného průmětu tohoto útvaru. V případě středového osvětlení jde o konstrukci středového průmětu. ■

Při sestavování stínů nám značně pomůže následující věta (o mezích vlastního stínu a vrženého stínu), která vyplývá z toho, že světelné paprsky se dotýkají tělesa v mezi vlastního stínu.

**Věta 1:** *Mez vrženého stínu tělesa je vrženým stínem meze vlastního stínu.*<sup>3</sup> ■

Kromě vrženého stínu a vlastního stínu budeme také uvažovat *stín do dutiny* tělesa. Stín do dutiny existuje v tom případě, když těleso je uvnitř “prázdné“ čili má otvor do svého vnitřku, potom můžeme se dívat dovnitř tělesa a dostanou se tedy dovnitř i světelné paprsky. Příklady a obrázky dutých těles nás potkají v 3. kapitole. Více o osvětlení dutých těles čtenář může přečíst v (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998).

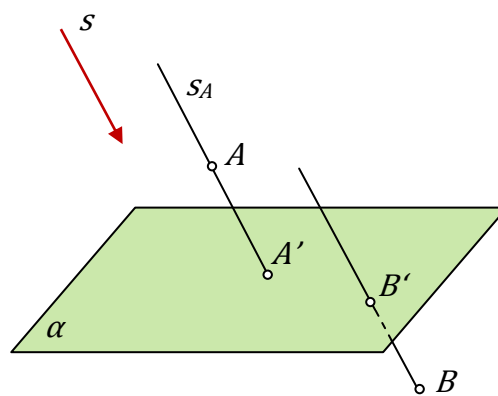
**Poznámka 1.5:** Tvar složitějšího skutečného objektu se obvykle skládá z různě orientovaných povrchů, které svírají různé úhly se světelnými paprsky, proto svítivost objektu není rovnoměrná. Například části kolmé na paprsky se osvětlují plně, na jiné se svítí slaběji, na některé se světlo vůbec nedostává, což záleží na poloze. Pro malíře má význam míra svítivosti, která záleží na síle zdroje světla a vzdálenosti od něj. Náplní této práce jsou pouze geometrické, ne fyzikální vlastnosti osvětlení, ale pro zajímavost je dobré vědět, že vržený stín je hustší než vlastní stín, proto je třeba při libovolném zobrazení vlastní stín šrafovat slaběji než stín vržený. ■

### 1.3 Osvětlení bodů.

Stín bodu nalezneme jako průsečík světelného paprsku s průmětnou (rovinou), do které osvětlujeme. Čili úkol se převádí na nalezení průsečíku přímky s rovinou, což je triviální úloha.

Podíváme se na obrázky 1.4, 1.5. Na obr. 1.4 je znázorněn případ rovnoběžného osvětlení, na obr. 1.5 středového.

Nechť je dána vlastní rovina  $\alpha$  a  $s$  - směr světelných paprsků, jež není na rovinu  $\alpha$  kolmý<sup>4</sup>. Mějme vlastní bod  $A$  (obr. 1.4) ležící ve stejném poloprostoru, určeném rovinou  $\alpha$ , jako zdroj světla  $s$ . Dále mějme bod  $B$ , který se nachází v druhém polopro-



**Obrázek 1.4.** Rovnoběžné osvětlení.

<sup>3</sup> Věta je převzata z [4].

<sup>4</sup> Nebude-li řečeno jinak, budeme vždy považovat směr osvětlení za obecný čili nezkoumáme speciální případ, kdy směr je kolmý na rovinu, do které osvětlujeme.

storu. Bodem  $A$  vedeme světelný paprsek  $s_A$  (víme, že světelné paprsky v rovnoběžném osvětlení jsou navzájem rovnoběžné). Průsečík světelného paprsku  $s_A$  s rovinou  $\alpha$  označíme  $A'$ . Zopakujeme stejný postup pro nalezení  $B'$ .

Bod  $A'$  je vrženým stínem bodu  $A$  na rovinu  $\alpha$ .

Bod  $B'$  se nazývá *ideální vržený stín* bodu  $B$  na rovinu.

Pro porovnání se podíváme na osvětlení bodů ve středovém osvětlení.

Postupujeme podobně, jenom paprsek  $s_A$  v daném případě prochází body  $S$  a  $A$  (viz obr. 1.5). Světelné paprsky už nebudou navzájem rovnoběžné, budou tvořit svazek s počátkem v bodě  $S$ .

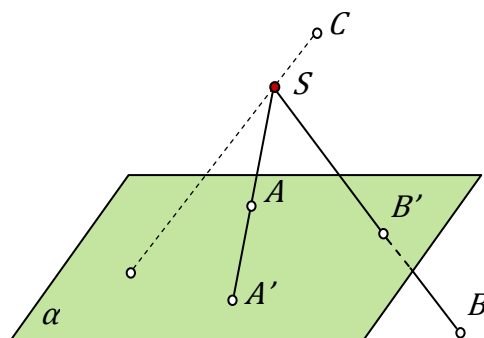
Bod  $C$  z obr. 1.5 (ležící za zdrojem světla  $S$ ), nemá vržený stín ani ideální vržený stín, protože se nachází za zdrojem světla.

**Poznámka 1.7:** Při středovém i rovnoběžném osvětlení je vrženým stínem bodu  $A$  na rovinu stopník příslušného světelného paprsku. ■

Seznámili jsme se se dvěma druhy osvětlení: středovým a rovnoběžným. V této práci se ale dále budeme zabývat výhradně rovnoběžným osvětlením.

Jestliže se podíváme na osvětlení bodu v Mongeově promítání, tak stín bodu může dopadnout do nárýsny<sup>5</sup> nebo do půdorysny, což záleží na poloze bodu vzhledem k rovinám a směru osvětlení.

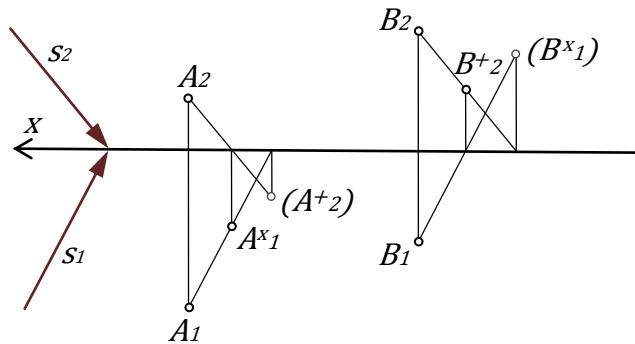
Nechť máme směr osvětlení  $s$ , který je dán svým prvním a druhým průmětem  $s_1$  a  $s_2$ , body  $A, B$  (viz obr. 1.6). Chceme najít stíny bodů  $A, B$  do nárýsny a půdorysny. Pro nalezení stínu bodu v Mongeově promítání, musíme vést světelný paprsek bodem  $A$  čili v půdorysně bodem  $A_1$  vedeme první průmět paprsku rovnoběžný se směrem  $s_1$ , podobně rovnoběžně s  $s_2$  vedeme druhý průmět paprsku bodem  $A_2$ .



**Obrázek 1.5.** Středové osvětlení.

<sup>5</sup> Vysvětlení pojmů nárýsna a půdorysna čtenář může nalézt v (A. Urban, 1977) nebo v jiné učebnici deskriptivní geometrie.

Na obrázku 1.6 vidíme, že se světelný paprsek bodu  $A$  setkává nejprve s půdorysnou  $\pi$ . Proto bod  $A$  vrhá stín do půdorysny. Stínem bodu  $A$  do půdorysny je bod  $A^x$ , jeho prvním průmětem je bod  $A^{x_1}$  na obrázku 1.6. Bod  $B$



**Obrázek 1.6.** Osvětlení bodů v Mongeově promítání.

naopak, nachází se blíže roviny  $\eta$ , z toho plyne, že bod  $B$  vrhá stín na nárysnu. Tudiž světelný paprsek se potká nejprve s nárysnu  $\eta$ . Stínem bodu  $B$  do nárysny je bod  $B^+$ , jeho druhým průmětem je bod  $B^{+2}$  na obrázku 1.6. Bod  $A^+$  je stínem bodu  $A$  na druhou průmětnu čili na nárysnu, kam ve skutečnosti stín nedopadá (protože je to záporná polorovina), proto je na obrázku 1.6 druhý průmět  $A^{+2}$  bodu uveden v závorkách. Podobně je to s bodem  $B^x$  a jeho prvním průmětem  $B^{x_1}$ .

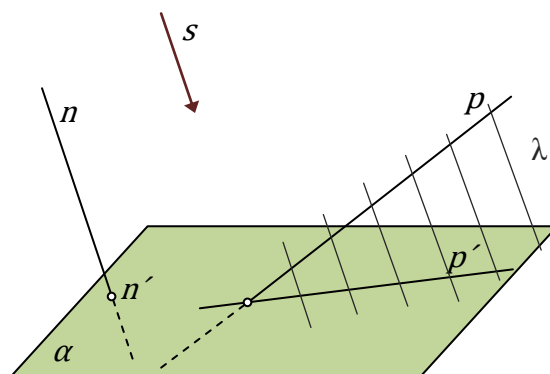
## 1.4 Osvětlení přímek.

Dále se již zabýváme pouze rovnoběžným osvětlením.

Vržený stín přímky se skládá z vržených stínů všech bodů této přímky. Tudiž budeme-li chtít sestavit stín přímky, popřípadě úsečky na nějakou rovinu – průmětnu, musíme sestavit stín dvou bodů, popř. krajních bodů (způsobem vysvětleným výše). Stínem přímky bude přímka procházející stíny těchto bodů. Výjimkou je případ, kdy je přímka rovnoběžná se světelnými paprsky, pak vrženým stínem přímky je bod, který je průsečíkem této přímky s průmětnou, do které osvětlujeme.

Nechť máme směr  $s$  a přímku  $p$ , která není se světelnými paprsky rovnoběžná. Osvětlíme přímku  $p$  do dané roviny  $\alpha$  (obr. 1.7).

Světelné paprsky jednotlivých bodů přímky  $p$  vytváří tzv. světelnou rovinu  $\lambda$  dané přímky. Rovina  $\lambda$  je určena dvěma přímkami – danou  $p$  a libovolnou rovnoběžkou se směrem  $s$ . Průsečnici roviny  $\lambda$  s rovi-



**Obrázek 1.7.** Rovnoběžné osvětlení přímek do roviny  $\alpha$ .

nou  $\alpha$  obvykle značíme  $p'$ . Přímka  $p'$  je vrženým stínem přímky  $p$  na rovinu  $\alpha$ .

Speciální případ, kdy je přímka rovnoběžná s daným směrem osvětlení, je ukázán přímkou  $n$  v témže obrázku. Bod  $n'$  je vrženým stínem přímky  $n$  na rovinu  $\alpha$ .

**Poznámka 1.8:** Lze usoudit, že stín přímky lze najít jako průnik světelné roviny s rovinou, na kterou osvětlujeme. ■

Jiné zajímavé vlastnosti rovnoběžného osvětlení přímek ve speciální poloze:

- Vržený stín přímky, popř. úsečky rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, je přímka, popř. úsečka stejného směru jako ta, co stín vrhá. Navíc v případě úsečky, při rovnoběžném osvětlení vržená úsečka má stejnou délku.
- Vrhá-li přímka stín na rovnoběžné roviny, pak vržené stíny jsou navzájem rovnoběžné.
- Protíná-li přímka rovinu stínu v nějakém bodě, pak vržený stín přímky na stejnou rovinu prochází tímto bodem.
- Stín vržený vertikální (kolmou) přímkou na horizontální rovinu má směr rovnoběžný s  $s_1$  ( $s$  pravouhlým průmětem směru světelného paprsku do uvažované roviny).

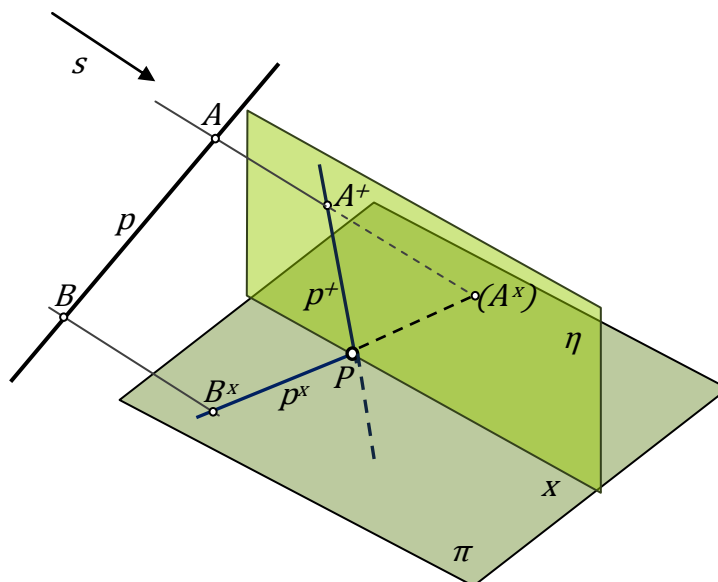
Občas potkáme situaci, ve které přímka bude vrhat stín na více rovin.

Ukážeme postup pro nalezení stínu přímky na dvě neprůhledné roviny. Zde se bude jednat speciálně o sestrojení stínu přímky na nárysnu -  $\eta$  a půdorysnu -  $\pi$ , podobně by se ale postupovalo v případě obecných rovin.

Nechť máme přímku  $p$  v obecné poloze vůči průmětnám. Osvětlíme přímku na dvojici rovin v daném směru osvětlení  $s$  (obr. 1.8).

- 1) Sestrojíme stín na jednu z rovin, předpokládejme, že druhá neexistuje (sestrojíme stíny dvou libovolných bodů přímky).

Například sestrojíme nejprve stín na půdorysnu  $\pi$ . Sestrojíme stíny bodů  $A$  a  $B$  na půdorysnu, získáme tak body  $B^x$ ,  $A^x$ , jejich spojením dostáváme stín přímky  $p$  do půdorysny  $\pi$  čili přímku  $p^x$  na obrázku 1.8.



**Obrázek 1.8.** Rovnoběžné osvětlení přímky na dvojici kolmých rovin, nárysnu -  $\eta$  a půdorysnu -  $\pi$ .

- 2) V případě, že sestrojený stín protne průsečnici rovin (pro nárysnu a půdorysnu to bude osa  $x$ ), stín se zalomí do druhé roviny, v našem případě do náryсны  $\eta$ . Označme průsečík  $p^x$  s osou  $x$  -  $P$ .
- 3) Podobně sestrojíme stín přímky na rovinu  $\eta$ .

**Poznámka 1.9:** Stíny se musejí protnout na ose v nalezeném průsečíku  $P$ , proto stačí na druhou rovinu sestrojít jenom stín jednoho bodu. Spojíme-li stín nalezeného bodu s bodem  $P$ , dostaneme stín přímky na druhou rovinu. ■

Musíme si uvědomit, že průmětny obvykle považujeme za neprůhledné, proto záporná část půdorysny  $\pi$  čili ta část, která je za nárysnou, není vidět. Podobně není vidět záporná část náryсны, která je pod půdorysnou. To plyne z toho, že ve skutečnosti stín nemůže dopadnout na neviditelné části.

- 4) Rozmyslíme si, jak ve skutečnosti vypadá stín a kam všude může dopadnout.

Lze usoudit, že stínem přímky vrženým na dvě (nebo i více) různoběžných rovin je lomená čára, která se láme v bodě, ležícím na průsečnici daných rovin. Názorně to vidíme na obr. 1.8 – tučná modrá lomená čára sestavající z částí  $p^x$  a částí  $p^+$ .

**Poznámka 1.10:** Jak už víme z předchozího oddílu, osvětlujeme-li bod na několik rovin, padne stín na rovinu, se kterou se světelný paprsek potká nejprve. Na obrázku je dobře vidět, že světelný paprsek bodu  $A$  se setkává nejprve s nárysnou  $\eta$ , až pak s půdorysnou. Proto stín tohoto bodu na půdorysnu ve skutečnosti není reálný. Obdobně to platí pro bod  $B$ , který vrhá stín na půdorysnu. ■

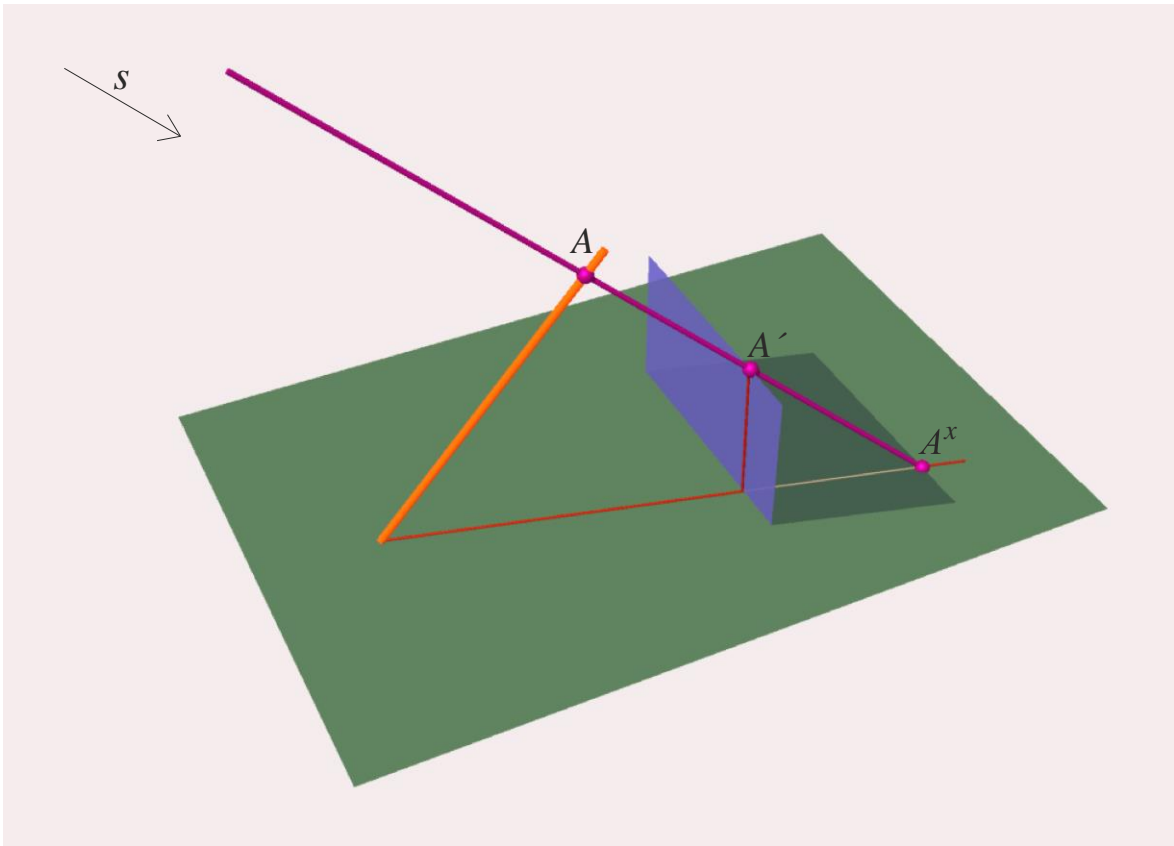
## 1.5 Metoda zpětných paprsků.

