OBSAH

Abstrakt

Název práce: Program pro výuku funkcí ve středoškolské matematice

Autor: Daniel Míča

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc., Katedra didaktiky matematiky

e-mail vedoucího: robova@karlin. mff.cuni.cz

Abstrakt: Text diplomové práce popisuje vlastnosti nově vzniklého programu **Funkce** a také obsahuje několik zpracovaných ukázek a nápadů na jeho využití ve výuce či přípravu na ni. Předností programu **Funkce** je možnost dynamické změny parametrů funkce pomocí posuvníků. Tím se vyvolá okamžité překreslení grafu funkce s novými hodnotami parametrů. Výběr předpisů funkcí v programu není omezen pouze na autorem připravené, ale uživateli je dovoleno zadat vlastní předpis funkce a pracovat s ním stejně jako s připravenými.

Klíčová slova: matematika, funkce, grafy funkcí, didaktika

Title: Software for Teaching of Functions at Secondary School Mathematics

Author: Daniel Míča

Department: Department of Didactics of Mathemathics

Supervisor: RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Supervisor’s e-mail address: robova@karlin. mff.cuni.cz

Abstract: The text of this dissertation work refers to a new software program named **Functions,** which demonstrate how might be helpful during lessons or to prepare them.

A great advantage of the **Functions** is a capability to change parameters dynamically with track bars. These track bars create an immediate redrawing with its new values. The selection of formulas of the functions in program is not limited by the author, but also there is a possibility to create your own ones.

Keywords: mathematics, functions, graph of functions, didactics

Úvod

Vzniku diplomové práce předcházelo vytvoření programu v rámci semináře *Tvorba výukových programů v systému Famulus* pod vedením doc. dr. Leoše Dvořáka, kde byl mnou vytvořen program, který byl prvopočátkem zde předkládaného programu **Funkce**.

Jelikož původní verze programu byla závislá na systému Famulus a pracovala pouze pod operačním systémem DOS, rozhodl jsem se celý program přepsat v programovacím prostředí Delphi. Tím vznikl program použitelný pod operačním systémem Windows, což je dnes v podstatě už nutnost, protože by jinak neměl šanci na masovější rozšíření a použití. Nehledě na to, že „pod DOS-em“ v dnešní době již téměř nikdo nepracuje.

Program původně vznikl proto, že jsem si sám nedokázal rychle představit průběhy různých složitějších funkcí a nedokázal jsem si představit, co se stane s grafem funkce při změně konkrétního parametru v předpisu funkce. Tak jsem si vytvořil program (v systému Famulus), který překresloval graf funkce se změnou parametru pomocí posuvníku. Postupně se program rozrostl o možnost výběru různých funkcí a jejich parametrů.

Nynější verze programu **Funkce** je již ovlivněna mojí pedagogickou praxí a s tím souvisejícími odlišnějšími potřebami. To hlavní ale samozřejmě zůstalo, program umí zobrazit graf většiny základních funkcí, které se vyučují na základní a střední škole. Také plynulá změna parametrů pomocí posuvníků je samozřejmostí. Přibylo zobrazení až tří grafů funkcí v jedné soustavě souřadnic, čímž se zvýšilo použití programu například při řešení soustavy rovnic atd. Nezbytnou součástí je možnost tisku grafů, ukládání funkcí nebo jejich soustav do souboru, ukládání grafu funkcí do obrázku atd. Významnou a jednou z nejdůležitějších částí programu je možnost, ve které si uživatel sám vytvoří funkci, čímž není výběr omezen jen na funkce mnou zadané. Tím se možnosti programu pro uživatele značně rozšiřují.

Z programu se stává didaktická pomůcka při výuce funkcí a je možné ji použít všude tam, kde existují nějaké funkční závislosti. Program **Funkce** tedy není koncipován jako výukový program, neboť sám o sobě neučí a nevysvětluje, ale lze ho využít při výkladu, studiu závislostí a vztahů, při domácí přípravě, při „hraní“ si s matematickými objekty.

Použití programu při výuce vyžaduje po technické stránce počítač umístěný ve třídě nejlépe s připojeným dataprojektorem, nebo počítačovou učebnu, kde by sami studenti mohli s tímto programem pracovat. Lze jím v podstatě nahradit použití grafické kalkulačky, které jsou vzhledem k jejich ceně často nedostupné a které na mnohých školách nejsou vůbec k dispozici.

Diplomová práce je členěna do tří hlavních kapitol.

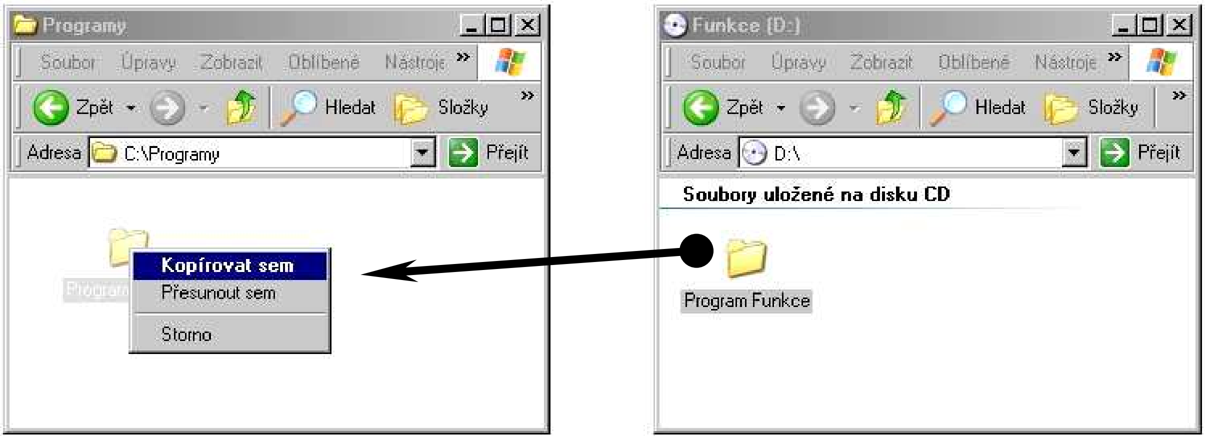
První kapitola obsahuje pokyny pro instalaci a minimální požadavky na software a hardware počítače.

Druhá kapitola obsahuje stručný popis programu a jednotlivých příkazů.

Třetí kapitola zpracovává konkrétní příklady využití tohoto programu ve výuce. Při výběru a zpracování jednotlivých příkladů jsem vycházel ze současných učebnic pro základní a střední školy [2], [4], [6], [7], [8].

1 Instalace programu

Instalace programu není nijak náročná. Vzhledem k tomu, že se nejedná o rozsáhlou aplikaci, stačí zkopírovat adresář *Program Funkce*, který se nachází na přiloženém CD, do adresáře, který si uživatel sám zvolí na pevném disku svého počítače. Obr. 1.1 představuje situaci, při níž si uživatel na svém počítači vytvořil adresář *Programy* a do něj kopíruje celý adresář *Program Funkce* z CD mechaniky.



Obr. 1.1: Kopírování složky programu

Program se pouští souborem *Funkce.exe*, který se nachází ve zkopírovaném adresáři *Program Funkce* obr. 1.2.

Obr. 1.2: Soubor Funkce.exe

Program ke své práci potřebuje dostatečný výkon z důvodu nutnosti rychlých výpočtů a kreslení, proto jsou doporučené minimální hardwarové a softwarové požadavky následující:

- procesor Pentium III 500 MHz a vyšší,
- operační paměť RAM 256 MB a vyšší,
- operační systém Windows 98 a vyšší, nebo Windows NT a vyšší

Samotný program **Funkce** nezabírá velké místo na disku počítače. Je v podstatě tak malý, že se může zkopírovat na disketu a pomocí ní snadno přenášet.

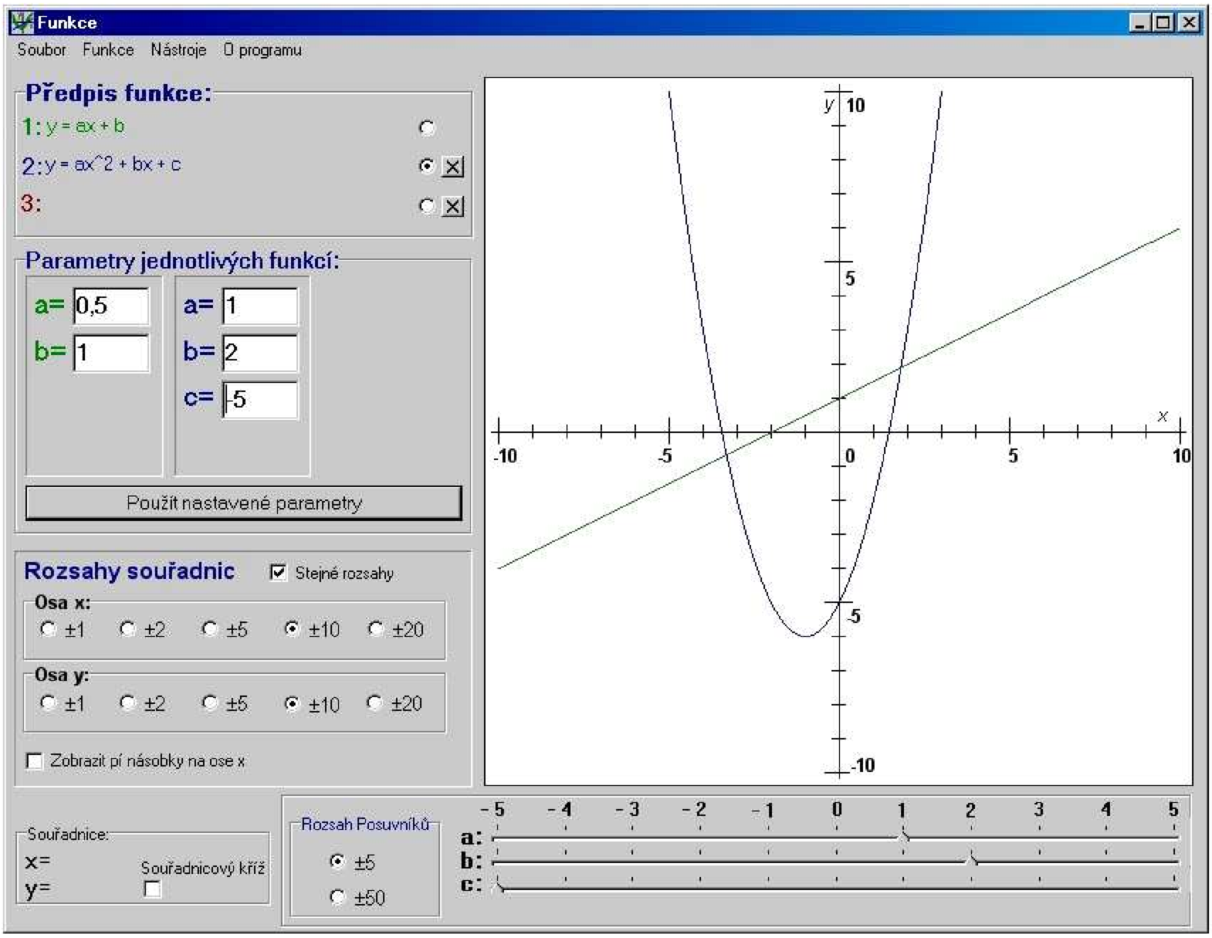
I když je program **Funkce** vytvořen v programovacím prostředí Delphi, tak ke svému spuštění toto prostředí nepotřebuje.