Metoda zpětných paprsků se používá hlavně v případech, kdy chceme určit vržený stín jednoho objektu na druhý. Také se ale používá při sestrojování stínu do dutiny.

Nechť máme úsečku  $p$ , a chceme sestrojit její stín v rovnoběžném promítání na (libovolně) danou rovinu, s ohledem na neprůhlednou desku, která stojí na rovině a je na ní kolmá. Je dán směr osvětlení  $s$  (viz obr 1.9).

Nejprve sestrojíme stín desky na rovinu. Potom sestrojíme stín úsečky na rovinu, předpokládejme, že desku neuvažujeme. Vidíme, že se stíny protínají, část stínu úsečky je překryta stínem desky, z čehož zjevně můžeme usoudit, že stín této části dopadne na desku. Vržený stín úsečky protíná vržený stín desky ve dvou bodech. V prvním bodě, ve kterém úsečka vchází do stínu desky, se stín zalomí do roviny desky.





**Obrázek 1.9.** Metoda zpětných paprsků.

Druhý průsečík vrženého stínu úsečky  $s$  mezi vrženého stínu desky neboli bod  $A^x$ , nám pomůže dourčit stín na desku. Vedeme bodem  $A^x$  zpětný paprsek, který protne desku v bodě  $A'$  ( $A'$  bude koncovým bodem stínu na desku), povedeme-li paprsek dál, nalezneme vzor bodu  $A^x$  na úsečce, která tento stín vrhá čili bod  $A$ .

Tudíž podstatou metody zpětných paprsků je určení průsečíků mezi vržených stínů objektů a následné „vrácení“ těchto bodů zpětnými paprsky na daná tělesa nebo plochy. Příklady na použití metody světelných paprsků může čtenář nalézt v (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998).

## 2 Osvětlení jednotlivých těles.

Před tím než přejdeme k osvětlení složitějších těles, uvědomíme si, že rovinný útvar (nebo také průmět tělesa) se skládá z úseček, křivek, bodů, které pak v souhrnu mohou poskytnout rozmanité geometrické útvary.

Jak už víme, k sestrojení stínu úsečky stačí sestrojiti stíny krajních bodů. Pro křivky používáme několik průběžných bodů, které osvětlujeme a pak spojením jejich stínů dostáváme přibližný stín křivky. Samozřejmě spolu se zvětšením počtu bodů se zvětšuje přesnost sestrojeného stínu křivky.

Z toho plyne, že vržený stín libovolného útvaru můžeme sestrojiti jako množinu vržených stínů bodů a křivek, ze kterých se tento útvar skládá.

Nyní se podíváme na metody sestrojování stínů dobře známých a důležitých geometrických těles.

V příkladech budeme někde uvažovat podstavu tělesa jako křivku, vždy bude jasné z kontextu. Jsme si ale vědomi toho, že podstava je jinak část roviny.

### 2.1 Osvětlení hranatých těles.

Hranaté těleso se skládá z vrcholů a hran, které jsou spojnicemi dvojic vrcholů. Z toho plyne, že vržený stín libovolného hranatého tělesa můžeme sestrojiti jako množinu vržených stínů bodů a hran (úseček).

Tudíž, budeme-li chtít sestrojiti vržený stín nějakého hranatého tělesa, nejprve sestrojíme stíny všech vrcholů, potom spojením příslušných stínů vrcholů dostaneme i vržený stín hran. Nakonec si musíme rozmyslet, jaké hrany a vrcholy tvoří mez vrženého stínu, což už bude triviální, protože mez se skládá z úseček, které tvoří hranici vrženého stínu, a tím už máme úkol splněný.

Pro určení vlastního stínu stačí použít větu 1, uvedenou v kapitole 2.1. Základní vlastnosti osvětlení, která říká, že mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu.

Na konkrétní příklady osvětlení hranatých těles v jednotlivých promítáních se podíváme v další kapitole.

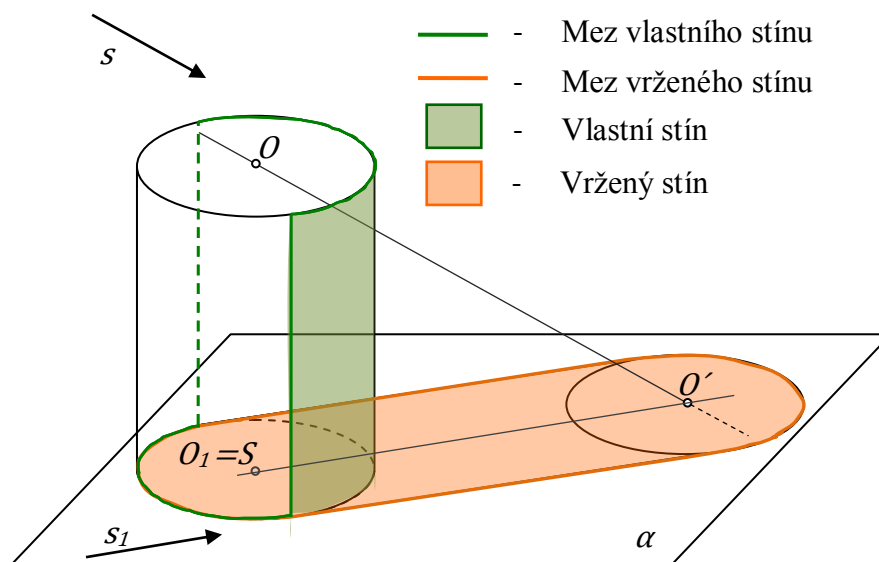
## 2.2 Osvětlení rotačního válce.

Nejprve se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního válce a potom, v další kapitole, přejdeme ke konkrétním příkladům v jednotlivých promítáních.

Nechť je dán přímý rotační válec s podstavou v rovině  $\alpha$ . Chceme osvětlit válec na danou rovinu  $\alpha$  ve směru osvětlení  $s$ .

Sledujme obrázek 2.2. Nejdříve najdeme mez vlastního stínu. Podstavná kružnice válce určuje válcovou plochu. Částí meze vlastního stínu budou úsečky, podél kterých se světelné roviny dotýkají příslušné válcové plochy. Z toho vyplývá první krok: vedeme dvě světelné roviny neboli roviny rovnoběžné se směrem  $s_1$  (pravoúhlým průmětem paprsku  $s$  do roviny  $\alpha$ ), které se dotýkají válcové plochy. Rovina určena dotykovými površkami<sup>6</sup> určí dvě poloviny kružnice příslušné (horní nebo dolní) podstavy. Potom získané dotykové površky, polovina dolní kružnice a polovina horní kružnice podstav tvoří mez vlastního stínu. Ze směru osvětlení poznáme, které z polovin budou tuto mez tvořit.

Na obrázku 2.2 je situace osvětlení rotačního válce znázorněna v axonometrii. Mez vlastního stínu je zobrazena zeleně. Na obrázku také můžeme vidět, že polovina pláště válce je zástíněna. Tato polovina je vlastním stínem válce.



**Obrázek 2.2.** Rovnoběžné osvětlení rotačního kolmého válce do roviny  $\alpha$ .

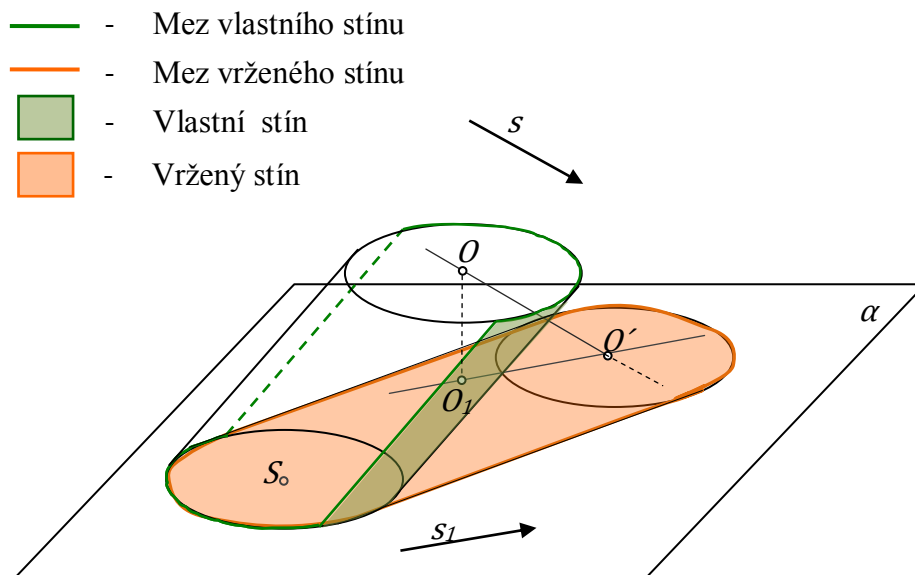
<sup>6</sup> Povrchové přímky zkráceně budeme nazývat površkami.

Nyní, když už máme mez vlastního stínu, přejdeme k sestrojení meze vrženého stínu.

Obecně platí: osvětlujeme-li bod do stejné roviny, ve které se nachází, pak stín bodu je totožný s původním bodem.

Dolní podstava válce leží v rovině  $\alpha$ , proto stín této podstavy splývá s původní podstavou, říkáme též, že dolní podstava „zůstává na místě“. Stín rovinného útvaru do rovnoběžné roviny zachovává velikost a tvar, přičemž horní a dolní podstavy jsou stejné kruhy. Proto se konstrukce vrženého stínu horní podstavy značně zjednoduší. Stínem horní podstavy je kruh, který má stejný poloměr jako má dolní i horní podstava a který je rovnoběžně posunutý ve směru osvětlení  $s$  do roviny  $\alpha$ . Pro sestrojení meze vrženého stínu sestrojíme stín středu horní podstavy  $O$ , potom zbývá sestrojit kružnici, stejnou jako podstavě (což v průmětu bude elipsa). Část sestrojeného průmětu kružnice v rovině  $\alpha$ , polovina dolní podstavě kružnice a stíny površek (které tvoří mez vlastního stínu) určují mez vrženého stínu. Stíny površek budou tečny ke kružnicím (v průmětu k elipsám), rovnoběžné se směrem  $s_1$ . Na obrázku je mez vrženého stínu znázorněna oranžovou čarou.

V případě kosého válce se řídíme stejným postupem. Musíme si ale uvědomit, že v případě kolmého válce střed dolní podstavy byl zároveň pravouhlým průmětem středu



**Obrázek 2.3.** Rovnoběžné osvětlení rotačního kosého válce do roviny  $\alpha$ .

horní podstavy, bod  $S=O_1$  na obrázku 2.2. Jednalo se tedy o speciální případ, ve kterém byla úsečka  $SO'$  rovnoběžná s pravoúhlým průmětem  $s_1$  směru osvětlení  $s$  do roviny  $\alpha$ . Obecně to však neplatí.

V případě kosého válce musíme najít stín středu  $O$  horní podstavy standardním způsobem. Bodem  $O$  vedeme světelný paprsek (je rovnoběžný se směrem  $s$ ). Bodem  $O_1$  (viz obrázek 2.3) vedeme přímkou rovnoběžnou se směrem  $s_1$ . Příмка protne světelný paprsek v bodě  $O'$ , tento bod je vrženým stínem bodu  $O$ .

Dále postupujeme podobně jako v případě kolmého válce. Sestrojíme stejnou kružnici (v průmětu elipsu) jako podstavně ale se středem v bodě  $O'$  a vedeme společné tečny ke dvěma kružnicím (dolní podstavně a kružnici, která je mezi vrženého stínu horní podstavy), rovnoběžné se směrem  $OS$ . V případě kosého válce tyto tečny nejsou rovnoběžné se směrem  $s_1$ . Tečny společně s polovinami elips (které jsou průměty příslušných kružnic) tvoří mez vrženého stínu. Na obrázku 2.3 je vržený stín do roviny  $\alpha$  znázorněn oranžovou barvou.

### 2.3 Osvětlení rotačního kužele.

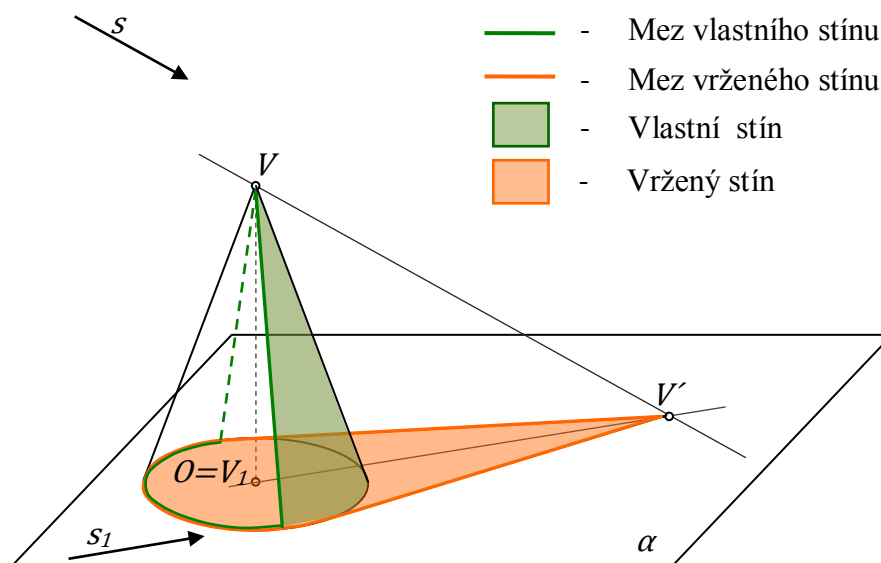
Podobně jako u válce, nejprve se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního kužele.

Nechť máme kolmý rotační kužel, stojící na rovině  $\alpha$ . Chceme osvětlit kužel na rovinu  $\alpha$  ve směru osvětlení  $s$ .

Sledujme obrázek 2.4. Podobně jako v případě válce, podstava „zůstává na místě“. Dále potřebujeme světelné roviny čili roviny rovnoběžné se směrem osvětlení, které se dotýkají kužele a procházejí jeho vrcholem.

Nejprve sestrojíme vržený stín vrcholu kužele  $V$  do roviny  $\alpha$ , dostaneme tak bod  $V'$ . Vedeme tečny z vrženého stínu vrcholu (čili z bodu  $V'$ ) k podstavě. Tečny spolu s částí podstavné kružnice tvoří mez vrženého stínu. Spojíme body dotyku s vrcholem  $V$ , dostaneme površky, které jsou součástí meze stínu vlastního. Potom mez vlastního stínu je tvořena dvěma površkami a částí podstavné kružnice.

Na obrázku 2.4 je situace osvětlení rotačního kužele znázorněna v axonometrii. Vlastní stín je znázorněn zelenou barvou, vržený stín do roviny  $\alpha$  – oranžovou.



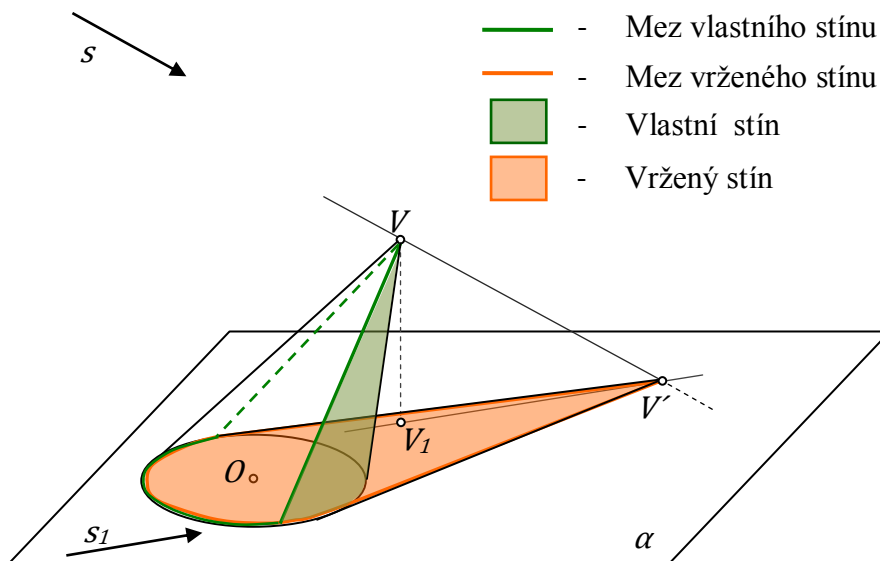
**Obrázek 2.4.** Rovnoběžné osvětlení kužele do roviny  $\alpha$ .

**Poznámka 2.1:** Na rozdíl od válce, polovina pláště kužele bude zastíněna jen ve speciálním případě, když směr osvětlení bude rovnoběžný s rovinou, do které osvětlujeme, tento případ jsme ale vyloučili ještě na začátku práce. Takže lze usoudit, že v obecném případě je zastíněná neurčitá část kužele. ■

Umístíme-li rotační kužel tak, že bude stát obráceně čili na svém vrcholu, budeme muset v mysli změnit směr světelných paprsků na opačný (čili uvažujeme opačně orientovaný směr) a sestrojít domnělý stín vrcholu na rovinu podstavy. Potom ze získaného bodu vedeme tečny k podstavě kužele. Tyto tečny určují pomyslný vržený stín na rovinu podstavy. Body dotyku nám určí skutečnou mez vlastního stínu.