2 Program Funkce

2.1 Celkový vzhled programu Funkce

Celkový vzhled programu Funkce je prezentován na obr. 2.1.

Hlavní okno programu je členěno do tří základních částí. V pravé největší části je bílá kreslící plocha pro zobrazení osového kříže a grafů funkcí. V levé části postupně nalezneme předpis funkce (jedné až tří najednou), zápis hodnot použitých parametrů náležících jednotlivým funkcím, rozsahy souřadnic a hodnoty souřadnic bodů z grafu. Ve třetí spodní části je umístěn panel s posuvníky pro plynulou změnu použitých parametrů.



Obr. 2.1: Celkové okno programu

2.2 *Menu **Soubor***

2.2.1 Menu **Otevřít a Uložit**

Program **Funkce** obsahuje jako většina programů v hlavním menu standardní položku ***Soubor***. Nabídka podmenu obsahuje tyto položky: *Otevřít, Uložit funkci, Uložit sestavu, Uložit jako BMP, Nastavení aplikace, Tisk, Nastavení tisku a Konec*. Rozbalenou nabídku ***Soubor*** ukazuje obr. 2.2.

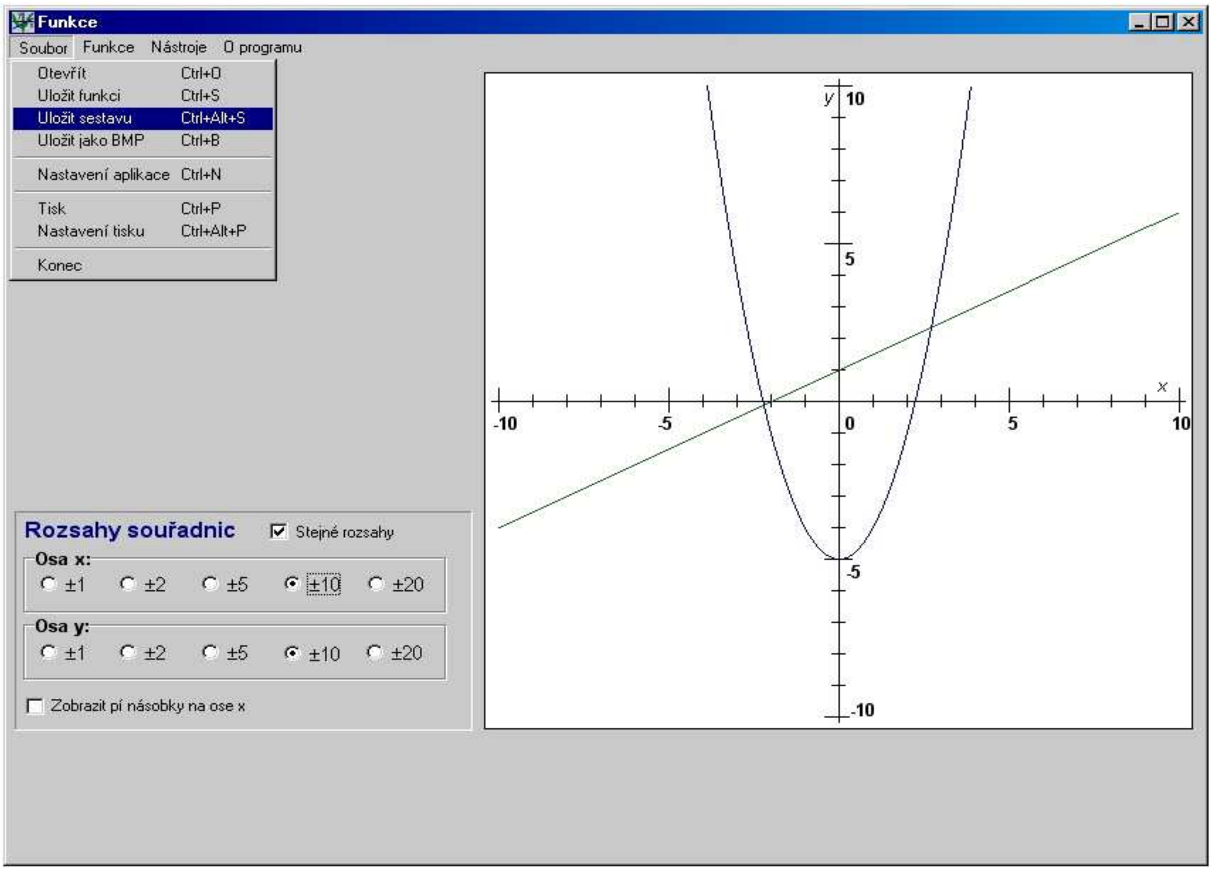
Obr. 2.2: Menu ***Soubor***

Oproti pořadí v nabídce popíšeme nejprve druhou a třetí položku. Položka *Uložit funkci* umožňuje uložit do souboru aktuálně používanou funkci i s aktuálně nastavenými hodnotami parametrů. Zobrazujeme-li například graf funkce $y = ax^2 + bx + c$ s nastavenými parametry $a = 1$, $b = 2$, $c = -5$ jako na obr. 2.1, tak tento stav můžeme uložit do souboru použitím položky *Uložit funkci.* V souboru je tato informace uchována ve tvaru zobrazeném na obr. 2.3. Tento typ ukládání je vhodný například v situaci, kdy potřebujeme prezentovat více různých grafů funkcí po sobě a nechceme se zdržovat jejich vybíráním z menu a nastavováním všech jejích parametrů. Všechny funkce si předem připravíme a uložíme, a pak už pouze načítáme jednu funkci za druhou, přičemž se nám automaticky nastavují hodnoty jejich parametrů.

```
[Typ_ulozeni]
Typ=1
[Funkce]
FceZobraz=y = ax^2 + bx + c
FcePocitej=a*x^2 + b*x + c
[Parametry]
A=1
B=2
C=-5
D=0
```

Obr. 2.3: Informace o uložené funkci

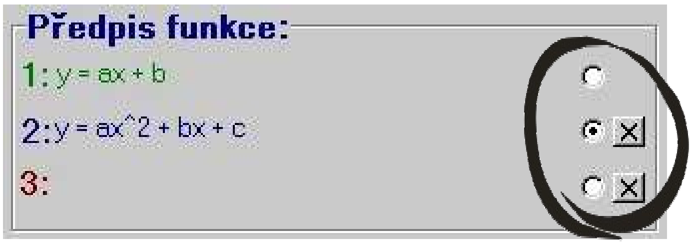
Položka menu *Uložit sestavu* slouží k uložení všech zobrazených funkcí a hodnot jejich používaných parametrů do jednoho souboru. Spolu s nimi se dále uloží informace o nastaveném rozsahu souřadnic, rozsahu posuvníků a dalších volitelných možností. Mějme například tuto situaci: Necháme zobrazit grafy dvou funkcí. První lineární funkci s předpisem $y = ax + b$ a parametry $a = 0{,}5$ a $b = 2$. Druhou kvadratickou funkci s předpisem $y = ax^2 + bx + c$ a parametry $a = 1$, $b = 0$ a $c = -5$. Dále z didaktických důvodů vypneme zobrazení některých podpůrných informací nacházejících se v levé a spodní části programu. Takto nastavenou situaci můžeme při hodině využít třeba pro to, aby studenti určili, grafy jakých funkcí jsou vykresleny a aby z grafu vyčetli jejich parametry. Takto připravenou situaci můžeme uložit jako celek pomocí položky *Uložit sestavu* (obr. 2.4).



Obr. 2.4. Uložení připravené sestavy

A nyní zpátky k položce *Otevřít* . I když jsme výše uvedli, že můžeme ukládat dvěma způsoby (*Uložit funkci*, *Uložit sestavu*), tak položka *Otevřít* je v menu pouze jednou. A to proto, že program při načítání sám pozná, jde-li o jednu funkci, nebo o sestavu funkcí a její nastavení.

Samostatná funkce se nám načte na aktuálně nastavenou pozici. Tu zvolíme označením puntíku u předpisu funkcí obr. 2.5.



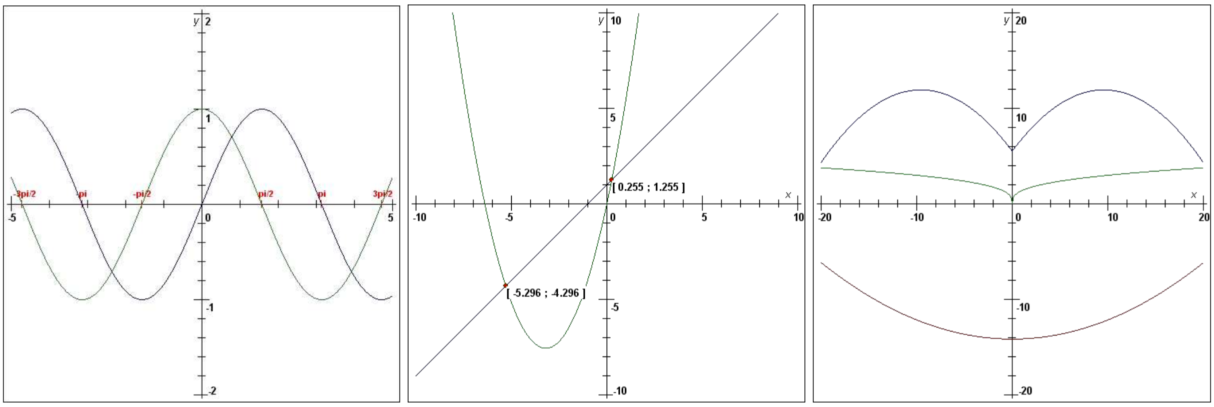
Obr. 2.5: Označení pozice pro načítání funkce

Je-li už na tomto místě nějaká jiná funkce, bude touto načítanou funkcí přemazána. Chceme-li „starou“ funkci zachovat, tak novou musíme načítat do prázdné pozice (na obr.2.5 pozice třetí funkce).

Načtení sestavy má za následek úplné zrušení všech dosud používaných funkcí a nastavení. Ze souboru se načtou nové funkce s parametry a zaktualizuje se veškeré nastavení podle načítané sestavy.

Všechny funkce a sestavy se standardně ukládají do adresáře *Save*, nezvolí-li uživatel jiné místo, který je podadresářem adresáře *Program Funkce*. Soubor s uloženou funkcí má koncovku *.fce*, soubor s uloženou sestavou má koncovku *.stv*.

Položka menu *Uložit jako BMP* slouží k uložení vykresleného grafu do obrázkového souboru (formát bmp). Do tohoto obrázku se uloží vše, co je vykresleno v soustavě souřadnic. Takovýto obrázek může sloužit k přípravě prezentací, tvorbě testů čí pracovních listů pomocí textových editorů. Ukázka takových obrázků je na obr. 2.6.



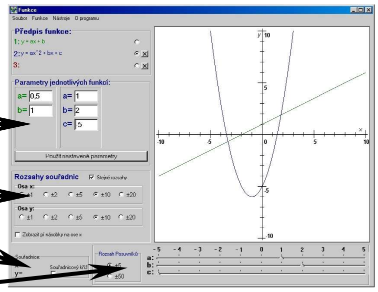
Obr. 2.6: Ukázka uložených obrázků

2.2.2 Menu **Nastavení aplikace**

Položka menu *Nastavení aplikace* umožňuje uživateli zapnout nebo vypnout zobrazení (zviditelnění) jednotlivých panelů okna aplikace (obr. 2.7).

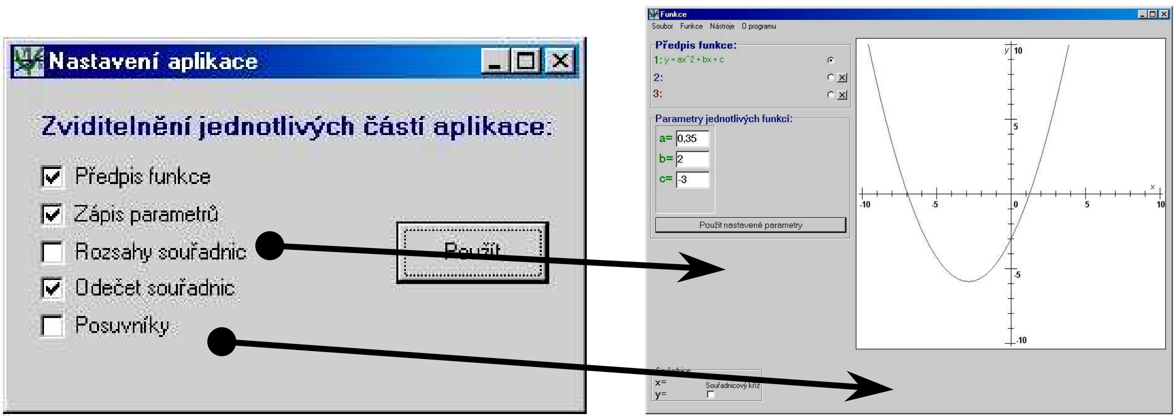
Vypnout lze tyto části programu:

- panel s předpisem funkce,
- panel se zápisem parametrů,
- panel s volbou rozsahu souřadnic,
- panel souřadnice pro zobrazení souřadnic bodů grafu,
- panel s posuvníky pro plynulou změnu parametrů



Obr. 2.7: Ilustrace k nastavení

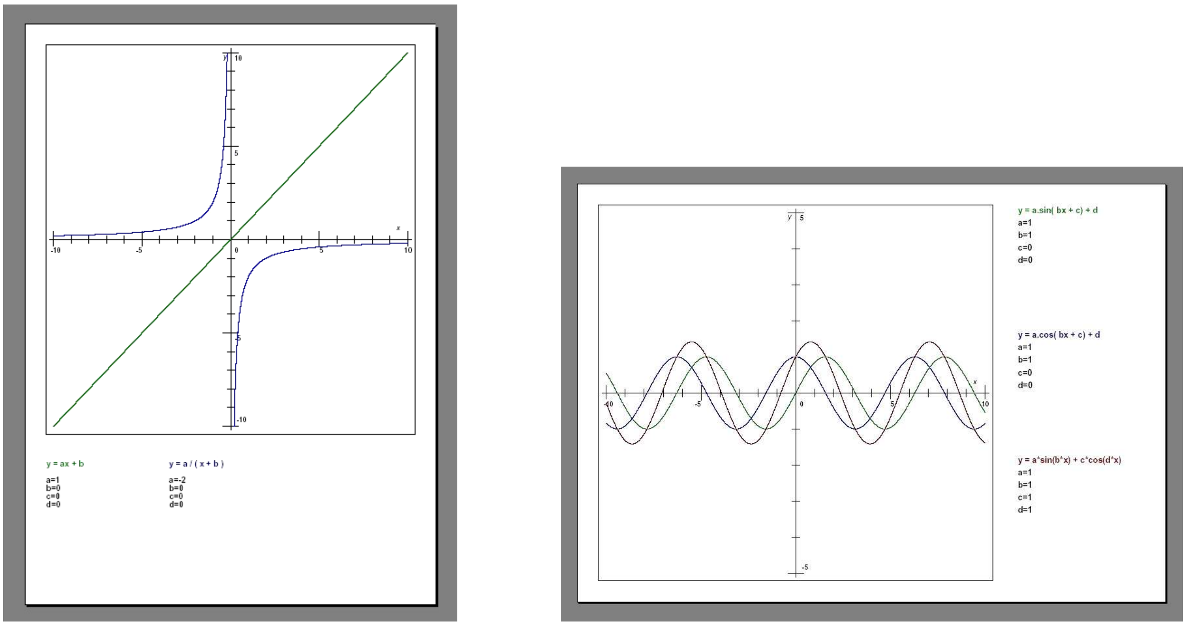
Tato nastavení jsou vhodná zejména tehdy, nechceme-li rozptylovat žáky řadou volitelných možností a chceme-li například ukázat pouze graf funkce spolu s jejím předpisem, nebo chceme-li, aby žáci z grafu funkce určili, o jakou funkci se jedná, vypneme zobrazení předpisu funkce. Příklad jednoho možného nastavení je na obr. 2.8.



Obr. 2.8: Nastavení zobrazení panelů aplikace.

2.2.3 Menu **Tisk a Nastavení tisku**

Položka menu *Tisk* umožňuje vytisknout zobrazenou funkci nebo funkce na tiskárně. Program umí rozpoznat, je-li tiskárna nastavena na tisk na šířku nebo na výšku papíru. Podle toho na papír rozmístí grafy funkcí, předpisy funkcí a zápis jejich parametrů, jak ilustruje obr. 2.9.



Obr. 2.9: Ukázka tisku na výšku nebo šířku papíru

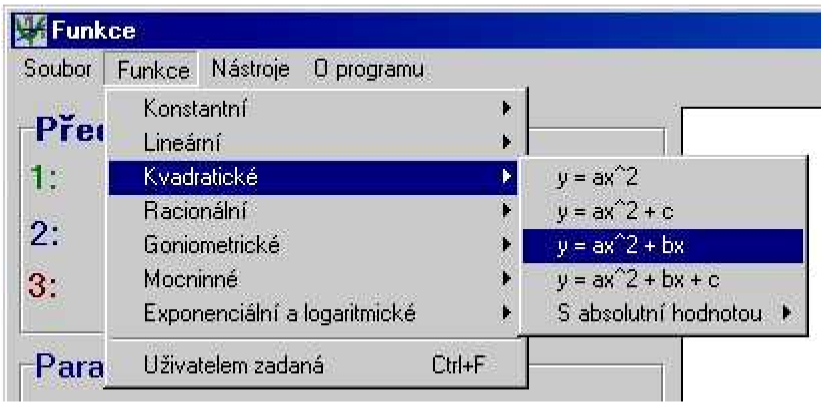
Položka menu *Nastavení tisku* umožňuje zvolit, jestli se s grafem funkcí bude tisknout i jejich zápis, zápis hodnot parametrů a vykreslení průsečíku dvou nebo tří funkcí. Okno nastavení ukazuje obr. 2.10.

Obr. 2.10: Nastavení tisku

Položka menu *Konec* ukončí práci s programem **Funkce**.

2.3 Menu **Funkce**

Položka hlavního menu ***Funkce*** nabízí výběr z připravených základních funkcí roztříděných v souladu s učebnicí [6], nabídku ukazuje obr. 2.11. Jsou zde tyto typy funkcí: *Konstantní, Lineární, Kvadratické, Racionální, Goniometrické, Mocninné, Exponenciální a logaritmické*. Každý typ funkce již obsahuje konkrétní předpisy funkcí. Vzhledem k tomu, že při tvorbě menu nelze použít horních ani dolních indexů, je například předpis kvadratické funkce zapsán ve tvaru *ax^2 + bx + c* na místo obvyklého $ax^2 + bx + c$. Obdobně druhá odmocnina je zapsána počítačovým výrazem *sqrt(x)* místo $\sqrt{x}$, třetí odmocnina *x^(1/3)* místo $\sqrt[3]{x}$. Logaritmy jiného základu než 10 jsou zapsány například jako *log2(x)* místo $log_2 x$.