**Poznámka 2.2:** Speciální případy vznikají v technickém osvětlení, pro kužele, pro které platí, že úhel, který svírají povrchové přímky s rovinou podstavy, je roven  $45^\circ$  nebo  $35^\circ$ . Pro ně se konstrukce stínu usnadní. Vlastní stín kužele s úhlem rovným  $45^\circ$  zabírá jednu čtvrtinu pláště kuželové plochy, pro obrácený kužel – tři čtvrtiny. Pro kužele s úhlem rovným  $35^\circ$  ( $\approx 35,3^\circ$  tento úhel je stejný jako úhel naklonění světelných paprsků s plochou zeměkoule) platí, že přímý kužel je celý osvětlen, obrácený je celý ve stínu. Tato teorie je podrobněji popsána v kapitole 2.3 učebnice (V. Korotkij, 2010). ■

Podobně jako v případě válce se musíme podívat na osvětlení kosého kruhového kužele. Pro nalezení vrženého stínu musíme správně sestrojít stín vrcholu čili bodu  $V$ . Použijeme pravoúhlý průmět bodu  $V$  do roviny  $\alpha$ , bod  $V_1$  (viz obr. 2.5), který v obecném případě nesplývá se středem podstavy  $O$ . Dostaneme tak vržený stín bodu  $V$  do roviny  $\alpha$  čili bod  $V'$ . Potom vlastní stín sestrojíme stejně jako u kolmého kužele. Na obrázku 2.5 můžeme vidět mez vlastního stínu, znázorněnou zeleně, a mez vrženého stínu – oranžově.



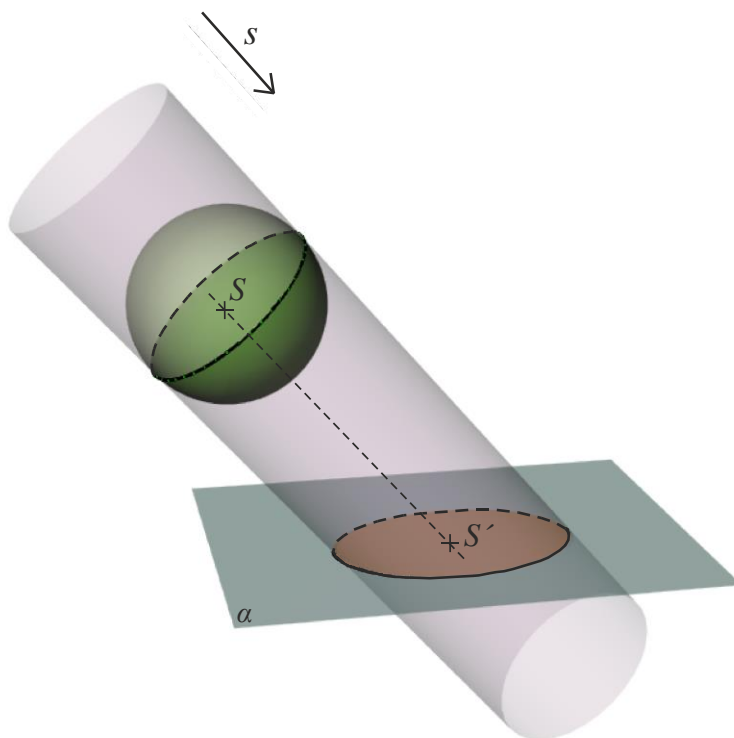
**Obrázek 2.5.** Rovnoběžné osvětlení kosého kruhového kužele do roviny  $\alpha$ .

## 2.4 Osvětlení koule.

Dalším důležitým tělesem, na které se podíváme, je koule. Při osvětlení koule je zřejmě část ve stínu a část je osvětlená. Množina světelných paprsků padajících na kouli vytváří světelnou válcovou plochu. Vzniká tak rotační válcová plocha, do které je vepsána uvažovaná koule a površky válcové plochy jsou rovnoběžné se směrem osvětlení (uvažovaná válcová plocha je znázorněna na obrázku 2.6). Dotyková kružnice válcové plochy s koulí je mezí vlastního stínu na kouli.

Tedy mez vlastního stínu na kouli je hlavní kružnice, která je průnikem kulové plochy s rovinou kolmou ke směru osvětlení a procházející středem koule. Průmětem mezí vlastního stínu v rovnoběžném promítání bude obecně elipsa. Celá situace je znázorněna v axonometrii na obrázku 2.6.

Mez vrženého stínu najdeme jako průnik válcové plochy s rovinou, do které osvětlujeme čili s rovinou  $\alpha$  na obrázku 2.6. Na obrázku vržený stín do roviny  $\alpha$  je znázorněn oranžově.



**Obrázek 2.6.** Rovnoběžné osvětlení koule do roviny  $\alpha$ .

**Poznámka 2.3:** Ve středovém osvětlení místo válcové plochy uvažujeme kuželovou plochu s vrcholem ve zdroji osvětlení. ■

Pro osvětlení kulové plochy budeme také používat Quételetovu-Dandelinovu větu:

**Věta (Quételetova-Dandelinova pro kosoúhlý průmět kulové plochy):**

*Hranici průmětu kulové plochy v kosoúhlém promítání je elipsa, pro kterou platí:*

- 1) středem elipsy je kosoúhlý průmět středu kulové plochy;
- 2) na vedlejší ose se poloměr nezkrusuje;
- 3) ohniska jsou průměty krajních bodů průměru (kulové plochy) kolmého k průmětně. ■



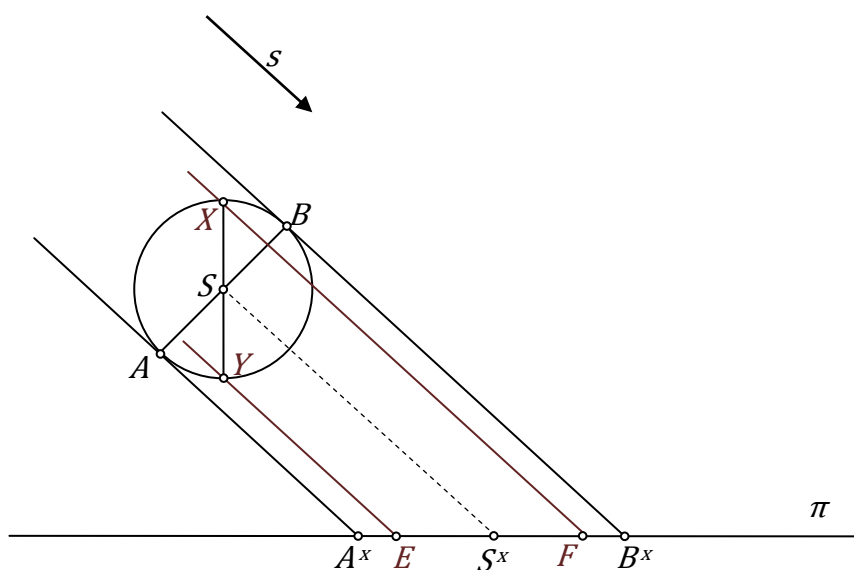
Jinou formulaci Quételetovy-Dandelinovy věty a její důkaz čtenář může nalézt v kapitole 8.2 učebnice (A. Urban, 1977).

Jak už víme z poznámky 1.4, konstrukce vrženého stínu libovolného útvaru je v podstatě konstrukcí průmětu tohoto útvaru, proto tuto větu můžeme použít k sestrojení vrženého stínu. Ukážeme použití této věty na obecném příkladu.

Nechť máme kulovou plochu se středem v bodě  $S$  a směr  $s$ . Sestrojíme vržený stín kulové plochy ve směru  $s$  do půdorysny  $\pi$ . (viz obr. 2.7).

Mezi vlastního stínu kulové plochy bude hlavní kružnice ležící v rovině kolmé ke směru osvětlení. Mezi vrženého stínu kulové plochy je elipsa, která je průnikem světelné válcové plochy s půdorysnou  $\pi$ .

Hlavní osu elipsy najdeme pomocí průměru  $AB$  kulové plochy, který je kolmý na směr  $s$ , na obrázku 2.7 body  $A, B$  jsou části obrysu kulové plochy. Vedeme světelné paprsky body  $A$  a  $B$ . Paprsky protínají průmětnu, do které osvětlujeme, v bodech  $A^x$  a  $B^x$ , které jsou vrženými stíny bodů  $A$  a  $B$ .  $A^x B^x$  je hlavní osa elipsy vrženého stínu. Osvětlení je rovnoběžné a z toho plyne, že stín středu  $S$  dopadne na střed úsečky  $A^x B^x$ , o čemž se můžeme přesvědčit tak, že povedeme bodem  $S$  světelný paprsek.



**Obrázek 2.7.** Quételetova-Dandelinova věta pro osvětlení koule.

$XY$  je průměrem (kulové plochy) kolmým k průmětně. Z Quételetovy-Dandelinovy věty víme, že stíny bodů  $X$  a  $Y$  budou ohnisky elipsy vrženého stínu. Stíny bodů  $X$  a  $Y$  se-

strojíme stejně jako u předchozích bodů, dostaneme tak ohniska  $E$  a  $F$ . Nyní je elipsa vrženého stínu jednoznačně určena svou hlavní osou a ohnisky.

V další kapitole procvičíme princip osvětlení koule na konkrétním příkladu.

### 3 Příklady na osvětlení v jednotlivých promítáních.

V následující kapitole se podíváme na řešení rovnoběžného osvětlení elementárních těles v jednotlivých rovnoběžných promítáních. Navrhujeme několik zadání a přikládáme též řešení příkladů.

#### 3.1 Mongeovo promítání.

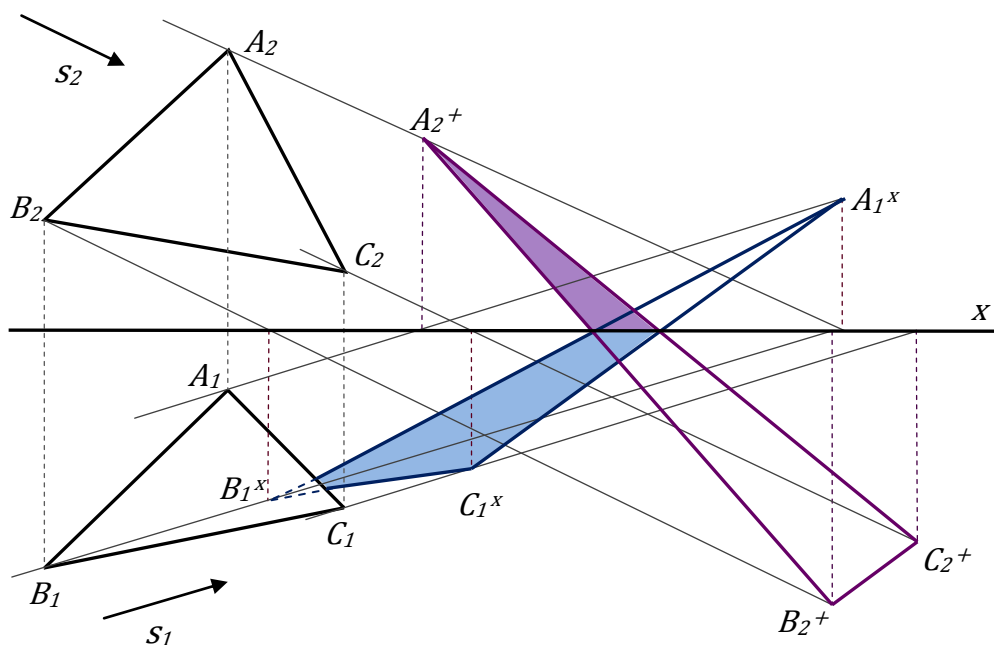
Nyní se budeme věnovat konkrétním příkladům a rozebereme rovněž jejich řešení, čímž upevníme své nové znalosti.

**Úloha 1:** V Mongeově promítání je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  (nachází se v obecné poloze viz obr. 3.1) a směr osvětlení  $s$ . Sestrojte vržený stín daného trojúhelníka na nárýsnu a půdorysnu.

**Řešení** (obr. 3.1):

- 1) Každým vrcholem trojúhelníka  $A, B, C$  vedeme světelné paprsky.

Průměty paprsků v půdorysně jsou rovnoběžné přímky se směrem  $s_1$ , v nárýsně rovnoběžné se směrem  $s_2$ .



**Obrázek 3.1.** Rovnoběžné osvětlení trojúhelníka v Mongeově promítání na půdorysnu a nárýsnu.

Jak už víme z teoretického úvodu, za vržený stín každého bodu považujeme průsečík světelného paprsku s průmětnou. Víme, že průmětem průsečíku přímky s průmětnou je příslušný stopník – nárysný nebo půdorysný.

- 2) Sestrojíme nárysné a půdorysné stopníky každého paprsku.
- 3) Spojením půdorysných stopníků dostáváme mez vrženého stínu trojúhelníka  $ABC$  na půdorysnu čili trojúhelník  $A^x B^x C^x$  na obrázku 3.1, spojením nárysných - na nárysnu  $A^+ B^+ C^+$  na obrázku 3.1. Na obrázku je modrou barvou znázorněn stín trojúhelníka na půdorysnu, fialovou – stín na nárysnu.

Zpravidla ale budeme považovat průmětny za neprůhledné (neprůsvitné), proto záporná část půdorysny *za* nárysnou není vidět a podobně není vidět záporná část náryсны *pod* půdorysnou. Z toho plyne, že stín se zalomí z první průmětny na druhou. Pro názornost výsledný vržený stín na nárysnu je zvýrazněn fialovou barvou, na půdorysnu modře.

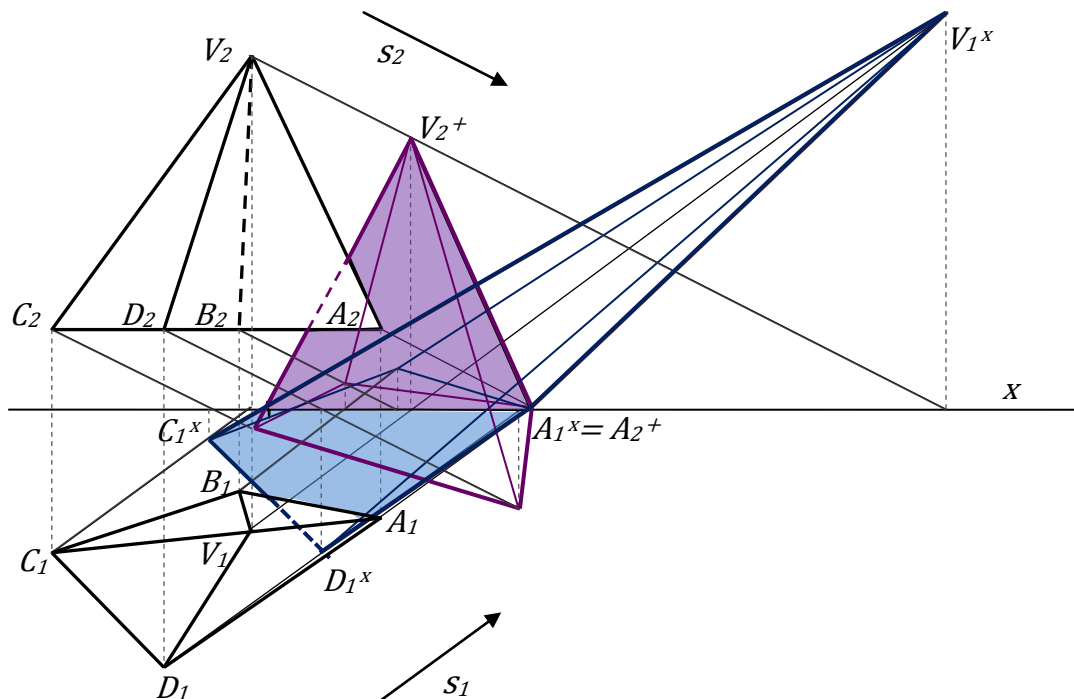
**Poznámka 3.1:** Jako kontrola nám může posloužit pomůcka, že stíny do náryсны a půdoryсны se vždy protínají na ose  $x$ . ■

**Úloha 2.** Na obrázku 3.2 je dán jehlan  $ABCDV$  v Mongeově promítání a směr osvětlení  $s$ . Sestrojte vržený stín jehlanu na dvojici rovin – půdorysnu a nárysnu.

**Řešení** (obr. 3.2): Postupujeme podobně, jako v úloze 1.

- 1) Každým vrcholem jehlanu  $A, B, C, D, V$  vedeme světelné paprsky (v půdorysně jsou rovnoběžné se směrem  $s_1$ , v nárysně se směrem  $s_2$ ).
- 2) Sestrojíme nárysné a půdorysné stopníky každého paprsku.
- 3) Spojením půdorysných stopníků dostáváme mez vrženého stínu jehlanu  $ABCDV$  na půdorysnu (na obrázku znázorněn modře), spojením nárysných - na nárysnu (na obrázku fialově).

**Poznámka 3.2:** Musíme si uvědomit, že v případě jehlanu *za* mez vrženého stínu považujeme lomenou čáru, která je hranicí oblasti, jež tvoří vržený stín. Vidíme, že například stíny hran  $BV$  a  $DV$  dopadají dovnitř vrženého stínu, proto se v mezi neuplatní. ■

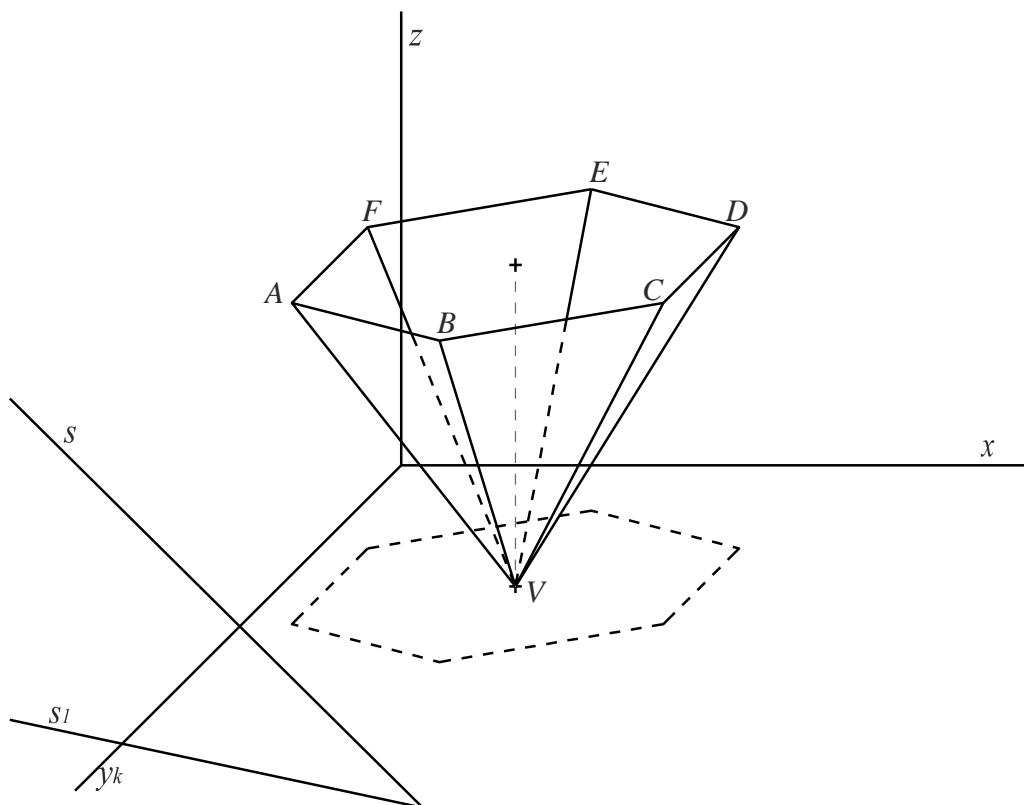


**Obrázek 3.2.** Rovnoběžné osvětlení jehlanu v Mongeově promítání na půdorysnu a nárýsnu.

- 4) Víme, že mez vrženého stínu je stínem meze vlastního stínu, proto už zároveň víme, jak vypadá mez vlastního stínu, bude procházet body  $AVCD$ .
- 5) Rozhodneme, které části stínů se nacházejí v kladných polovinách čili před nárýsnou a nad půdorysnou a vyšrafujeme výsledek. Na obrázku je výsledný vržený stín na nárýsnu zvýrazněn fialovou barvou, na půdorysnu modrou. Mezi vrženého stínu je čára procházející body  $A^x V^+ C^x D^x$ .