Obr. 2.11: Menu a podmenu výběru funkce

Položka *Uživatelem zadaná* je důležitou součásti menu výběru funkce. Zde si může uživatel zadat vlastní předpis funkce, čímž se tento program stává velice užitečnou pomůckou při zkoumání méně běžných funkcí. Okno vlastního zápisu funkce je na obr. 2.12.

V případě, že uživatel zadává „vlastní“ předpis funkce, musí dodržet určitá „počítačová“ pravidla zápisu matematických funkcí a operátorů. Předpis funkce, kterou si uživatel zapíše sám, se v panelu *Předpis funkce* se zobrazí v „počítačovém“ zápisu narozdíl od funkcí připravených přímo v menu, které používají pro zápis a pro výpočet různý tvar zápisu. Například zobrazený tvar kvadratické funkce *y = ax^2 + bx + c* se počítá podle zápisu *y = a*x^2 + b*x + c*.

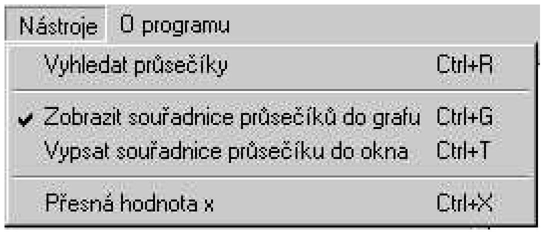
Jak psát předpis funkce:

- operátory + a – se samozřejmě píší stejně,
- pro operátor „*krát*“ se používá znak * , pro operátor „ *děleno*“ se používá znak / ,
- program podporuje standardní goniometrické funkce: sinus → *sin(x)*, kosinus → *cos(x)*, tangens → *tg(x)*, kotangens → *ctg(x)*, arcussinus → *arcsin(x)*, arcuskosinus → *arcos(x)*, arcustangens → *arctg(x)*, arcuskotangens → *arcctg(x)*,
- absolutní hodnotu $|x|$ píšeme ve tvaru *abs(x)*,
- druhou odmocninu $\sqrt{x}$ ve tvaru *sqrt(x)*,
- přirozený logaritmus ve tvaru *ln(x)*, dekadický logaritmus ve tvaru *log(x)*,
- exponenciální funkce e^x ve taru *exp(x)*, nebo *e^x*,
- jakákoliv mocnina se píše pomocí operátoru ^, například *x^2, x^3, a^x, (a*x) ^2* nebo *a^(x+b)*, apod.,
- program podporuje i důležitou konstantu π ve tvaru *pi*, a e psanou totožně *e*, které lze použít kdekoliv v zápisu funkce např.: *y =pi* sin(pi*x) + e* ,
- kvůli větší přehlednosti lze použít mezery mezi funkcemi a operátory, které se při výpočtu nijak neprojeví,
- samozřejmostí je použití závorek, např. *(a*x + b)*(-5)*(sin(x^(3)) – cos(x))*

Obr. 2.12: Zadání vlastního předpisu funkce

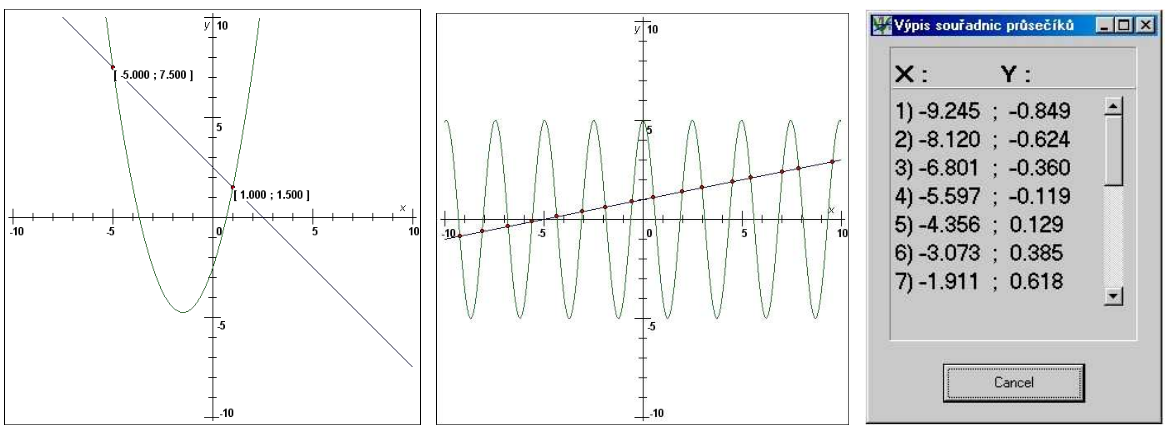
2.4 Menu **Nástroje**

V položce hlavního menu ***Nástroje*** jsou k dispozici dvě pomůcky pro práci s funkcemi (obr. 2.13).



Obr. 2.13: Nabídka menu *Nástroje*

Jak už název napovídá, položka menu *Vyhledat průsečíky* umožní zobrazit společné body protínajících se grafů funkcí. Průsečíky se v grafu vyznačí červeným puntíkem. Pro výpis souřadnic průsečíků máme na výběr dvě možnosti (obr. 2.13). První *Zobrazit souřadnice průsečíků do grafu* nám vypíše souřadnice přímo do grafu těsně vedle červených puntíků (obr. 2.14). Druhá možnost *Vypsat souřadnice průsečíků do okna* vytvoří zvláštní okno, kam se souřadnice průsečíků vypíší pod sebe (obr. 2.14). Obě možnosti lze použít současně, každou zvlášť nebo žádnou. Vypnout zobrazení souřadnic průsečíků do grafu je výhodné v případě, kdy se grafy protínají na mnoha místech a zobrazené souřadnice by mohly být psány přes sebe a tudíž by nebyly čitelné. Nástroj *Průsečíky* lze použít jenom tehdy, jsou-li zadány dvě nebo tři funkce současně. Neprotínají-li se grafy, program vypíše hlášení :„*funkce se neprotínají*“.[1]

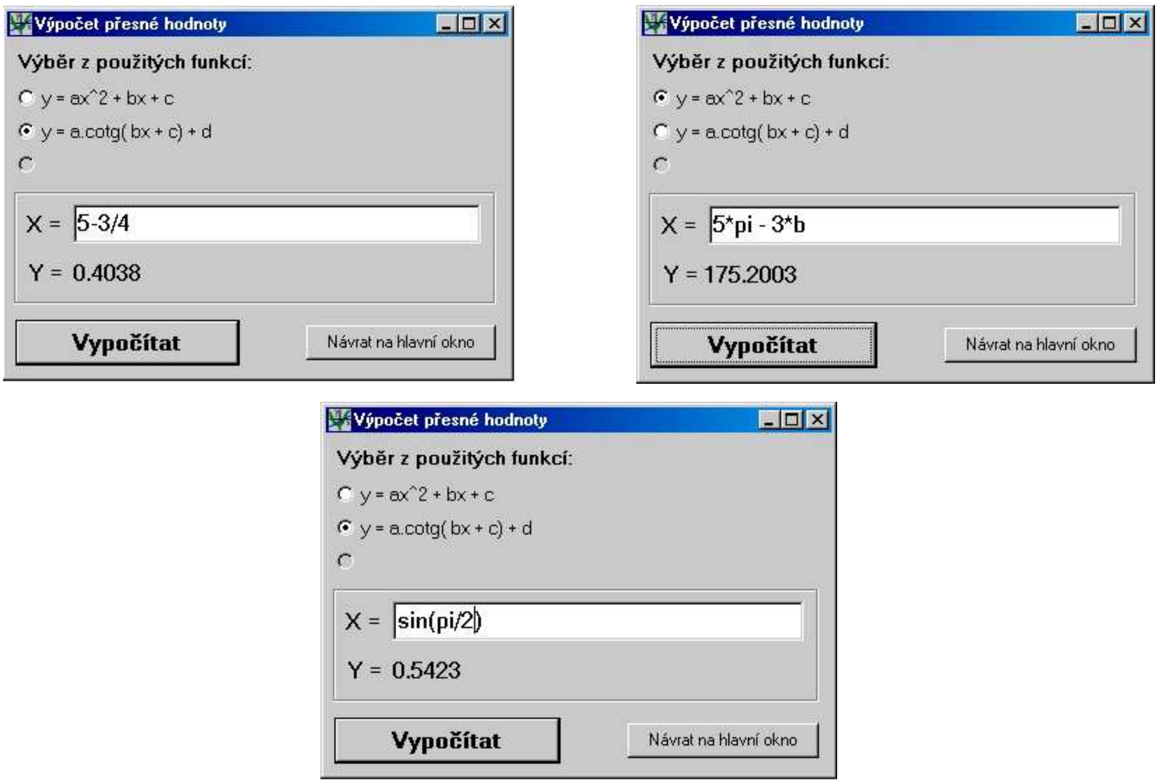


Obr. 2.14: Znázornění průsečíků grafu, vypsání souřadnic na pracovní plochu a do okna

[1] Technická poznámka: program **Funkce** ve většině případů průsečík grafů nalezne, ale při jistých „extrémních případech“ se mu to podařit nemusí. Program hledá průsečíky v celém rozsahu souřadnic a pro všechny zobrazené dvojice grafů a tak se muselo přistoupit ke kompromisu, mezi rychlostí výpočtu a spolehlivostí.