### 3.2 Kosoúhlé promítání.

**Úloha 3:** V daném kosoúhlém promítání  $q = 1/2$ ,  $w = 135^\circ$ , je dán dutý pravidelný šestiboký jehlan  $ABCDEFV$  s podstavou v rovině  $z=8=0$ ,  $V=[5,8,0]$ ,  $VA = 4$  cm (viz obr. 3.3). Osvětlete jehlan daným směrem osvětlení -  $s$  do souřadnicových rovin (směr  $s$  je určen body  $[0,12,0]$  a  $[9,14,0]$ ) čili najděte mez vlastního, mez vrženého stínu a také stín do dutiny.



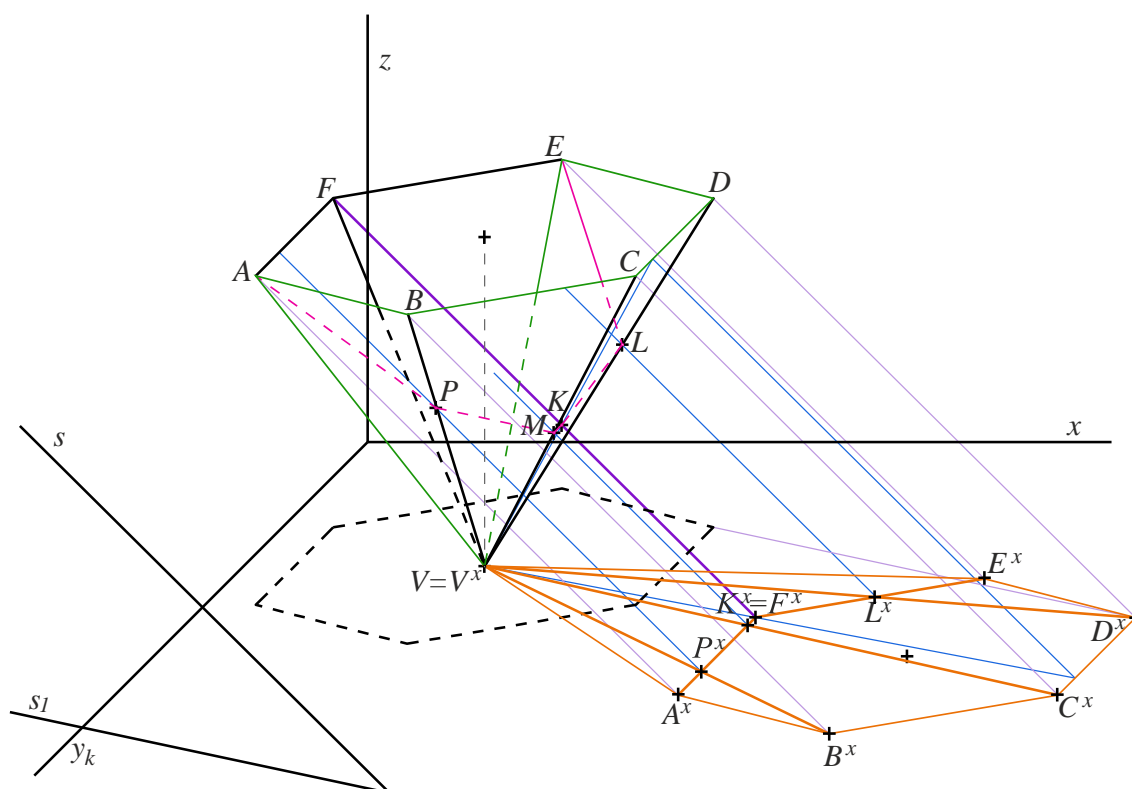
**Obrázek 3.3.** Úloha 3, zadání.

**Řešení** (obr. 3.4): Jehlan je hranatým tělesem a proto pro sestavení jeho vrženého stínu sestrojíme vržené stíny všech jeho vrcholů a pak příslušné body spojíme.

První, co si musíme uvědomit, je to, že vrchol jehlanu leží přímo v rovině, do které osvětlujeme, to znamená, že při osvětlení „zůstane na místě“ ( $V=V^x$  na obrázku 3.4). Vrcholy podstavy ale musíme osvětlit.

**Poznámka 3.3:** Podstava jehlanu leží v rovině rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, z toho plyne, že vrženým stínem bude shodný šestiúhelník, rovnoběžně posunutý do půdorysny. ■

- 1) Mohli bychom každým vrcholem podstavy vést světelný paprsek, získali bychom tak vržený stín podstavy do půdorysny. Z poznámky 3.3 ale plyne, že si můžeme v daném speciálním případě zjednodušit práci. Posuneme podstavu do průmětny, ve směru osvětlení.
- 2) Spojíme stín každého bodu podstavy se stínem vrcholu. Dvě krajní hrany, spolu s částí podstavy, tvoří mez vrženého stínu, zelená lomená čára  $A^x B^x C^x D^x E^x V^x A^x$  na obrázku 3.4.
- 3) Víme, že mez vrženého stínu ( $A^x B^x C^x D^x E^x V^x A^x$ ) je stínem meze vlastního stínu, proto už zároveň víme, jak vypadá mez vlastního stínu. Mez vlastního stínu je lomená čára  $ABCDEVA$ .



**Obrázek 3.4.** Rovnoběžné osvětlení pravidelného šestibokého jehlanu v kosoúhlém promítání do půdorysny a do dutiny.

Nyní, když už máme stíny vlastní a vržený, dostáváme se k stínu do dutiny. Jak už jsme zmiňovali v první kapitole, stín do dutiny existuje v tom případě, když budeme uvažovat, že jehlan je uvnitř prázdný a nemá podstavu uzavřenou, neboli můžeme se dívat dovnitř jehlanu (dostanou se tedy dovnitř i světelné paprsky).

Všimneme si, že stíny hran podstavy (které nejsou součástí mezi vrženého stínu) protínají stíny hran jehlanu, které spojují stíny vrcholů podstavy s osvětleným vrcholem. Právě vzory těchto průsečíků budou ležet na mezi stínu do dutiny.

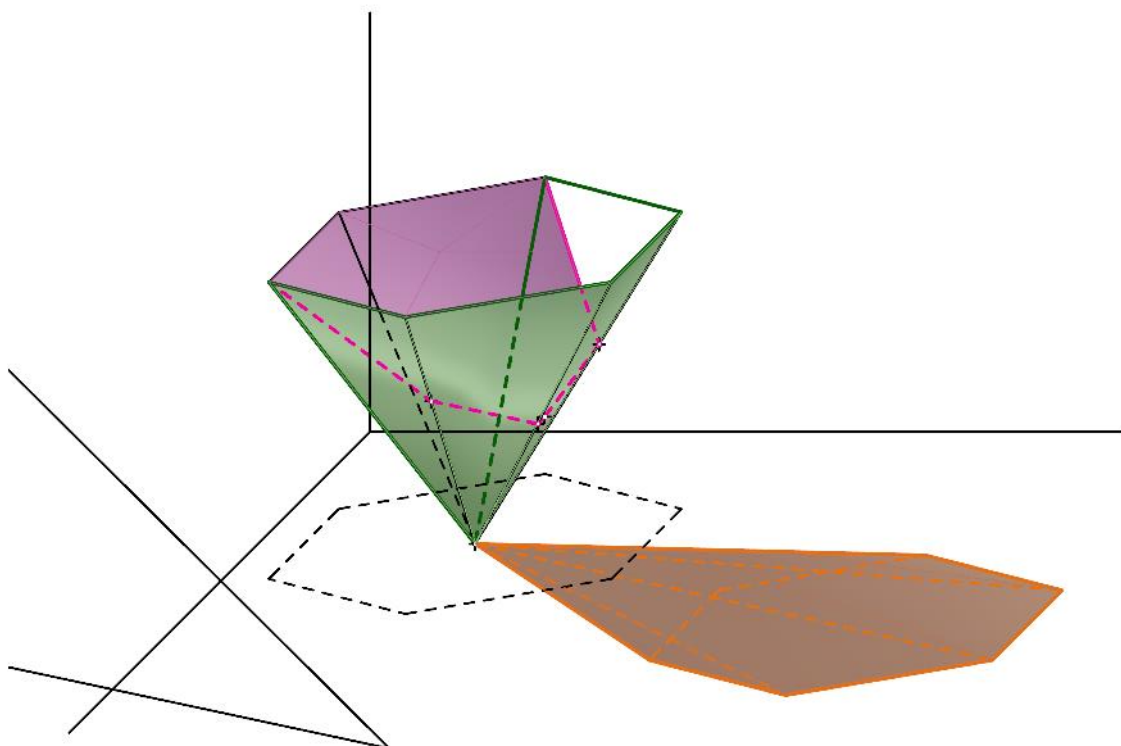
- 4) Vidíme na obrázku, že stín hrany  $FA$  (čili  $F^xA^x$ ) protíná stín  $V^xB^x$  hrany  $VB$ . Označíme průsečík  $P^x$ .

Potřebujeme najít původní bod (vzor), který vrhá stín do bodu  $P^x$ , dostaneme ho pomocí zpětného světelného paprsku.

- 5) Vedeme bodem  $P^x$  zpětný paprsek, získáváme tak bod  $P$ , který je bodem mezi stínu do dutiny. Stejně postupujeme s ostatními průsečíky stínů hran jehlanu. Spojíme získané body a máme mez stínu do dutiny – lomená čára  $APMKLE$  (růžově na obr. 3.3).

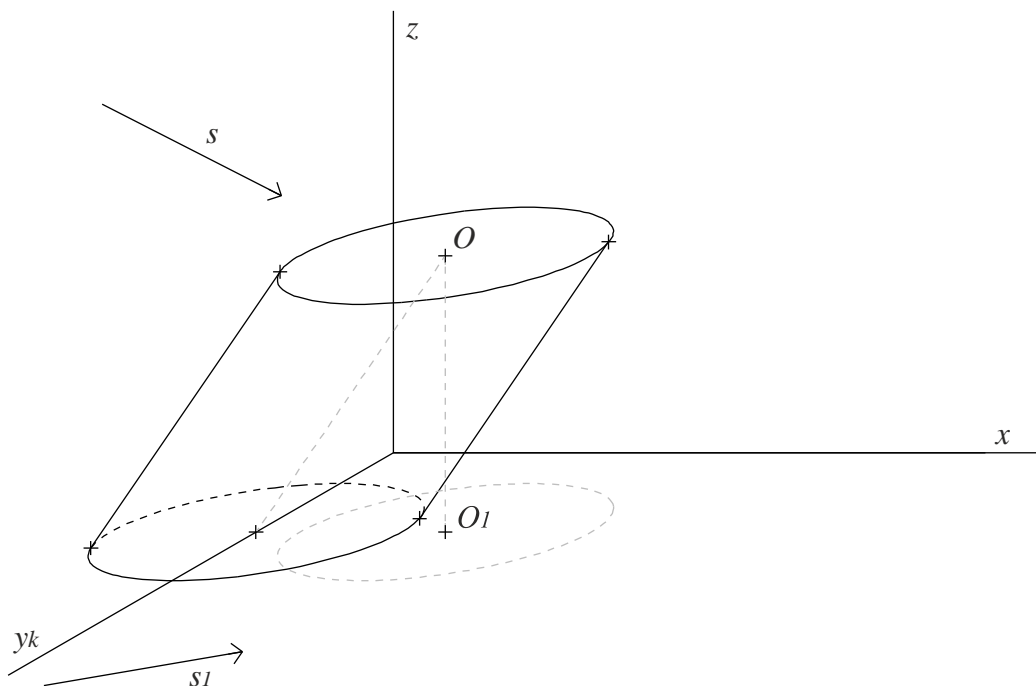


Na závěr se podíváme na obrázek 3.5, na kterém je znázorněna více názorná verze výsledku, bez pomocných konstrukcí a s vyšrafovanými stíny. Vlastní stín je znázorněn zeleně, vržený – oranžově a stín do dutiny – růžově.



**Obrázek 3.5.** Rovnoběžné osvětlení pravidelného šestibokého jehlanu v kosohléhém promítání do půdorysny a do dutiny.

**Úloha 4:** V daném kosoúhlém promítání  $q = 2/3$ ,  $w = 150^\circ$ , je dán kosý kruhový válec s podstavou ležící v půdorysně,  $O = [4,2.5,6]$ , poloměr podstavy 3 cm (viz obr 3.6). Osvětlete válec daným směrem osvětlení -  $s$  do souřadnicových rovin (směr  $s$  je určen body  $[4,12,10]$  a  $[5,10,9.5]$ ) čili najděte mez vlastního a mez vrženého stínu.



**Obrázek 3.6.** Úloha 5, zadání.

**Řešení** (obr. 3.7): Postupujeme podle podkapitoly 2.2.

- 1) Dolní podstava válce leží v půdorysně, proto při osvětlení „zůstává na místě“.

Horní podstava válce leží v rovině rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, proto se konstrukce stínu značně zjednoduší. Stačí najít stín středu  $O$ .

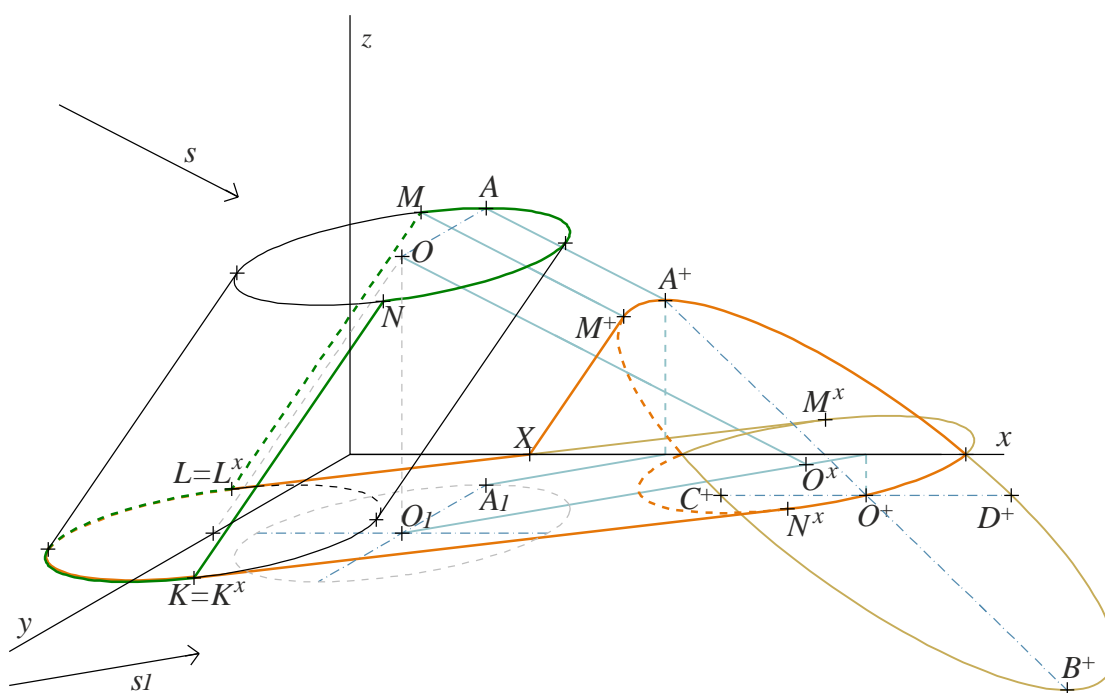
- 2) Bodem  $O$  vedeme světelný paprsek, rovnoběžný se směrem osvětlení  $s$ . Paprsek protne svůj půdorys (půdorys paprsku prochází bodem  $O_1$  a je rovnoběžný se směrem  $s_1$ ) v bodě  $O^x$ .
- 3) Podobně jako v předchozím příkladu, vrženým stínem horní podstavy bude shodný s podstavou kruh, ale rovnoběžně posunutý, takže jeho středem je bod  $O^x$ . Průmětem meze stínu horní podstavy bude elipsa.

- 4) Vedeme společné tečny ke dvěma kružnicím (v průmětu k elipsám): dolní podstavě a mezi vrženého stínu horní podstavu, rovnoběžné se směrem  $O_1O^x$ .  $L^xM^x$  a  $K^xN^x$  na obrázku 3.10.

Dvě tečny spolu s polovinami kružnic tvoří mez vrženého stínu. Vidíme, že část vrženého stínu do půdorysny se nachází v záporné polorovině, což znamená, že stín se zalomí do nárysny.

Potřebujeme osvětlit horní podstavu do nárysny. Nárysna už není rovnoběžná s rovinou, ve které leží horní podstava, proto musíme sestavit vržený stín složitějším způsobem.

- 5) Sestrojíme vržený stín bodu  $O$  do nárysny, získáme tak bod  $O^+$ .
- 6) Víme, že v kosoúhlém promítání se na rovnoběžných přímkách s osou  $x$  poloměr nezkrusuje. Proto snadno sestrojíme průměr elipsy, rovnoběžný s osou  $x$ , průměr  $C^+D^+$  na obrázku 3.7.



**Obrázek 3.7.** Rovnoběžné osvětlení kosého válce v kosoúhlém promítání do půdorysny a nárysny.

Osy  $x$  a  $y$  jsou ve skutečnosti kolmé na sebe, proto se průměr horní podstavy rovnoběžný s osou  $y$  zobrazí na průměr sdružený s  $C^+D^+$ .