Položka menu *Přesná hodnota* je nástroj sloužící k výpočtu funkční hodnoty *y* z přesně zadané hodnoty *x*. Hodnota *y* se počítá podle předpisu vybrané funkce. Jsou-li zadány dvě nebo tři funkce, máme možnost si vybrat, pro kterou funkci chceme hodnotu spočítat. Do příslušného editačního okénka (obr. 2.15) napíšeme zvolenou hodnotu *x* a výpočet potvrdíme klávesou Enter nebo stiskem tlačítka *Vypočítat*. V zápisu hodnoty *x* můžeme použít všechny možné „korektní“ způsoby zadání čísel. Například: celá nebo desetinná čísla (5; -12; 1,8 …), zlomky (1/2; 5/3; -8/(3+7/2); …), písmena parametrů a konstant, která mají stejnou hodnotu použitou v předpisu funkce (a; b; c; d; pi; e,) nebo dokonce čísla i písmena v kombinaci s funkcemi (sin(pi/2); 5^3; …). obr. 2.15.

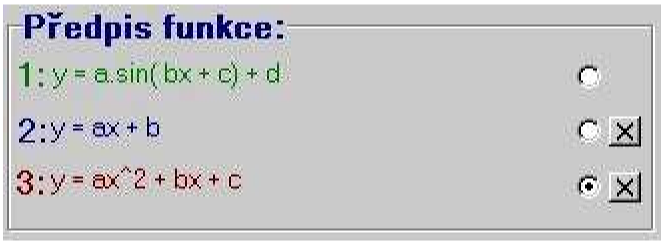
Hodnoty výpisu souřadnic jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa, výsledné hodnoty u výpočtu „přesné hodnoty“ jsou zaokrouhleny na čtyři desetinná místa.



Obr. 2.15: Různé způsoby zadávání hodnoty *x* pro výpočet přesné hodnoty

2.5 Panel **Předpis funkce**

V panelu *Předpis funkce* (obr. 2.16) se zobrazují předpisy jedné až tří možných funkcí. Předpisy jsou barevně rozlišeny. Touto barvou jsou také jednotlivé grafy funkcí kresleny do souřadnicové soustavy.



Obr. 2.16: Panel *Předpis funkce*

V uvedeném panelu také můžeme přepínat (vybírat) tzv. aktuální funkci, ve které budeme moci měnit parametry. Výběr aktuální funkce provádíme kliknutím myši na puntík nebo kliknutím myši přímo na předpis vybírané funkce. Zrušení (smazání) funkce provedeme kliknutím myši na křížek u příslušného předpisu funkce. Funkci číslo 1 zrušit nelze, protože alespoň jednu chceme zobrazit vždy.

2.6 Panel ***Parametry jednotlivých funkcí***

V panelu *Parametry jednotlivých funkcí* (obr. 2.17) jsou zobrazeny hodnoty jednotlivých parametrů, které jsou uvedeny v předpisu jednotlivých funkcí.

Zápisy parametrů (a =, b =, c =, d =) jsou od sebe rozlišeny barevně, shodně s barvou předpisu funkce z panelu *Předpis funkce*.

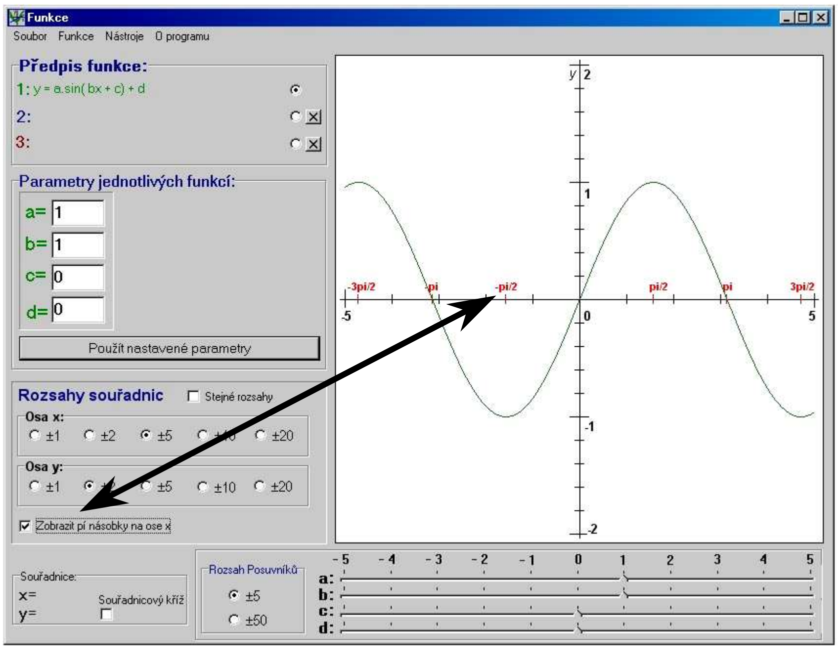
Obr. 2.17: Panel *Parametry jednotlivých funkcí*

Zobrazeny jsou pouze ty hodnoty parametrů, které jsou u funkce používány, a také pouze ty skupiny parametrů, jejichž předpisy funkcí jsou zadány. Hodnoty parametrů lze zadat u vybrané aktivní funkce tak, že číselnou hodnotu zapíšeme do příslušného editačního okénka a klávesou *Enter* potvrdíme, nebo přepíšeme všechna čísla parametrů a pro jejich „aktivaci" použijeme tlačítko *Použít nastavené parametry*. Program připouští i zápisy hodnot ve tvaru ½ místo 0,5, nebo hodnotu 3,14 ve tvaru *pi* a podobně.

2.7 Panel **Rozsahy souřadnic**

V tomto panelu (obr. 2.18) je možné vybírat rozsahy souřadnic na osách *x* a *y*. Při zaškrtnutém políčku u nápisu *Stejné rozsahy* se rozsahy obou os mění shodně. Není-li políčko *Stejné rozsahy* zaškrtnuto můžeme vybírat rozsahy pro každou osu zvlášť.

Obr. 2.18: Panel *Rozsahy souřadnic*

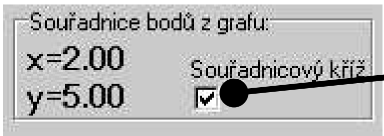


Obr. 2.19: Ukázka zobrazení pí násobků na ose *x*

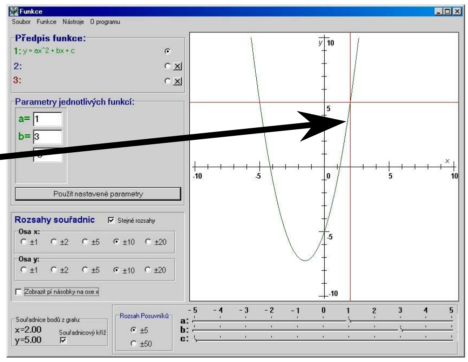
Při zaškrtnutí políčka u nápisu *Zobrazit pí násobky na ose x* se na osu *x* ke stávajícím hodnotám zobrazí i násobky čísla π (obr. 2.19). Tuto volbu je vhodné použít zejména u zobrazování grafů goniometrických funkcí.

2.8 Panel **Souřadnice**

V tomto panelu (obr. 2.20) se zobrazují hodnoty souřadnic z grafu, a to dvěma možnými způsoby. Při zaškrtnutém políčku *Souřadnicový kříž* se na zobrazovací ploše vykreslí červený kříž (obr. 2.21), jehož průsečík při pohybu myši kopíruje body grafu vybrané funkce.



Obr. 2.20: Panel *Odečet souřadnic*

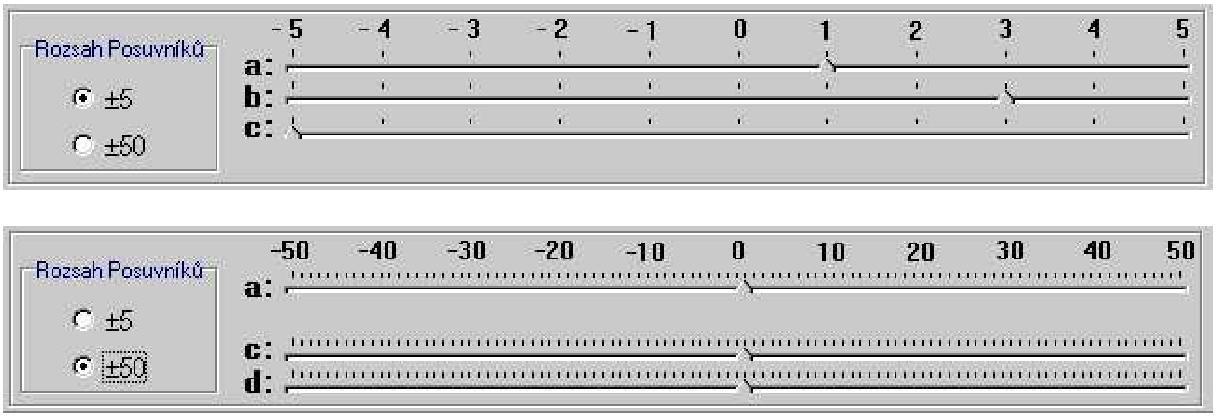


Obr. 2.21: Souřadnicový kříž

Není-li políčko *Souřadnicový kříž* zaškrtnuto, tak se při pohybu myši po ploše grafu zobrazí malý křížek a odečítáme hodnoty průsečíku tohoto kříže. Hodnoty odečítané oběma způsoby se zobrazují v panelu *Souřadnice* v políčku „x= “ a „ y= “ .

2.9 Panel **Posuvníky**

V tomto panelu (obr. 2.22) jsou pohyblivé posuvníky, kterými můžeme plynule měnit parametry vybrané funkce. Jsou zobrazeny pouze ty, které funkce ve svém předpisu používá.



Obr. 2.22: Panel *Posuvníky* zobrazen ve dvou možných rozsazích.

Na obr. 2.22 jsou zobrazeny dvě možnosti rozsahu hodnot parametrů v předpisu funkce. Jsou to hodnoty od –5 do +5, nebo od –50 do +50. Měnit hodnoty parametrů funkce pomocí posuvníků můžeme myší, a to tak, že klikneme na vybraný posuvník, tlačítko myši držíme a pohybujeme vpravo nebo vlevo. Po vybrání posuvníku (kliknutím myši) můžeme měnit polohu ukazatele (tím i parametry funkce) pomocí kurzorových kláves (šipek). Změna hodnot parametrů pomocí kurzorových kláves je pomalejší, ale plynulá, protože parametr prochází postupně hodnotami s krokem 0,01. Změna se nám okamžitě projeví překreslením grafu funkce s novými parametry a vypsáním nových hodnot parametrů v panelu *Parametry jednotlivých funkcí*.