- 7) Sestrojíme vržený stín bodu  $A$  do náryсны, kde  $AO$  je rovnoběžka<sup>7</sup> s osou  $y$ .
- 8)  $C^+D^+$  a  $A^+B^+$  jsou sdružené průměry elipsy. Použijeme Rytzovu konstrukci pro sestrogení elipsy, která je průmětem vrženého stínu horní podstavy válce do náryсны.

Také vidíme, že část tečny  $L^xM^x$  je za náryсны, v záporné části půdoryсны. Proto  $L^xM^x$  se také zalomí do náryсны.  $M^x$  je stínem nějakého bodu  $M$ , který leží na horní podstavě válce.

- 9) Vedeme bodem  $M^x$  zpětný paprsek, který protne horní podstavu válce v bodě  $M$ .
- 10) Sestrojíme vržený stín bodu  $M$  do náryсны, získáme bod  $M^+$ .

Vržené stíny  $LM$  do náryсны a půdoryсны se musejí protnout na ose  $x$  v jednom bodě, označíme ho  $X$ . Tento bod už máme jako průsečík  $L^xM^x$  s osou  $x$ .

- 11) Spojíme  $X$  a  $M^+$  a tím máme část meze vrženého stínu válce na dvojici rovin, náryсны a půdoryсны, oranžová křivka na obrázku 3.7.

Nyní najdeme vlastní stín válce.

Víme, že mez stínu vrženého je stínem meze vlastního stínu. Mez vrženého stínu už máme určenou, proto zbývá jenom najít vzory některých bodů.

- 12) Body  $L^x$  a  $K^x$  leží v půdorysně, proto  $L^x=L$  a  $K^x=K$ .

Bod  $M$  už máme. Zbývá najít bod  $N$ , který vrhá stín na bod  $N^x$ .

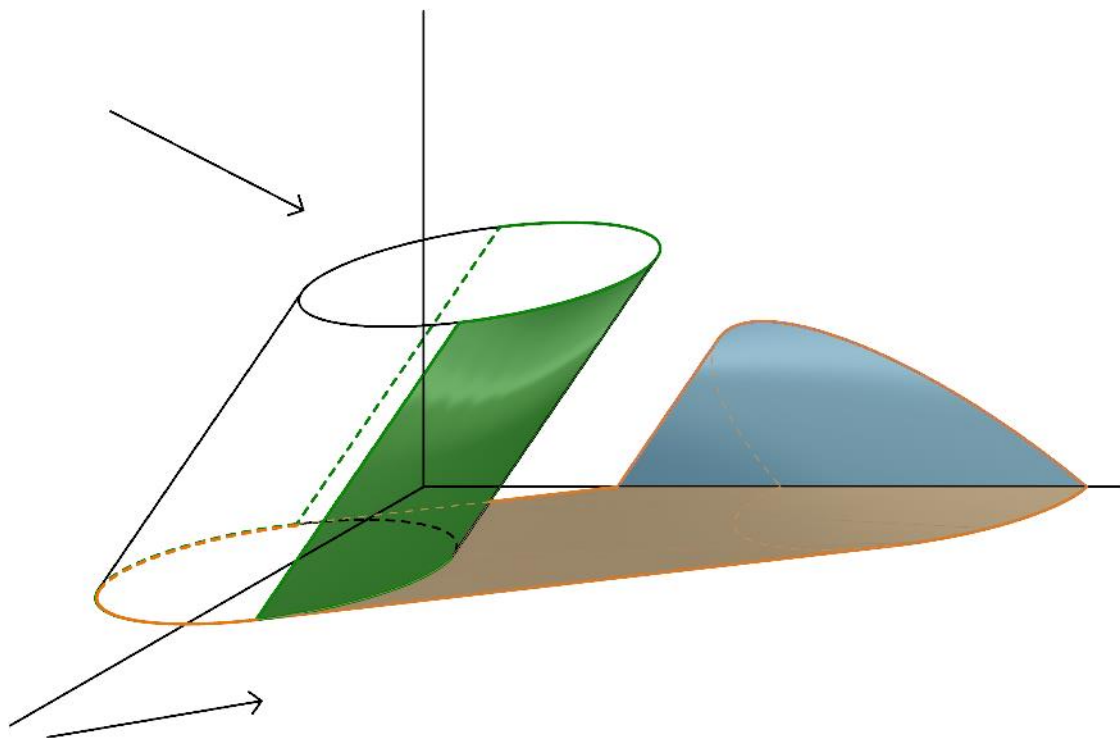
- 13) Vedeme bodem  $N^x$  zpětný paprsek. Paprsek protne horní podstavu válce v bodě  $N$ .

Površky  $LM$  a  $NK$  spolu s polovinami kružnic (horní a dolní podstavy, v průmětu elipsy) tvoří mez vlastního stínu (zelená křivka na obr. 3.7).

---

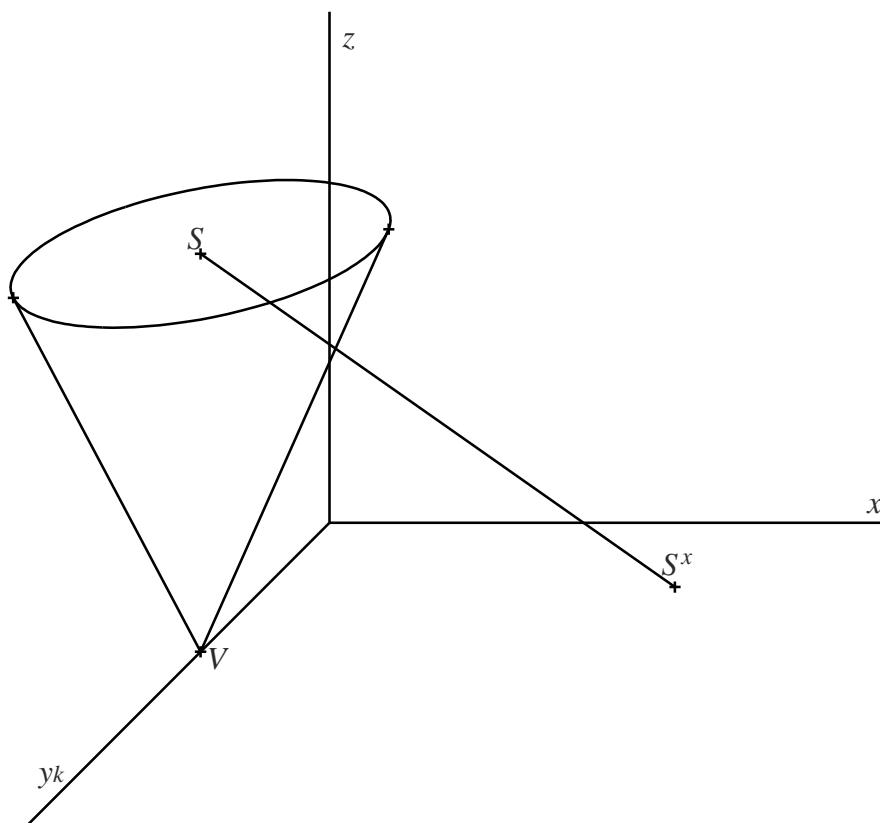
<sup>7</sup> Rovnoběžnou přímkou budeme zkráceně nazývat rovnoběžka.

Na závěr se můžeme podívat na obrázek 3.8, který již neobsahuje pomocné konstrukce. Vlastní stín je vybarven zeleně, vržený stín do půdorysny je vybarven oranžově a modře do nárysny.



**Obrázek 3.8.** Rovnoběžné osvětlení kosého kruhového válce do půdorysny a nárysny.

**Úloha 5:** V daném kosoúhlém promítání  $q=3/4$ ,  $w=135^\circ$ , je dán dutý rotační kužel, jehož podstava leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou a má poloměr 4 cm. Osvětlete daný kužel ve směru osvětlení  $SS^x$ , kde  $S^x = [9, 1.5, 0]$  je vrženým stínem středu podstavy  $S = [0, 3, 9]$  do půdorysny (viz obr. 3.9).



**Obrázek 3.9.** Úloha 4, zadání.

**Řešení:** Podobně jako v předchozí úloze, vrchol kužele leží přímo v rovině, do které osvětlujeme.

1)  $V = V^x$  (obr. 3.10).

V obecném případě bychom měli postupovat klasickým způsobem osvětlení pro kužele, který byl uveden v kapitole 2.2 Osvětlení rotačního kužele. V dané úloze ale podstava kužele leží v rovině rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, proto se konstrukce stínu značně zjednoduší. Průmět stínu podstavy bude elipsa shodná s průmětem podstavy, ale rovnoběžně posunutá.

- 2) Stín středu podstavu  $S^x$  už máme, zbývá sestrojít shodnou (s průmětem podstavu) elipsu se středem v  $S^x$ .
- 3) Ze stínu vrcholu -  $V^x$  vedeme tečny k elipse, kterou jsme sestrojili v 2), body dotyku označíme  $T_1^x, T_2^x$ . Tečny spolu se stínem podstavu jsou součástí meze vrženého stínu kužele (oranžově na obrázku 3.10).

Přejdeme k sestrojení vlastního stínu. Nejprve najdeme vzory bodů  $T_1^x, T_2^x$ .

- 4) Vedeme zpětné paprsky z bodů  $T_1^x, T_2^x$ , získáme tím body  $T_1, T_2$  na podstavě kužele. Površky procházející těmito body, spolu s částí podstavné kružnice, tvoří mez vlastního stínu.

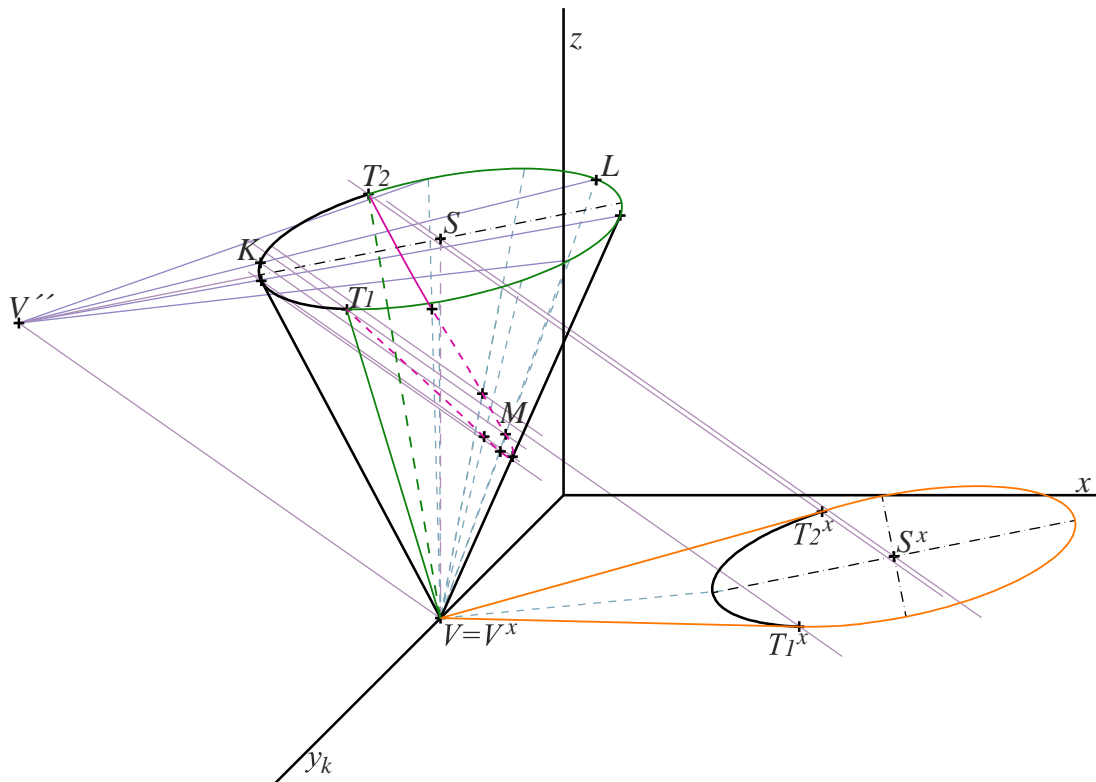
Nyní, když už máme stíny vlastní a vržený, přejdeme ke stínu do dutiny.

- 5) Sestrojíme domnělý stín vrcholu kužele do roviny podstavu, najdeme jej jako průsečík světelného paprsku vedeného bodem  $V$  s rovinou podstavu. Označíme nalezený bod -  $V''$ .

Musíme si uvědomit, že hranicí stínu do dutiny je část podstavné kružnice, která není součástí vlastního stínu. Proto potřebujeme najít stín této části kružnice do dutiny.

- 6) Z bodu  $V''$  vedeme polopřímky, které protínají podstavu čili dostaneme svazek polopřímek se středem v  $V''$  (čím více polopřímek, tím přesnější výsledný stín do dutiny).

Polopřímky protínají podstavnou kružnici ve dvou bodech. Nejprve polopřímka protne kružnici v bodě, který bude vrhat stín. Potom v bodě, kterým povedeme površku kužele. Na tuto površku dopadne stín prvního bodu.



**Obrázek 3.10.** Rovnoběžné osvětlení rotačního kužele v kosoúhlém promítání do půdorysny, nárysny a do dutiny.

- 7) Zvolíme libovolnou polopřímku, z těch, které jsme vedli v 6. kroku. Například polopřímku  $V''L$  na obrázku 3.7.
- 8) Vedeme paprsek bližším k  $V''$  průsečíkem elipsy a polopřímky. Pro polopřímku  $V''L$  vedeme paprsek bodem  $K$ .
- 9) Druhým průsečíkem, vedeme površku kužele. Pro zvolenou polopřímku površka  $LV$ .
- 10) Zvýrazníme bod, ve kterém se paprsek a površka protínají. Pro polopřímku  $V''L$  dostáváme bod  $M$ .

Provedeme stejný postup pro ostatní polopřímky.

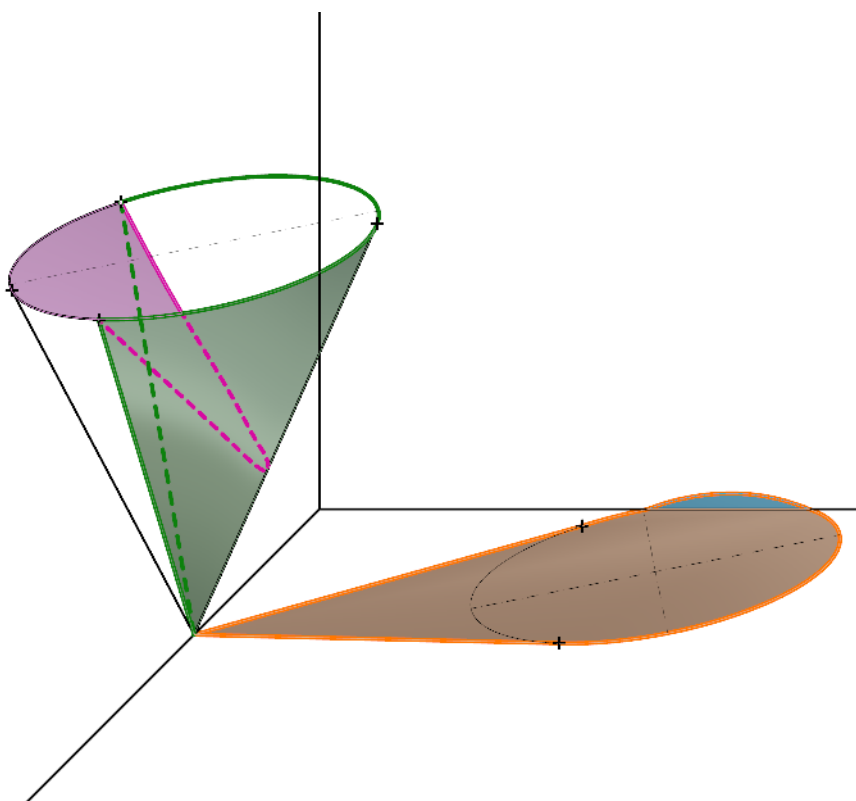
- 11) Spojením nalezených průsečíků dostáváme mez stínu do dutiny (růžová křivka na obr. 3.7).



Opět uvažujeme neprůhlednou rovinu  $(x,z)$  čili nárysnu, proto se bude vržený stín lámat. Vidíme z obrázku 3.7, že vržený stín se protíná s osou  $x$ , proto by se v ose  $x$  měl zalomit do svislé roviny  $(x,z)$ .

**Poznámka 3.4:** Vržený stín podstavy do nárysny umíme sestrojít klasickým způsobem, podobně jak jsme to dělali v předchozí úloze. Navíc využijeme faktu, že se vržené stíny do nárysny a půdorysny protnou na ose  $x$ . Tyto body již máme jako průsečíky vrženého stínu podstavy do půdorysny a osy  $x$ .■

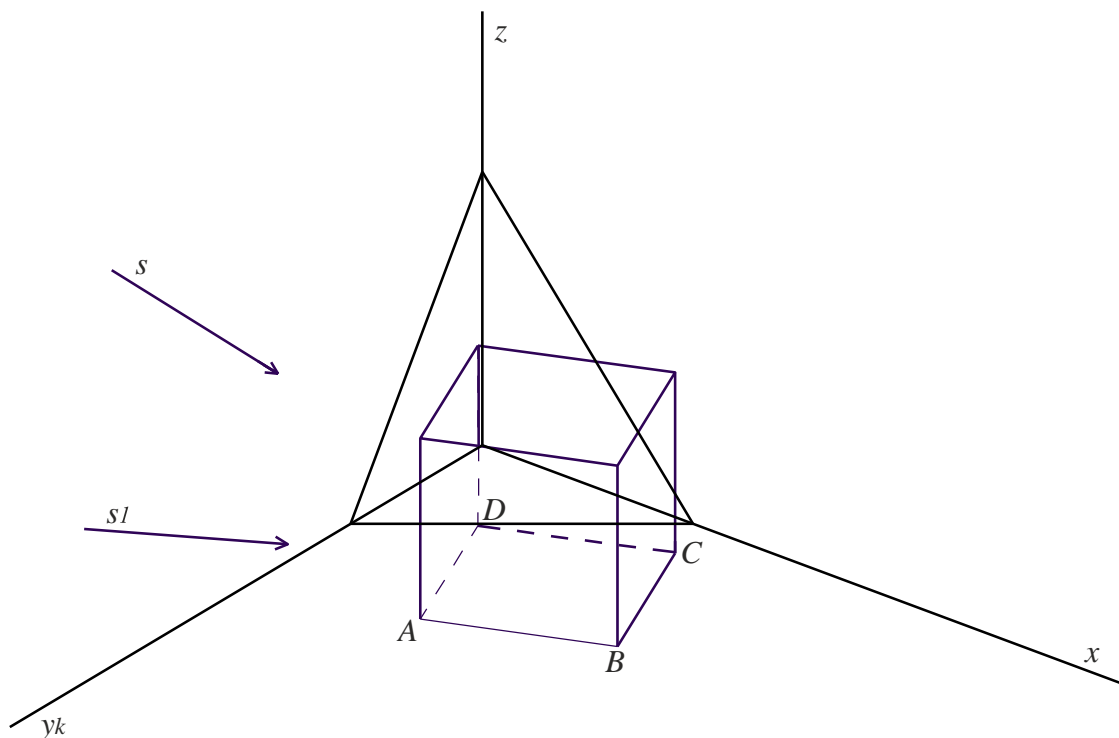
Na obrázku 3.11 můžeme vidět více názornou verzi výsledku, bez pomocných konstrukcí a s vyšrafovanými stíny. Všimněme si také, že na tomto výsledném obrázku vržený stín je již zalomený do nárysny (vybarven modrou barvou).