3 Využití programu Funkce

V této kapitole uvedeme několik na sobě nezávislých příkladů použití programu **Funkce** ve výuce a přípravě na ni.

3.1 Lineární funkce

První základní funkce, vyučující se na střední (ale i základní) škole, je funkce lineární. Její definice zní:

Lineární funkce *je každá funkce na množině* ***R****, která je dána ve tvaru*

$$y = ax + b,$$

kde a, b jsou reálná čísla.

Speciálním případem lineárních funkcí jsou funkce pro něž je a=0, tj. funkce

$$y = b,$$

které nazýváme ***konstantní funkce****.*

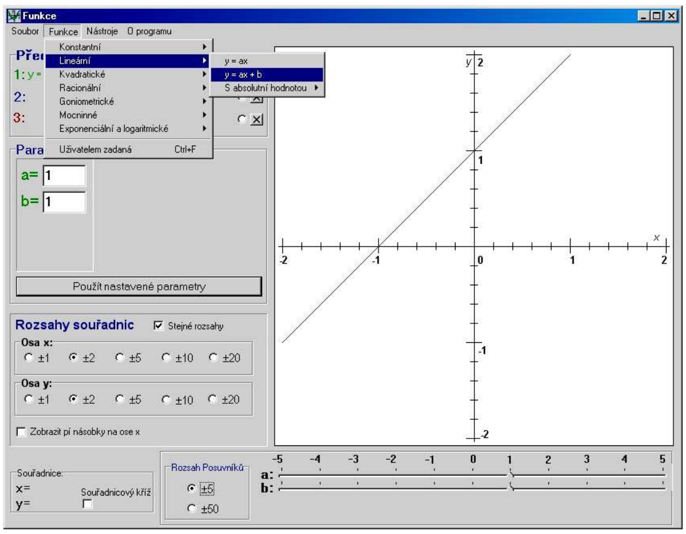
Pro lineární funkce, vyjádřené ve tvaru

$$y = ax,$$

tj. pro funkce dané vzorcem $y = ax + b$ v němž je $b = 0$, užíváme také název ***přímá úměrnost*** [6].

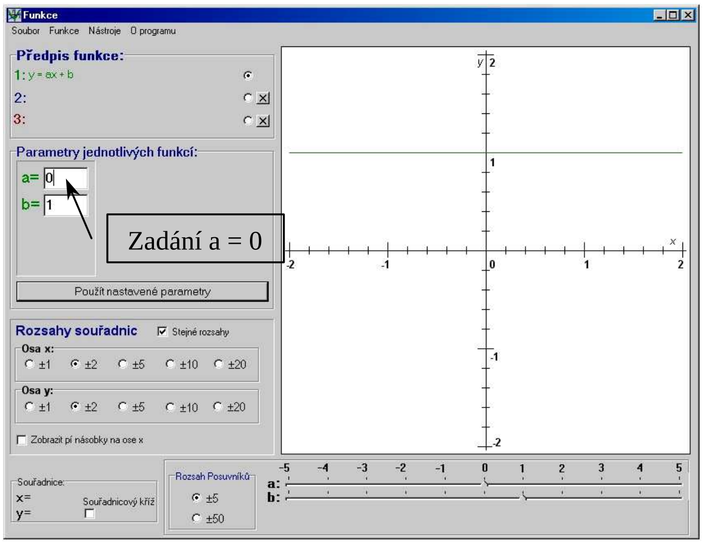
Při výkladu látky můžeme program **Funkce** využít následujícím způsobem:

Z menu *Lineární* vybereme příslušnou lineární funkci $y = ax + b$ a zobrazíme graf (obr. 3.1).



Obr. 3.1: Výběr a vykreslení grafu lineární funkce

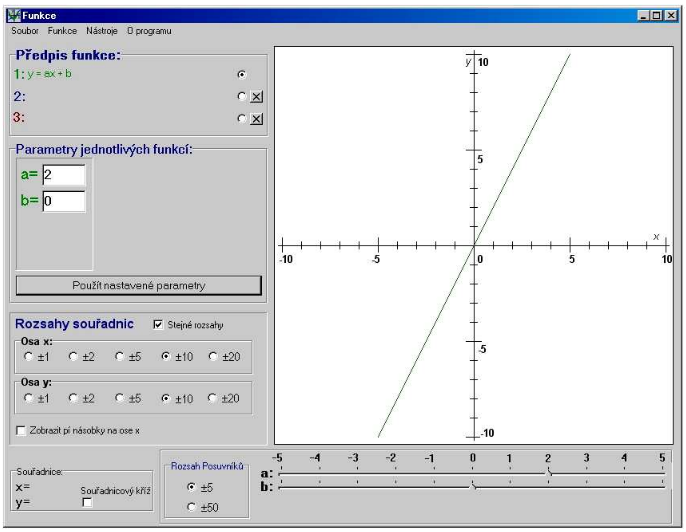
Tím ukážeme základní tvar grafu lineární funkce pro $a = 1$ a $b = 1$. V definici je zmíněn speciální případ konstantní funkce, která má tvar $y = b$, tedy parametr *a* u proměnné *x* je roven nule. V programu u zobrazené lineární funkce můžeme jednoduchým způsobem zadat nulu pro parametr *a*, a tím vykreslit nový graf (obr. 3.2).



Obr. 3.2: Změna parametru *a* v předpisu lineární funkce

Plynulou změnou parametru *b* pomocí odpovídajícího posuvníku můžeme názorně ukázat závislost tvaru grafu na této změně.

Pro lineární funkce vyjádřené ve tvaru $y = ax$ užíváme název **přímá úměrnost**. S tímto názvem (pojmem) se studenti seznámí v učivu matematiky i mimo výklad elementárních funkcí a to s předpisem *y* = *kx*, kde *k* je tzv. **koeficient přímé úměrnosti**. Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem (obr. 3.3).



Obr. 3.3: Graf přímé úměrnosti

U přímé úměrnosti se dá snadnou ukázat, jak sklon přímky závisí na velikosti parametru *k* (v našem případě je to parametr *a*).

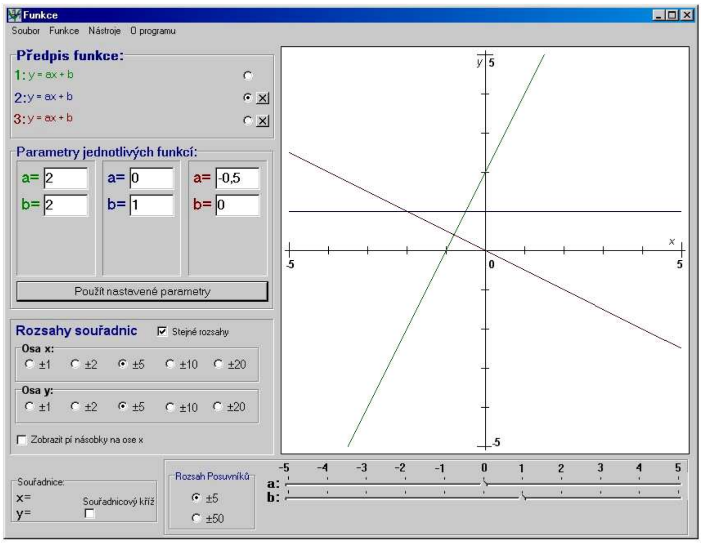
Nyní jsme na místě výkladu, kde je vhodné zdůraznit a ilustrovat rozdíly funkcí. Všechny tři grafy funkcí zobrazíme do téže soustavy souřadnic:

První funkce (zelená barva): obecný tvar lineární funkce $y = ax + b$, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Druhá funkce (modrá barva): konstantní funkce ve tvaru $y = ax + b$, kde $a = 0$, $b \neq 0$, tedy $y = b$.

Třetí funkce (červená barva): přímá úměrnost ve tvaru $y = ax + b$, kde $a \neq 0$, $b = 0$, tedy $y = ax$.

Vše ilustruje obr. 3.4.



Obr. 3.4: Porovnání všech tří grafů funkcí

Zde můžeme ukázat, jak se dá změnou hodnot parametrů pomocí posuvníků získat z jednoho tvaru grafu jiný, měníme-li příslušné parametry.

Rozebráním těchto tří situací můžeme snadno přejít k pochopení závislosti tvaru grafu na změně parametrů. V programu jednoduše ukážeme, že změnou parametru *a* u lineární funkce *y* = *ax* + *b* se mění „sklon“ přímky a změnou parametru *b* se graf posouvá ve směru osy *y*. Parametr *b* přímo určuje průsečík s osou *y*. Dále můžeme snadno ukázat, že pro kladný parametr *a* je funkce rostoucí a pro záporný parametr *a* je funkce klesající.

3.2 Sestrojení grafu kvadratické funkce

Pro přehlednost zde uvádím definici kvadratické funkce:

Kvadratická funkce *je každá funkce na množině* ***R*** *(tj. o definičním oboru R) daná ve tvaru*

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

kde $a \in R \setminus \{0\}$, $b,\ c \in R$.

Grafem kvadratické funkce je plynulá nepřerušovaná křivka, která se nazývá ***parabola***. [6]

Člen $\boldsymbol{ax^2}$ *v předpisu kvadratické funkce nazýváme kvadratický člen,* **bx** *nazýváme lineární člen a* **c** *je absolutní člen.*

Sestrojení grafu funkce $y = ax^2 + bx + c$ na papír je složitější než u lineární funkce. Stručně ukážeme postup při sestrojení grafu funkce $y = x^2 - 4x + 5$ a výsledek porovnáme s využitím programu **Funkce**.

Nejprve upravíme výraz $y = ax^2 + bx + c$ doplněním na druhou mocninu dvojčlenu:

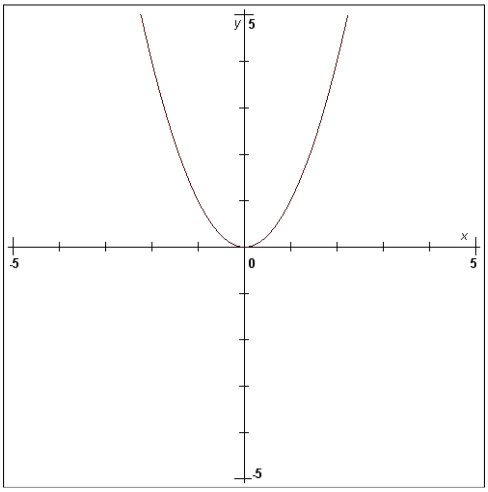
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

pro naši funkci platí :

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

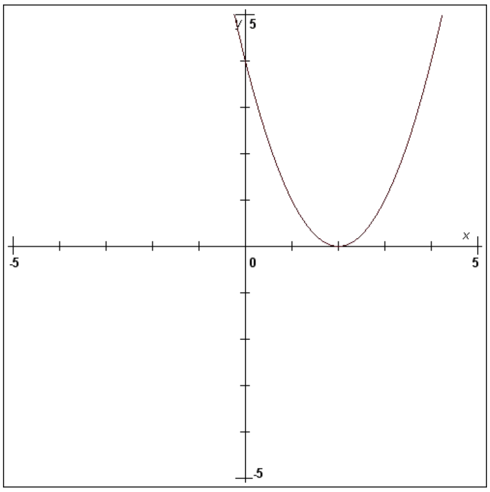
Graf funkce sestrojíme po částech:

1. Nejdříve sestrojíme graf funkce $y = ax^2$, v našem příkladu $y = x^2$ (obr. 3.5).



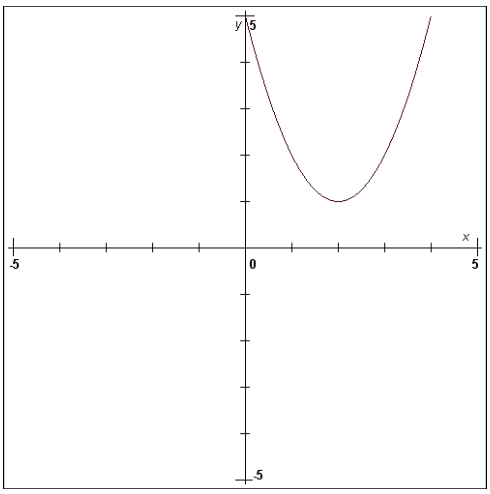
Obr. 3.5: Graf funkce $y = x^2$

2. Graf z předchozího bodu posuneme ve směru osy x obecně o $\frac{b}{2a}$ jednotek a to tak, je-li $\frac{b}{2a} > 0$ ve směru záporné poloosy x, je-li $\frac{b}{2a} < 0$ ve směru kladné poloosy x. V našem příkladu rýsujeme graf funkce $y = (x-2)^2$, který z původní pozice posouváme o 2 jednotky (určeno členem -2), ve směru kladné poloosy x (obr. 3.6).



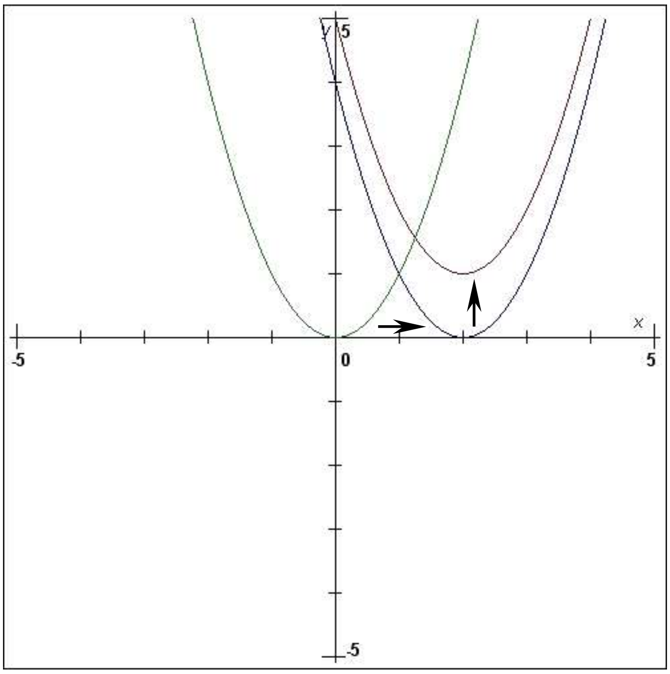
Obr. 3.6: Graf funkce $y = (x-2)^2$

3. Graf z druhého bodu posuneme ve směru osy y *obecně* o $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ jednotek tak, že je-li $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) > 0$ ve směru kladné poloosy y, je-li $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) < 0$ ve směru záporné poloosy y. Velikost posunutí v našem příkladu je o 1 jednotku ve směru kladné poloosy y. Rýsujeme graf funkce $y = (x-2)^2 + 1$ (obr 3.7).



Obr. 3.7: Graf funkce $y = (x-2)^2 + 1$

Všechny tři kroky můžeme simulovat programem **Funkce** tak, že z menu *Kvadratické* vybereme první funkci $y = ax^2$. Parametr a necháme nastaven na hodnotu 1. Druhou funkci musíme zadat pomocí menu *Uživatelem zadané* ve tvaru $y = (x-2)\hat{}2$. Třetí funkci zadáme také pomocí menu *Uživatelem zadané* ve tvaru $y = (x-2)\hat{}2+1$. Všechny tři funkce máme nyní zobrazeny v jedné soustavě souřadnic (obr. 3.8).



Obr. 3.8: Posloupnost kroků při získávání grafu kvadratické funkce

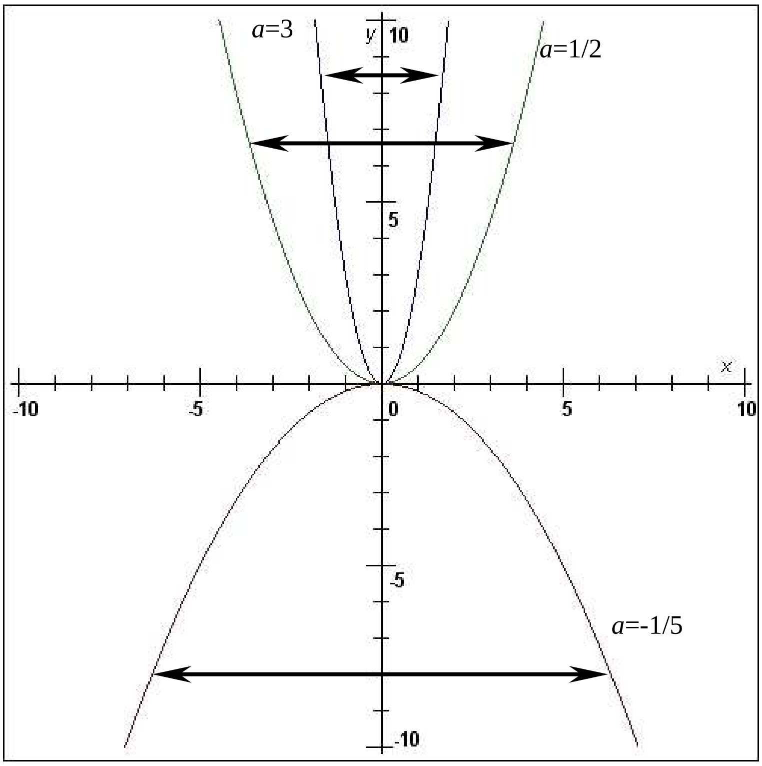
Rovnost vztahů $y = ax^2 + bx + c$ a $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ můžeme také ověřit programem **Funkce** tak, že první funkci $y = ax^2 + bx + c$ vybereme z menu *Kvadratické* a druhou pomocí menu *Uživatelem zadané* napíšeme ve tvaru $a*(x+b/(2*a))\hat{}2+(c-(b\hat{}2)/(4*a))$. Tento tvar představuje doplnění na druhou mocninu dvojčlenu. Při stejné změně jednotlivých parametrů obou funkcí dostaneme totožné grafy. V programu **Funkce** se výsledně oba grafy budou překrývat.

3.3 Závislost tvaru grafů funkcí na změně hodnot parametrů

Jedno ze základních využití programu **Funkce** je znázornění grafu funkce v závislosti na plynulé změně jejích parametrů v předpisu funkce.

V následující části názorně ukážeme, jak závisí tvar grafu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ na změně parametru *a*. Z menu *Kvadratické* vybereme první předepsanou funkci $y = ax^2$, kde chybí lineární a absolutní člen z obecného předpisu kvadratické funkce. Tím pádem nás nebudou tyto členy „rušit“ a my můžeme ukázat „čistou“ závislost grafu na změně parametru *a*. Pomocí posuvníku plynule měníme hodnotu parametru *a* a tím ukážeme:

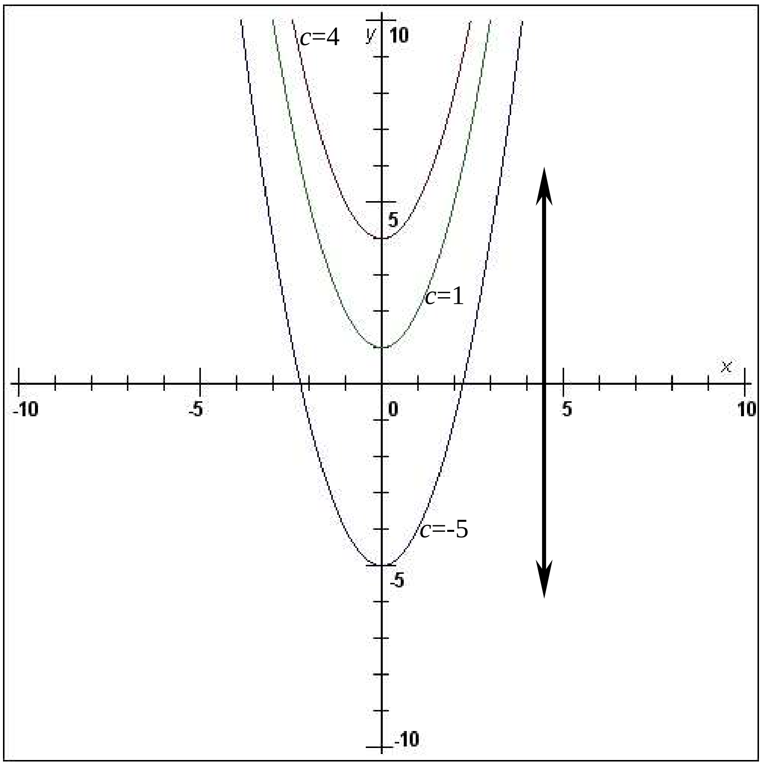
- je-li $a > 0$ a roste-li jeho velikost, tak se ramena paraboly k sobě přibližují,
- je-li $a < 0$ a klesá-li jeho hodnota, tak se graf vzhledem k původnímu převrátí podle osy *x* a opět se ramena paraboly k sobě přibližují (obr 3.9)