**Obrázek 3.11.** Rovnoběžné osvětlení rotačního kužele v kosoúhlém promítání do půdorysny, nárysny a do dutiny.

### 3.3 Pravoúhlá axonometrie.

**Úloha 6:** Pravoúhlá axonometrie je zadaná axonometrickým trojúhelníkem  $\Delta(10;11;12)^8$ . V dané pravoúhlé axonometrii je dána dutá krychle s podstavou  $ABCD$  v půdorysně (krychle stojí na půdorysně) a směr světelných paprsků -  $s$  (viz obr. 3.13). Hrana krychle se rovná 6 cm,  $A = [4,3,0]$ . Osvětlete krychli v daném směru  $s$ .



**Obrázek 3.12.** Úloha 5, zadání.

**Řešení** (obr. 3.13): Krychle je hranatým tělesem, pro sestavení stínu postupujeme příslušným způsobem.

- 1) Dolní podstava leží přímo v půdorysně, proto při osvětlení „zůstává na místě“.
- 2) Horní podstava leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, do které osvětlujeme. Proto horní podstavu osvětlíme tak, že posuneme podstavu do průmětny ve směru osvětlení.

<sup>8</sup>  $\Delta(a;b;c)$  – zkrácený zápis pro  $|XY|=a$ ,  $|YZ|=b$ ,  $|ZX|=c$ , kde  $X, Y, Z$  jsou vrcholy axonometrického trojúhelníku na příslušných osách  $x, y, z$ .

**Poznámka 3.5:** Mohli bychom sestrojít stín podstavy i obecným postupem tak, že bychom každým jejím vrcholem vedli světelný paprsek. Paprsek by protnul půdorysnu ve stínu příslušného bodu. ■

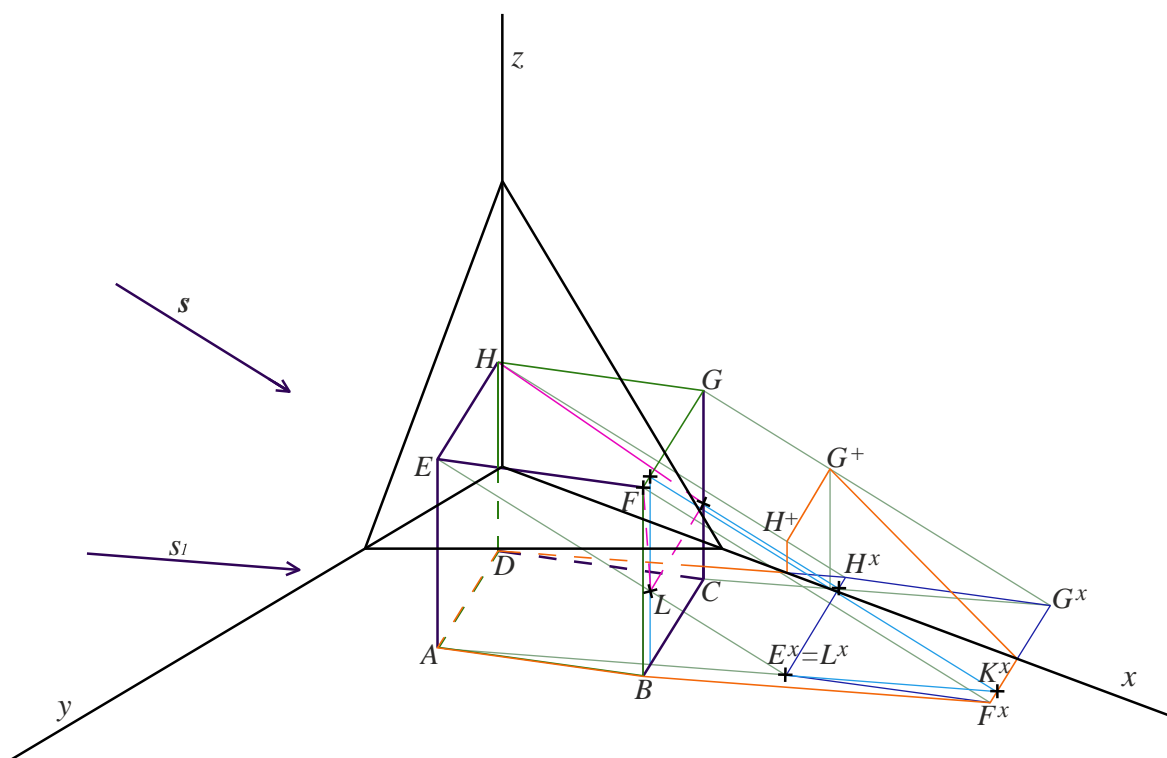
Vidíme, že vržený stín do půdorysny protíná osu  $x$ , z toho plyne, že část horní podstavy vrhá stín na nárysnu.

- 3) V bodech, ve kterých vržený stín do půdorysny protíná osu  $x$ , se stín zalomí do nárysny. Pro vrcholy, jejichž vržené stíny dopadly na část půdorysny za nárysnou, sestrojíme vržené stíny na nárysnu. Jedná se tedy o body  $G^x$  a  $H^x$ . Sestrojíme jejich stíny do nárysny a získáme tak body  $G^+$ ,  $H^+$ .

Tím už máme mez vrženého stínu (oranžová křivka na obr. 3.13).

- 4) Mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu, proto už také víme, jak vypadá mez vlastního stínu (zelená křivka na obr. 3.13).

Zbývá jenom sestrojít stín do dutiny.

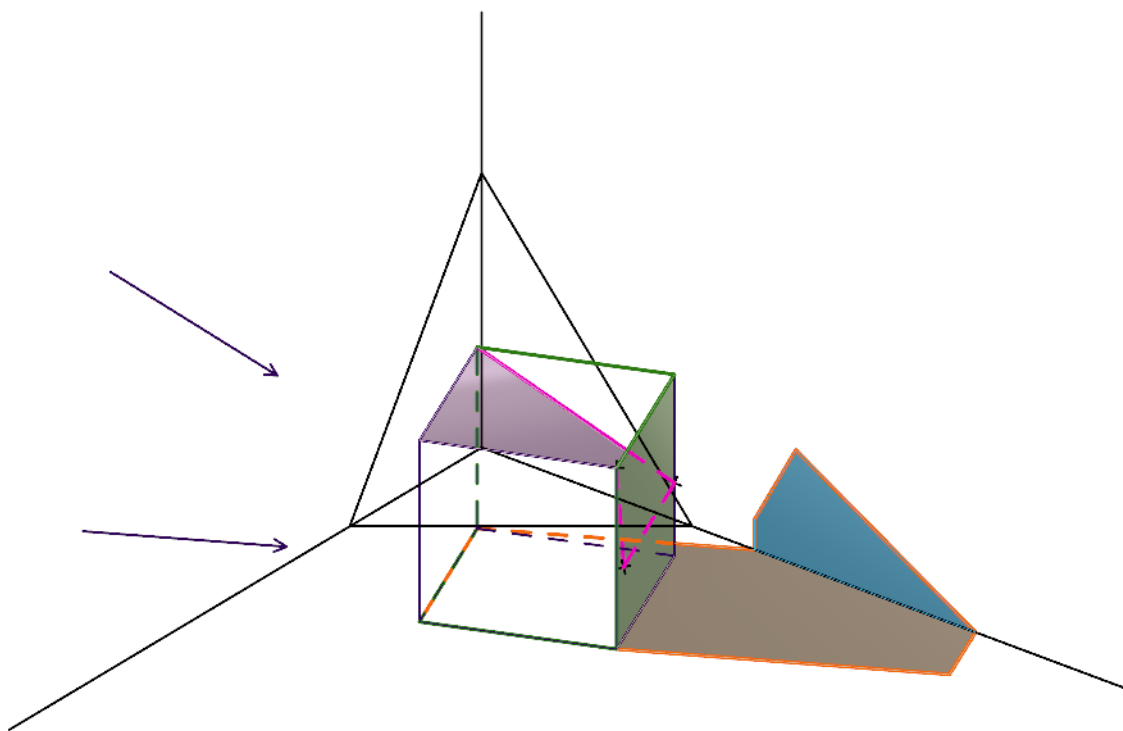


**Obrázek 3.13.** Rovnoběžné osvětlení krychle v pravouhle axonometrii na půdorysnu, nárysnu a do dutiny.

Stín bodu  $E$  označíme  $E^x$ .  $E^x$  dopadl dovnitř meze vrženého stínu, z toho plyne, že nám určí bod, který je součástí meze stínu do dutiny. Ještě jeden bod krychle vrhá stín do stejného bodu jako  $E$  čili existuje nějaký bod  $L$  na krychli, takový že jeho stín  $L^x = E^x$ . Také vidíme, že stíny hran  $HE$ ,  $CG$ , tj.  $H^x E^x$  a  $CG^x$  se protínají. Bod, který vrhá stín do tohoto průsečíku, bude také bodem stínu do dutiny.

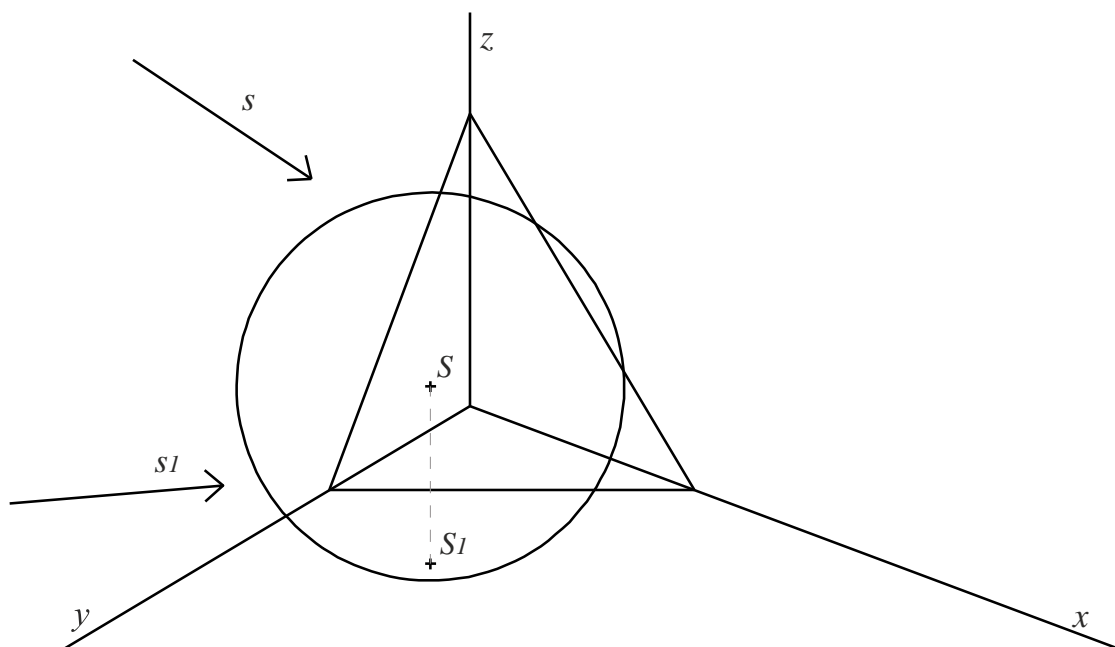
- 5) Najdeme bod  $L$ , který je vzorem bodu  $L^x$ . Vedeme bodem  $L^x$  paprsek, rovnoběžný se směrem  $s_I$ , paprsek protne stín hrany  $G^x F^x$  v bodě  $K^x$ . Pomocí zpětného paprsku vedeného bodem  $K^x$  najdeme povrchovou úsečku krychle, úsečku, jejímž stínem je úsečka  $L^x K^x$ . Zjevně bod  $L$  bude ležet na této povrchové úsečce, proto bod  $L$  najdeme jako průsečík zpětného paprsku, vedeného bodem  $L^x$  a získané površky.
- 6) Vzor průsečíku stínů hran  $HE$ ,  $CG$ , tj.  $H^x E^x$  a  $CG^x$  najdeme jako průsečík zpětného paprsku a hrany  $CG$ .

Tím už máme mez stínu do dutiny (růžová čára na obr 3.13) a splněné zadání úlohy. Na závěr se podíváme na více názorný obrázek 3.14, kde jsou stíny vybarvené a obrázek již neobsahuje pomocné konstrukce.



**Obrázek 3.14.** Rovnoběžné osvětlení krychle v pravouhlé axonometrii do půdorysny, nárysny a do dutiny

**Úloha 7:** V pravoúhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem je dána kulová plocha se středem  $S=[3,4,5,5,5]$  a poloměrem 5 cm. Osvětlete kulovou plochu v daném směru  $s$  (viz obr. 3.15).



**Obrázek 3.15.** Úloha 6, zadání.

**Řešení** (obr. 3.16): Nejprve se budeme věnovat mezi vlastního stínu.

Mez vlastního stínu je hlavní kružnice kulové plochy v rovině procházející středem kulové plochy kolmo ke směru osvětlení  $a$ . Víme, že v pravoúhlé axonometrii průmětem meze vlastního stínu bude elipsa. Hlavní osa této elipsy bude v průmětu kolmá na průmět směru osvětlení  $s$ . Navíc délka hlavní poloosy elipsy (v prostoru kružnice) se rovná polooměru koule. Tím pádem uděláme první krok:

- 1) Hlavní osa  $AB$  elipsy je kolmá na průmět směru osvětlení  $s$  (viz obr. 3.16).

Další prvky elipsy zatím nemáme.

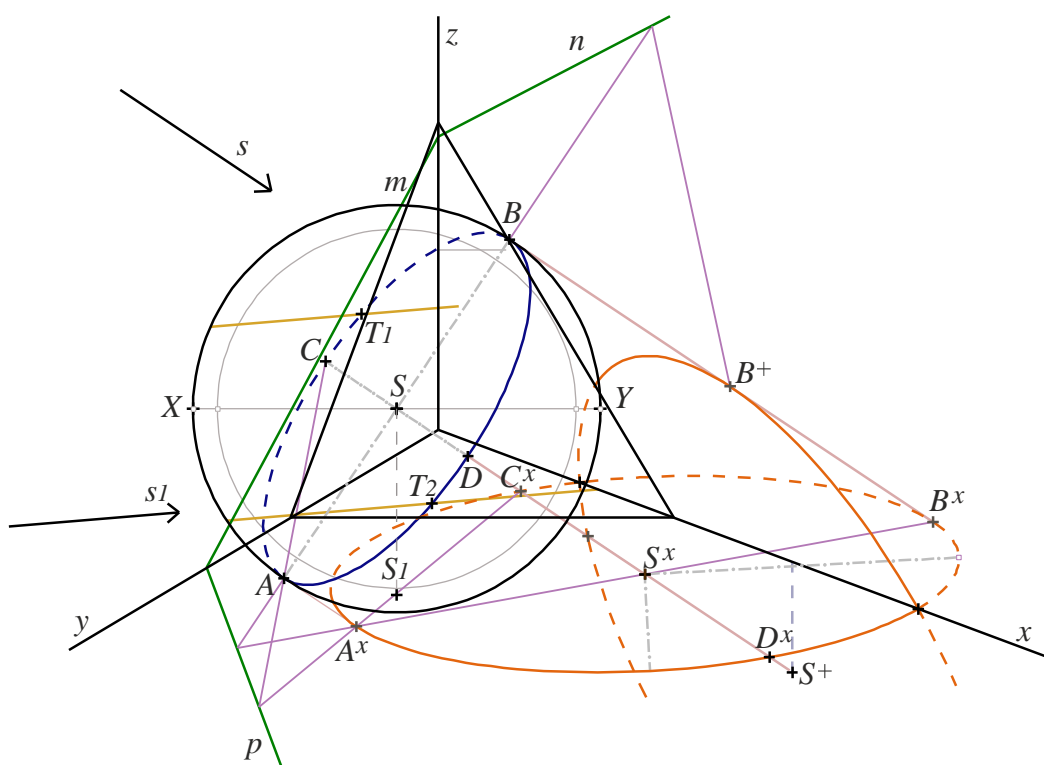
- 2) Uvažujeme nyní rovník<sup>9</sup> sféry, jeho průmětem bude elipsa.

<sup>9</sup> Rovníkem se v geometrii občas nazývá hlavní kružnice (má střed ve středu kulové plochy nebo kouli), která se nachází v rovině rovnoběžné s půdorysnou.

Víme, jak vypadá hlavní osa průmětu rovníku -  $XY$  na obrázku 3.16. Dále najdeme ohniska této elipsy.

Tato elipsa je průmětem řezu sféry rovinou rovnoběžnou s půdorysnou. Ohniska elipsy najdeme jako průsečíky  $XY$  s kružnicí jež je soustředná s obrysem sféry a její poloměr je roven průmětu poloměru kulové plochy, který je kolmý na rovinu řezu (lze jednoduše dokázat z vlastností axonometrického průmětu kružnice).

Tedy nejprve potřebujeme vědět, jak se zakreslí skutečný poloměr kulové plochy, což bez problémů zjistíme sklopením osy  $z$ .



**Obrázek 3.16.** Rovnoběžné osvětlení sféry v pravouhlé axonometrii do půdorysny a nárýsny.

- 3) Narýsujeme kružnici se získaným zakresleným poloměrem a středem ve středu kulové plochy. Tato kružnice protne  $XY$  v ohniscích hledané elipsy.

Rovníkovou elipsu ani nemusíme rýsovat, protože potřebujeme jenom tečny rovnoběžné se směrem  $s_1$ , vedené k této elipse, což umíme udělat i bez narýsované elipsy.

- 4) Sestrojíme tečny (k rovnicové elipse) rovnoběžné se směrem  $s_1$ . Body dotyku označíme  $T_1$  a  $T_2$ .

Body  $T_1$  a  $T_2$  jsou zároveň body elipsy, která je průmětem meze vlastního stínu.

- 5) Nyní je průmět meze vlastního stínu určen hlavní osou  $AB$  a body  $T_1$ ,  $T_2$ . Použijeme proužkovou konstrukci pro sestavení této hledané elipsy (v prostoru kružnice) a tím máme mez vlastního stínu.

Přejdeme k sestavení vrženého stínu.

- 6) Sestrojíme vržený stín do půdorysny středu  $S$ .
- 7) Sestrojíme stopy roviny  $\alpha$ , ve které leží mez vlastního stínu, tj. kružnice procházející body  $ABCD$ . Rovina  $\alpha$  je zřejmě kolmá na směr  $s$ .

Nejprve pomocí axonometrické stopy umíme sestavit rovinu  $\beta$ , která je také kolmá na  $s$  a prochází počátkem. Potom sestrojíme rovinu  $\alpha$  k ní rovnoběžnou (stopy rovin  $\alpha$  a  $\beta$  jsou rovnoběžné), a to tak, aby bod  $S$  ležel v rovině  $\alpha$  (v čemž nám pomohou hlavní přímky).

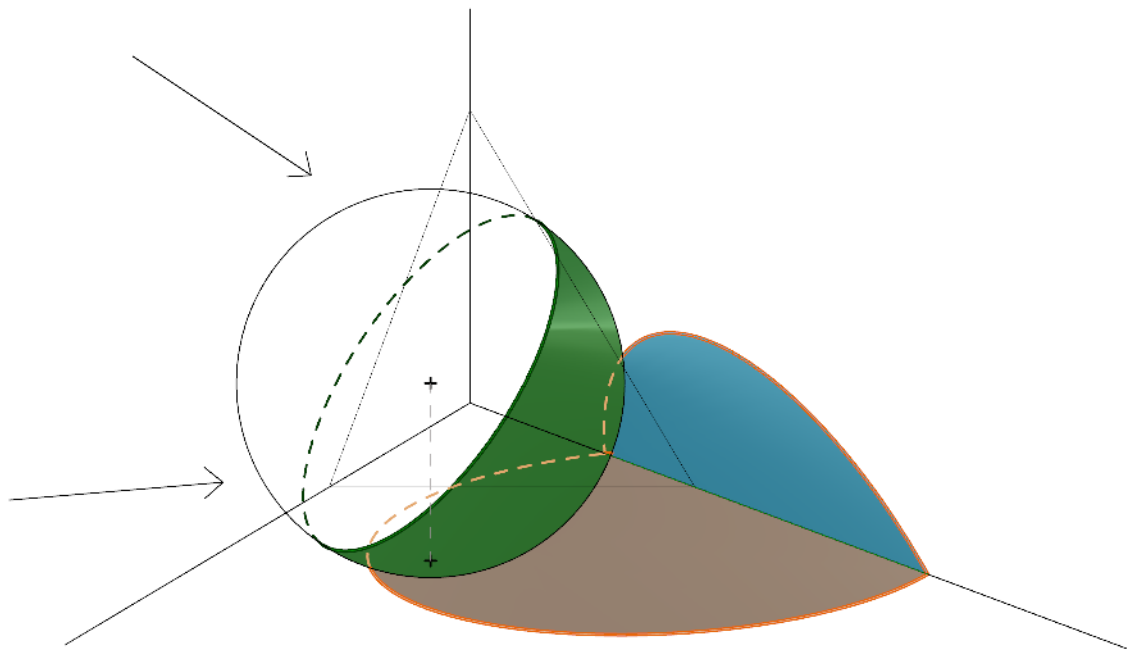
- 8) Vzniká afinita<sup>10</sup> mezi rovinami  $\alpha$  a  $\pi$  (půdorysnou) je určena vzorem a obrazem bodu  $S$  (body  $S$  a  $S^x$ ). Osou afinity je půdorysná stopa roviny  $\alpha$  ( $p$  na obrázku 3.16).
- 9) Ze vztahu afinity tak získáme sdružené průměry  $A^x B^x$  a  $C^x D^x$ . Pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme hlavní a vedlejší osy elipsy, která je průmětem vrženého stínu do půdorysny.

Máme tedy vržený stín do půdorysny  $\pi$ . Stín se ale zjevně zalomí do nárysny. Stín do nárysny uděláme stejným způsobem.

- 10) Užijeme vztahu afinity mezi rovinami  $\alpha$  a  $\eta$  (nárysnou), osou afinity je nárysná stopa roviny  $\alpha$ ,  $n$  na obrázku 3.16. Sestrojíme vržený stín bodu  $S$  do nárysny, označíme  $S^+$ . Afinita je určena vzorem a obrazem bodu  $S$  (body  $S$  a  $S^+$ ). Získáme tak vržený stín do nárysny.

---

<sup>10</sup> Informace o afinitě čtenář může nalézt v (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998).



**Obrázek 3.17.** Rovnoběžné osvětlení koule do půdorysny a nárysny.

Nyní máme úlohu splněnou. Na závěr se podíváme na obrázek 3.17, na kterém můžeme vidět názornější výsledek.

Více vyřešených příkladů může čtenář nalézt v učebnici (K. Drábek a kol, 1979).



### 3.4 Příklady pro samostatnou práci.

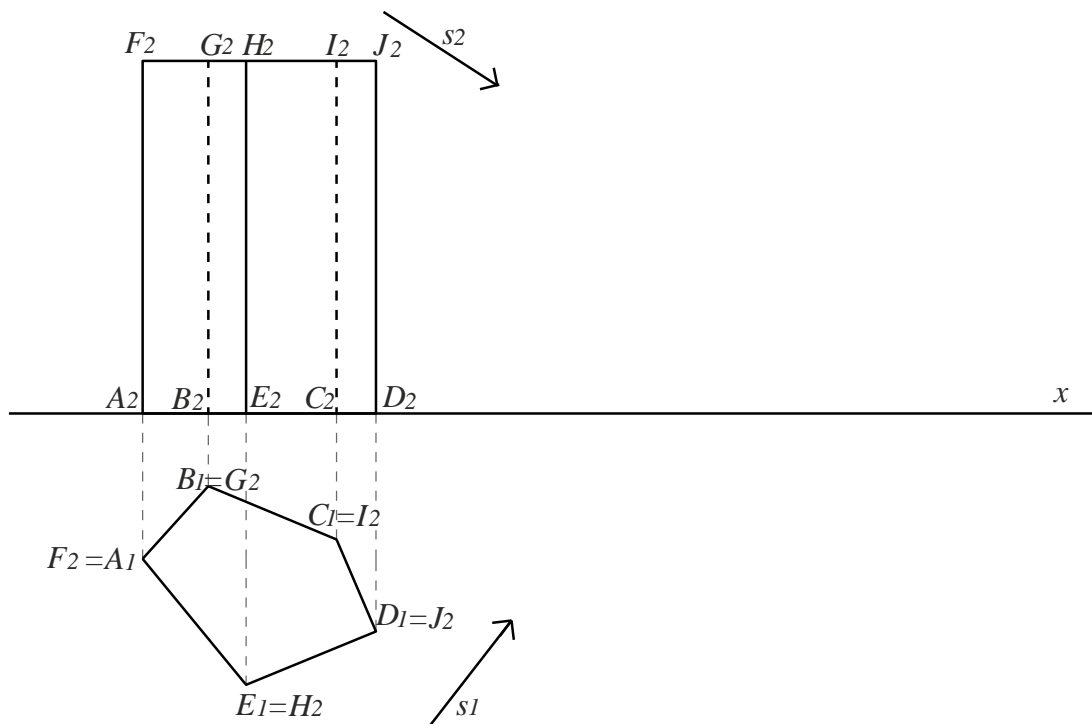
Vždy předpokládáme, že tělesa stojí na půdorysně.

**Příklad 1:** V kosoúhlém promítání  $q = 1/2$ ,  $w = 135^\circ$ , je dán kolmý kužel s podstavou v půdorysně o poloměru 4.  $S$  - střed podstavy má souřadnice  $[0,5,0]$ , výška kužele 6. Dále je dán bod  $L=[7,-5,9]$ . Osvětlete kužel ve směru  $LS$ .

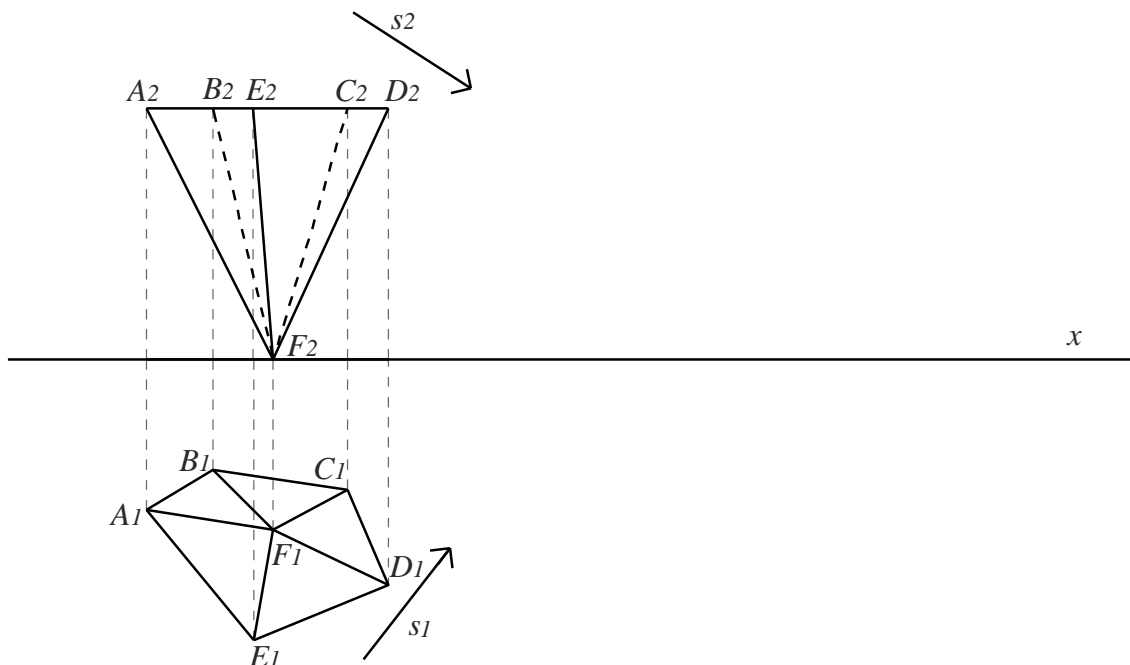
**Příklad 2:** V pravouhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem  $\Delta(7;8;9)$  je dán pravidelný čtyřboký hranol  $ABCDEFGH$ , jehož čtvercová podstava  $ABCD$  leží v půdorysně. Souřadnice bodů  $E=[6,1,4]$ ,  $G=[5,10,4]$ . Osvětlete hranol ve směru  $EC$ .

**Příklad 3:** V pravouhlé axonometrii, pro kterou platí: osy  $x$  a  $z$  svírají úhel  $120^\circ$ ,  $y$  a  $z$  - úhel  $105^\circ$ , je dán kolmý rotační válec s podstavou v půdorysně a výškou  $v = 7$ . Podstava má poloměr  $r = 3$  a střed v bodě  $S=[4,4,0]$ . Také je dán bod  $M=[1,4,7]$ . Osvětlete daný válec ve směru  $MS$ .

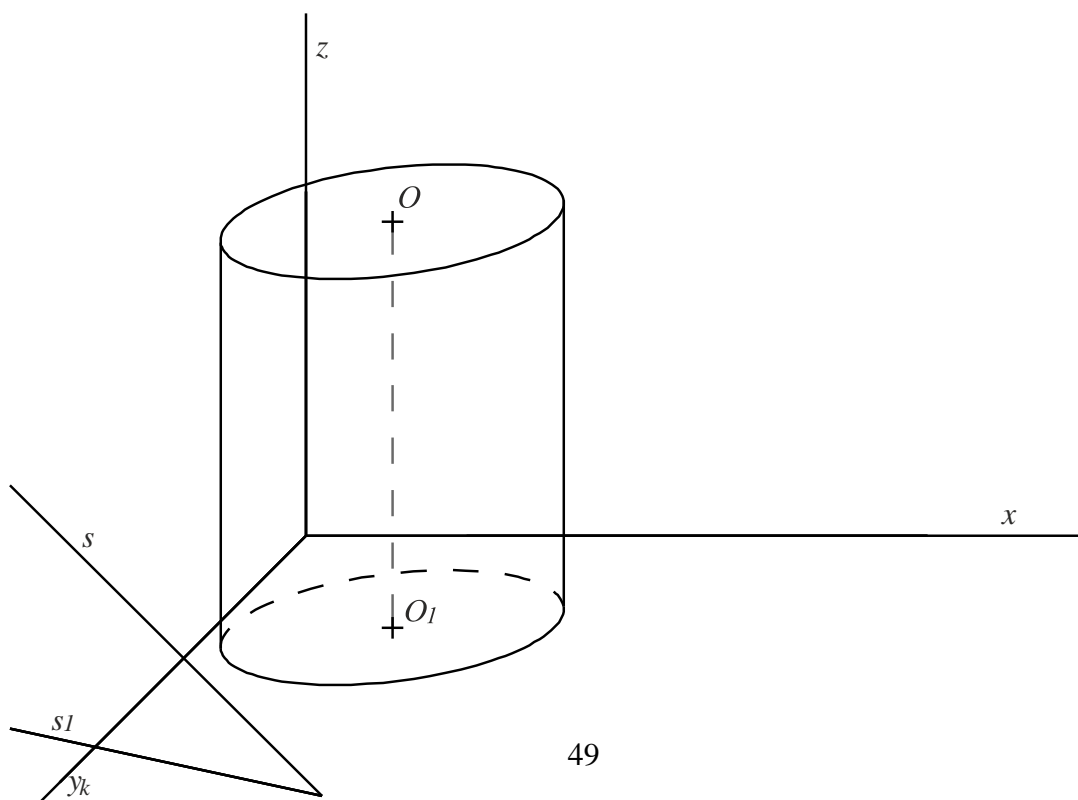
**Příklad 4:** V Mongeově promítání je dán kolmý pětiboký hranol, hranol má výšku 6 cm. Osvětlete daný hranol v daném směru  $s$  ( $s_1$  svírá s osou  $x$   $65^\circ$ ,  $s_2$  svírá s osou  $x$   $50^\circ$ ,  $s_1$  a  $s_2$  jsou orientovány k ose  $x$ ).



**Příklad 5:** Osvětlete pětiboký dutý jehlan o výšce 7 cm. ve směru  $s$  ( $s_1$  svírá s osou  $x$   $65^\circ$ ,  $s_2$  svírá s osou  $x$   $50^\circ$ ,  $s_1$  a  $s_2$  jsou orientovány k ose  $x$ ) v daném Mongeově promítání.



**Příklad 6:** V kosoúhlém promítání  $q=1/3$ ,  $w=140^\circ$  je dán kolmý rotační o výšce 9 cm, jehož podstava je kružnice se středem v bodě  $O_1=[5,6,0]$  a poloměrem 4,5 cm. Také je dán směr  $s$  ( $s$  je určen body  $[0,7,0]$  a  $[8.5,4,0]$ ). Osvětlete daný válec ve směru  $s$ .



## 4 Použití počítačů k sestrojení osvětlení.

Jak už víme z první kapitoly osvětlení je velice důležitou částí v nejrůznějších oblastech. V této kapitole se budeme věnovat užití počítačů ke geometrickému modelování stínů.

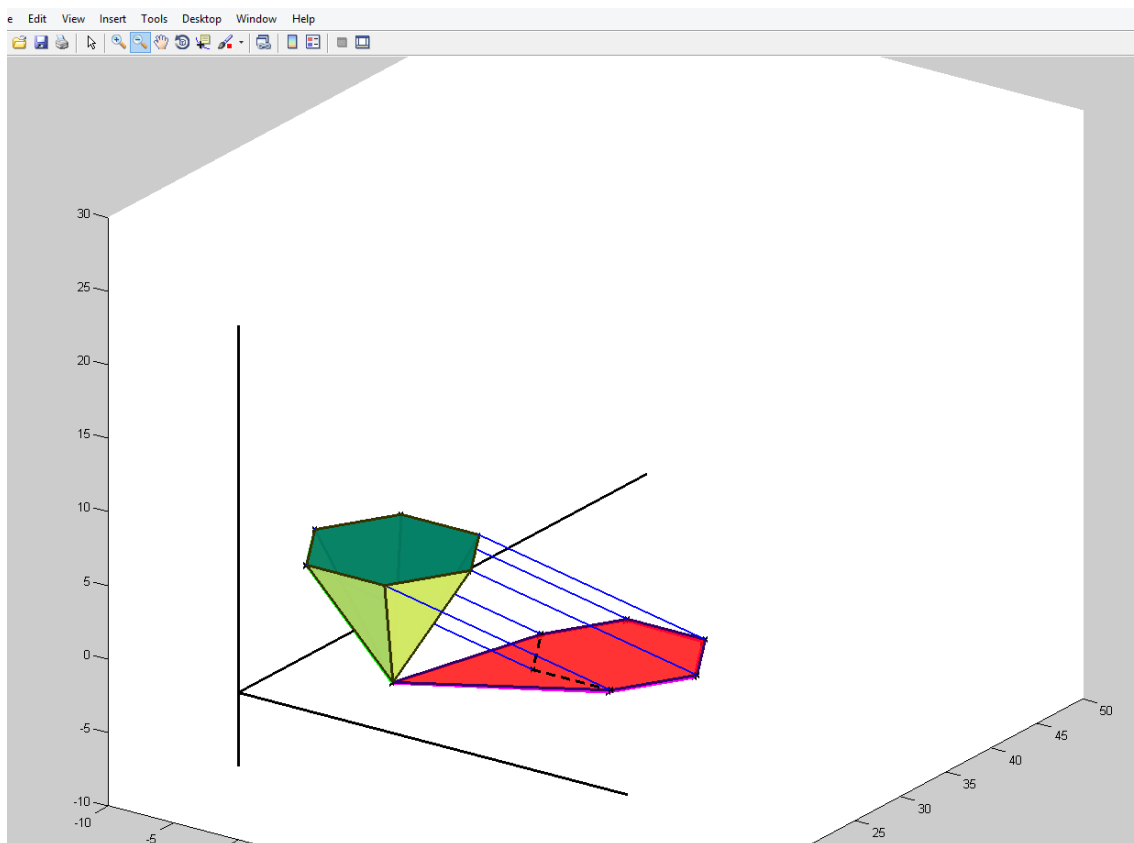
V současné době jde vývoj počítačů rychle kupředu a spolu s tím se neustále požaduje větší výkon. Důležitým cílem je to, aby většina toho, co se v počítači zobrazí, vypadala co nejvíce realisticky. Vezmeme například v úvahu počítačové hry, které se neustále rozvíjejí. S každou novou hrou se grafika zdokonaluje. Zobrazení ve virtuálním světě počítačových her je opravdu velice realistické, v čemž osvětlení a stíny hrají velkou roli. Co je opravdu důležité, je to, že počítač není jenom jednou z oblastí, ve kterých se osvětlení používá, ale také je nástrojem k sestrojení osvětlení.

V dnešní době zásluhou počítačů máme více možností. Rychle se rozvíjí počítačová grafika a spolu s tím roste počet softwarů vhodných pro nejrůznější účely. Také existuje množství programů, které se dají používat v deskriptivní geometrii. V této kapitole se budeme hlavně zabývat použitím softwaru pro osvětlení těles.

Softwary jsou zaprvé užitečné proto, že pomocí nich lze celou prostorovou situaci naprogramovat a spolu s tím lépe pochopit a představit si, jak osvětlení funguje. Podívejme se na obrázek 3.18, na kterém je zobrazeno pracovní okno softwaru MATLAB<sup>11</sup>. Na tomto obrázku je znázorněná prostorová situace z úlohy 4, kterou jsme rozebírali ve třetí kapitole. Jediným rozdílem od zadání úlohy 4 je to, že jehlan znázorněný v MATLABu není dutý. Modře jsou znázorněny světelné paprsky, vedené každým bodem podstavy.

---

<sup>11</sup> MATLAB – matrix laboratory (zkratka z anglického jazyka), což v češtině znamená maticová laboratoř.



**Obrázek 3.18.** Ukázka úlohy v softwaru MATLAB.

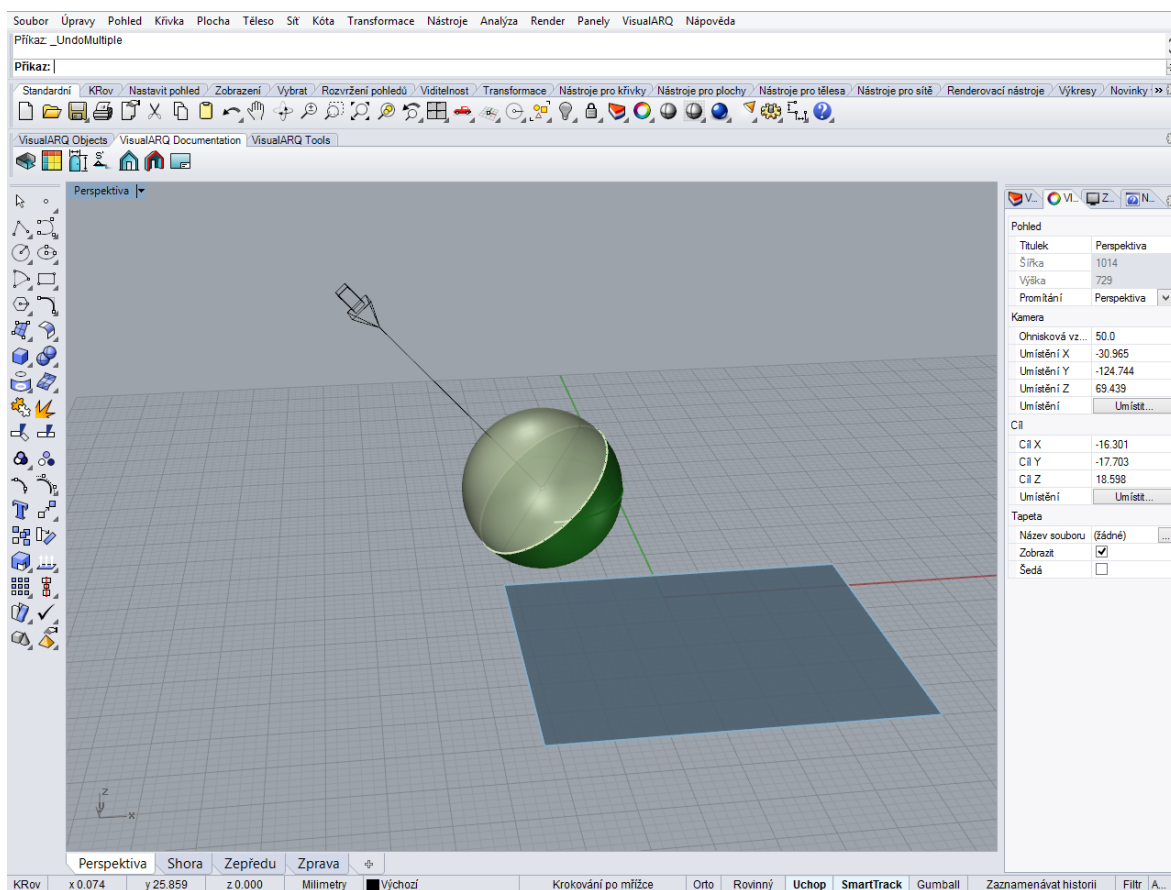
Na přiloženém CD, které je součástí této práce, čtenář může nalézt tento příklad v plné elektronické verzi, ve které se dá s celou situací zahýbat a různě ji pootočit. Ukázaný příklad je v příloze uveden i s postupnou atraktivní animací.

V programu MATLAB se pracuje pomocí programovacího jazyka. Všechny objekty se zadávají pomocí matic. MATLAB se hodí pro úlohy zadávané analyticky. Podobným softwarem je Maple. Programovací jazyk Maplu připomíná Pascal, naprogramovat v něm nějaké těleso a ještě i osvětlení není jednoduchý úkol, ale dají se řešit nějaké analytické záležitosti.

Matlab a Maple jsou matematickými softwary, které se více hodí pro analyticky zadané úlohy, v úlohách na sestavení osvětlení ale často nemáme analytické vyjádření těles, které potřebujeme osvětlit, k tomu potřebujeme modelovací softwary. Dobrým modelovacím programem pro sestavení osvětlení je například Rhinoceros<sup>12</sup>, ve kterém lze intuitivně

<sup>12</sup> Často se používá zkratka Rhino.

modelovat tělesa, bez doplňkových znalostí matematických rovnic nebo jiných matematických struktur. V softwaru Rhinoceros se dá namodelovat prostorová situace. Může také nahradit rýsování na papíře, pokud v softwaru pracujeme pouze s rovinnými objekty. Pro účely naší práce je ale velmi užitečné to, že je v tomto programu možné modelovat také osvětlení. Lze zde zadávat parametry osvětlení, přímo umístit zdroj světla nebo zadat směr a pak program spočítá, jak bude vypadat výsledný stín.



**Obrázek 3.19.** Pracovní okno v softwaru Rhinoceros.

Například se vrátíme k situaci, kterou jsme měli v podkapitole 2.4 Osvětlení koule, a k obrázku 2.6. Budeme uvažovat stejnou kouli, stejný směr osvětlení, a tuto prostorovou situaci vymodelujeme v softwaru Rhinoceros. Na obrázku 3.19 můžeme vidět pracovní okno v softwaru Rhinoceros, na kterém je znázorněná uvažovaná situace. Směr osvětlení je již zadán, což znázorňuje černá šipka.

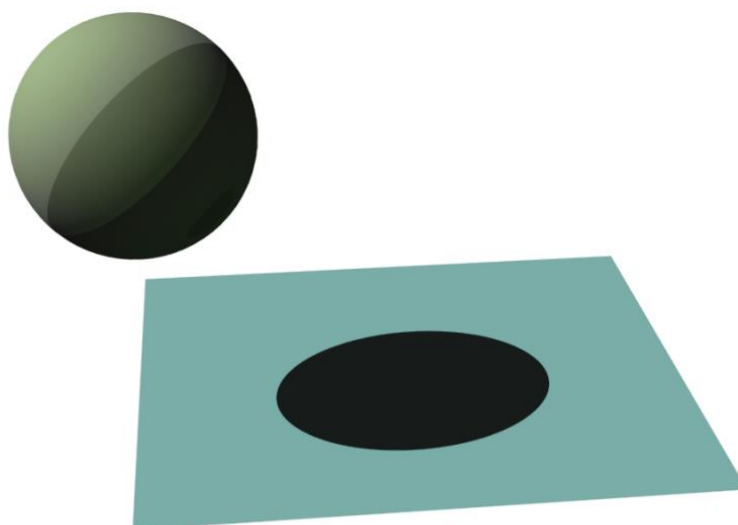
---

Rhino se široce používá v průmyslovém designu, architektuře, CAD/CAM konstrukcích, automobilovém a šperkovém designu.

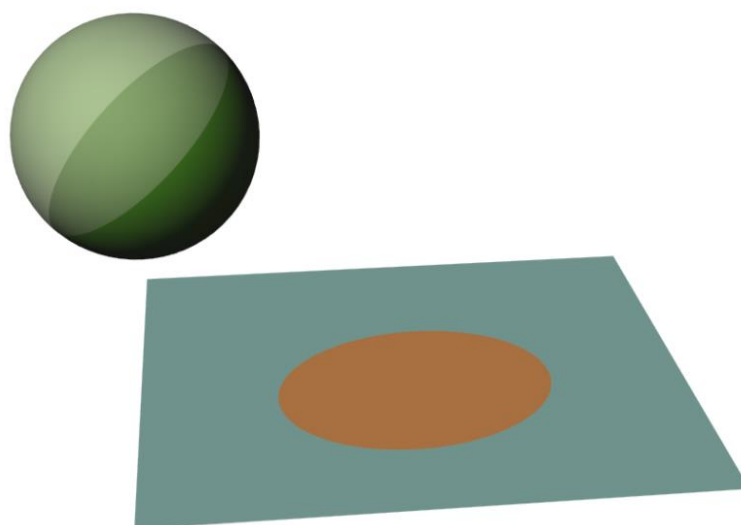
Nyní necháme Rhino spočítat stín na danou rovinu, tak dostaneme stejný výsledek, jaký jsme dostali na obrázku 2.6 pomocí sestrojení světelné válcové plochy.

Podívejme se na obrázek 3.20, kde je znázorněn stín vymodelovaný v Rhinoceros a obrázek 3.21, na kterém je znázorněná elipsa, kterou jsme dostali z obrázku 2.6 pomocí průniku roviny se světelnou válcovou plochou (zde už válcovou plochu nezobrazujeme).

Vidíme, že vržený stín tvoří stejné plochy. Tím pádem vyplývá ještě jeden účel, ke kterému můžeme software Rhino používat: pomocí softwaru můžeme vždy sami sebe kontrolovat při řešení úloh na osvětlení.

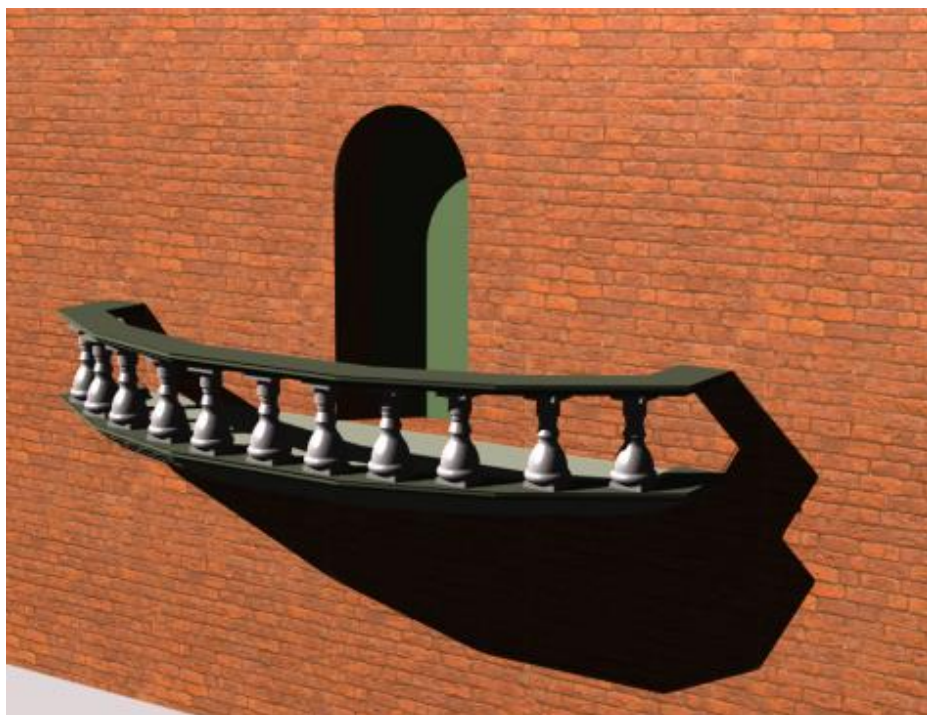


**Obrázek 3.20.** Stín koule spočítaný pomocí softwaru Rhinoceros.



**Obrázek 3.21.** Stín koule sestrojený v Rhinoceros, jako průnik rotačního válcového prostoru a roviny.

Software Rhinoceros lze používat k modelování také složitějších situací. Lze modelovat osvětlení s několika zdroji světla nebo používat bodové, plošné či lineární světlo. Nebo například budeme mít velké množství nějakých složitějších těles v obecné poloze. Sestrojování stínu bodově by bylo složitou úlohou pro ruční práci. Podívejme se například na obrázek 3.22. Tady byly namodelovány skupiny těles, použity byly parametry technického osvětlení, potom Rhino samostatně spočítal, jak budou vypadat příslušné stíny, s ohledem na všechna tělesa. Pro ruční rýsování by byla tato úloha velmi náročná.



**Obrázek 3.22.** Ukázka úlohy v softwaru Rhinoceros.

Jak bylo uvedeno v poznámce 1.5, v rysech z deskriptivní geometrie se nezabýváme mírou svítivosti a jinými složitějšími parametry osvětlení. Modelovací software ale může spočítat některé náročnější úlohy, které neumíme řešit nebo jsou pro ruční rýsování příliš komplikované. Můžeme si všimnout například, že na obrázku 3.19 na sloupech je také tzv. polostín (mezi vlastním stínem a osvětlenou částí) a odlesk.

Podobným programem je Auto CAD. Auto CAD je také softwarem, který můžeme různými způsoby užívat pro osvětlení. Čtenář může nalézt více informací o metodách používaných softwaru pro výpočet stínů v (H.Porttmann, 2007).

## Závěr.

V této bakalářské práci jsme probrali nejdůležitější pojmy a vlastnosti geometrického osvětlení. Dozvěděli jsme se o různých druzích osvětlení, konkrétně o středovém, rovnoběžném osvětlení a o speciálním případě rovnoběžného osvětlení o tzv. technickém osvětlení. Také nyní už víme, co to je vlastní a vržený stín a čím se liší od meze stínu.

Celá práce je zaměřena na rovnoběžné osvětlení do roviny, poskytuje popis principů a vlastností výše zmiňovaného druhu osvětlení. Velice podrobně jsou uvedeny metody, pomocí kterých dokážeme sestrojovat stíny těles. Popsané metody jsou procvičiny na konkrétních příkladech, přičemž jsme se věnovali především rovnoběžnému promítání. Principy osvětlení by ale zcela analogicky platily i ve středových promítáních. U většiny příkladů jsou zadání uvedena tak, aby si je čtenář mohl nakreslit a zkusit úlohy vyřešit samostatně. Doporučuji čtenáři procvičit úlohy na konci práce, které jsou uvedené bez řešení.

Téma geometrie stínu není zdaleka vyčerpáno. Lze se dále zabývat osvětlením ve středovém promítání, doplnit více informací o středovém a technickém osvětlení. Toto téma má velký potenciál pro další rozšíření materiálu.

Práce *Geometrie stínu* by mohla posloužit všem zájemcům, kteří se chtějí blíže seznámit s geometrií stínů.



## Symbolika a značení.

$A^x$  (resp.  $B^x, C^x$  a td.)... stín bodu  $A$  ( resp.  $B, C$  a td.) do půdorysny

$A^+$  (resp.  $B^+, C^+$  a td.)... stín bodu  $A$  ( resp.  $B, C$  a td.) do nárýsny

$A'$  (resp.  $B', C'$  a td.)... stín bodu  $A$  ( resp.  $B, C$  a td.) do obecné roviny

■ ... konec poznámky, věty

$|AB|$  ... velikost úsečky  $AB$

## Seznam použité literatury.

- [1] ČERNÝ J., KOČANDRLOVÁ M., *Konstruktivní geometrie*. vyd. ČVUT. Praha 1998.
- [2] ČURBANOV, V. I, SIDOROVSKAJA L. L. a LAPŠOV A. J.. *Těni v ortogonálních projekcích*. Uljanovsk, 2007.
- [3] DOLEŽAL, J. *Základy geometrie a Geometrie*. [online] - Dostupné z: <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Uvod.html>
- [4] DRÁBEK, K.; HARANT, F.; SETZER, O.. *Deskriptivní geometrie II*: SNTL, Bratislava 1979
- [5] GRIGORJEVA, O. *Geometričeskije osnovy teorii tenej*. 2. vyd. Iževsk, 2008.
- [6] KLIMUCHIN, A.G. *Těni i perspektiva*. Moskva, 2010.
- [7] KOROTKIJ, V.A. *Těni, axonometrija, perspektiva*. Čeljabinsk, 2010
- [8] LECIUS, E.P. *Postrojenije tenej i perspektivy rjada architekturnych form*. Moskva: Architektura-C, 2005. ISBN 5-9647-0061-6.
- [9] POTTMANN, H. *Architectural geometry*. 1st ed. Exton: Bentley Institute Press, 2007, 303 s. ISBN 978-1-934493-04-5.
- [10] PEREVOZKIN, J., KRAMAROVSKAJA V. a ROMANOVA A.. *Načertatel'naja geometrija: učebno-metodičeskoe posobie*. Tjumeň, 2011.
- [11] ŠAFAŘÍK, J. VUT v Brně, fakulta stavební. Ústav matematiky a deskriptivní geometrie [online] - Dostupné z: <http://vyuka.safarikovi.org>
- [12] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I*. 2. revid. vyd. Praha: SNTL, 1977.