Obr. 3.9: Závislost grafu kvadratické funkce na změně parametru *a*

Vybereme-li z menu *Kvadratické* druhou předepsanou funkci $y = ax^2 + c$, kde je oproti předchozímu příkladu přidán absolutní člen *c*, můžeme názorně ukázat závislost na tomto parametru. Parametr *a* necháme pro tento případ nezměněn a roven jedné a pomocí posuvníku budeme plynule měnit hodnotu parametru *c*. Na grafu se změna projeví takto:

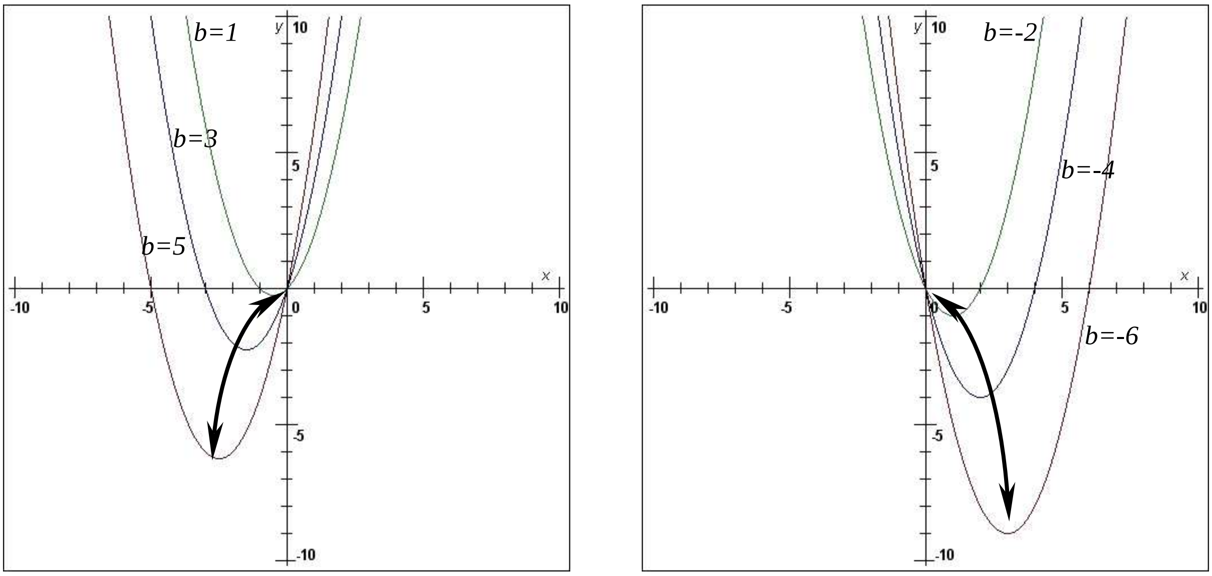
- zvětšováním hodnoty parametru *c* se celý graf posouvá ve směru osy *y* nahoru, zmenšováním hodnoty parametru *c* se celý graf posouvá směrem dolů,
- lze vypozorovat, že v tomto případě (pro $y = ax^2 + c$) je hodnota parametru *c* totožná s *y*-ovou souřadnicí průsečíku grafu s osou *y*,
- parametrem *c* měníme pouze vertikální pozici grafu (obr. 3.10)



Obr. 3.10: Závislost grafu kvadratické funkce na změně parametru *c*

Z menu *Kvadratické* vybereme třetí předepsanou funkci $y = ax^2 + bx$, kde přibyl lineární člen *bx* a parametr *c* byl vynechán. Parametr *a* opět necháme nezměněn (tj. $a = 1$) a budeme pozorovat chování grafu v souvislosti se změnou parametru *b*. Změna se projeví následovně:

- je-li $b > 0$ a roste-li jeho hodnota, pozorujeme posouvání grafu ve směru záporné poloosy *x* a zároveň záporné poloosy *y*,
- je-li $b < 0$ a roste-li jeho hodnota, pozorujeme posouvání grafu ve směru kladné poloosy *x* a zároveň záporné poloosy *y* (obr. 3.11)



Obr. 3.11: Závislost grafu kvadratické funkce na změně parametru *b*

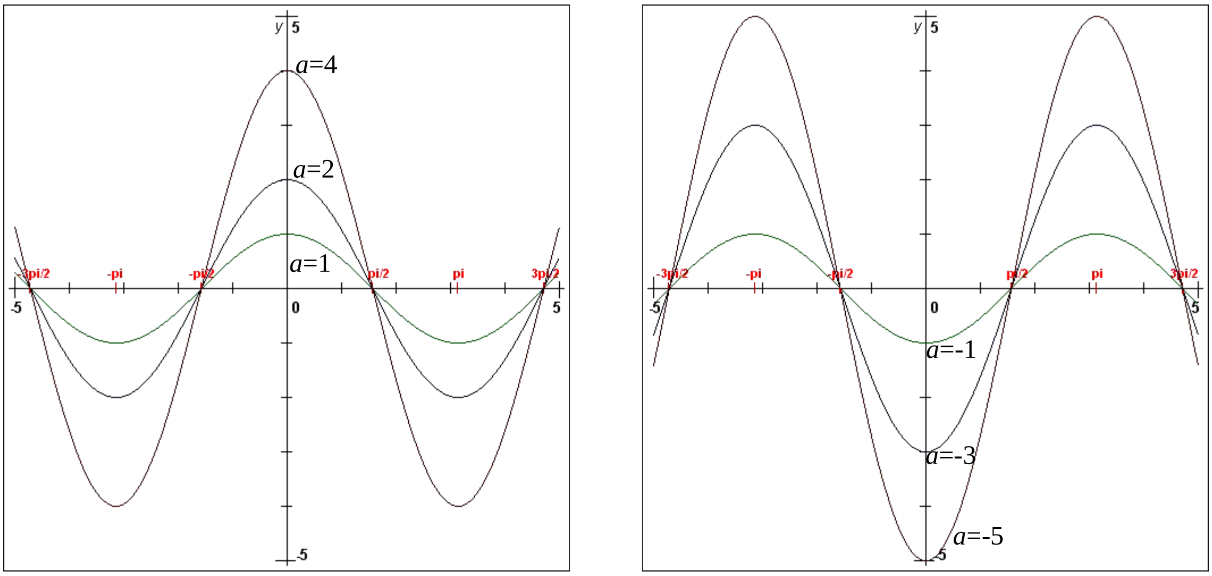
Vybereme-li z menu *Kvadratické* čtvrtou funkci $y = ax^2 + bx + c$, můžeme ukázat na jednom grafu závislost na všech třech parametrech a učinit závěr:

- změna parametru *a* se projeví změnou „šířky" paraboly, v záporných hodnotách převrácením kolem osy *x* a opět změnou „šířky" grafu,
- změna parametru *b* způsobí vertikální i horizontální posun grafu, na „šířku" paraboly nemá vliv,
- změna parametru *c* posouvá graf pouze vertikálním směrem a na „šířku" grafu také nemá vliv

Další funkcí, na které si ukážeme závislost grafu funkce na změnách parametrů, bude goniometrická funkce $y = a\cos(bx + c) + d$. Zde již uvedeme stručnější popis.

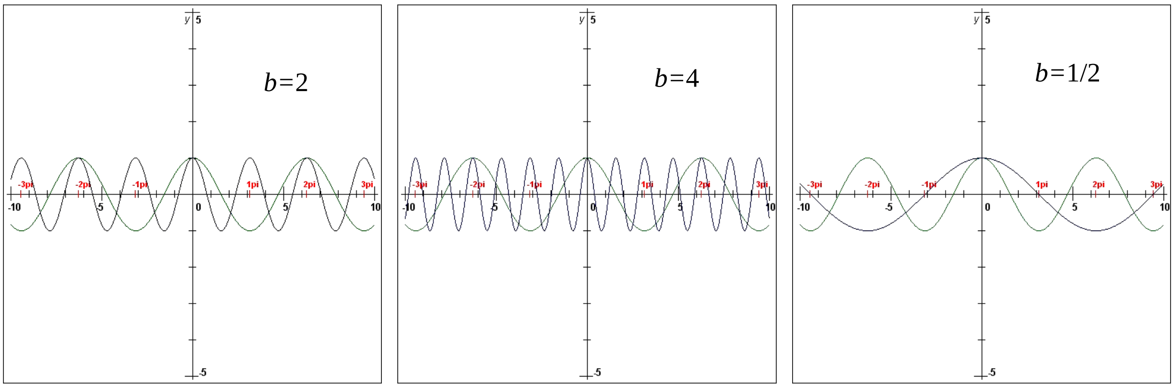
Funkci vybereme z menu *Gonoimetrické*, nastavíme parametry $b = 1, c = 0, d = 0$ a parametr *a* budeme měnit:

- poroste-li parametr *a* v kladných hodnotách, budou se maximální *y*-ové hodnoty grafu zvyšovat a minimální hodnoty dále zmenšovat, maximum bude dosahovat hodnoty *a*, minimum bude dosahovat hodnoty – *a*,
- podobně se graf funkce bude chovat při změně parametru *a* v záporných hodnotách s tím rozdílem, že celý graf bude překlopen podle osy *x*. (obr. 3.12)



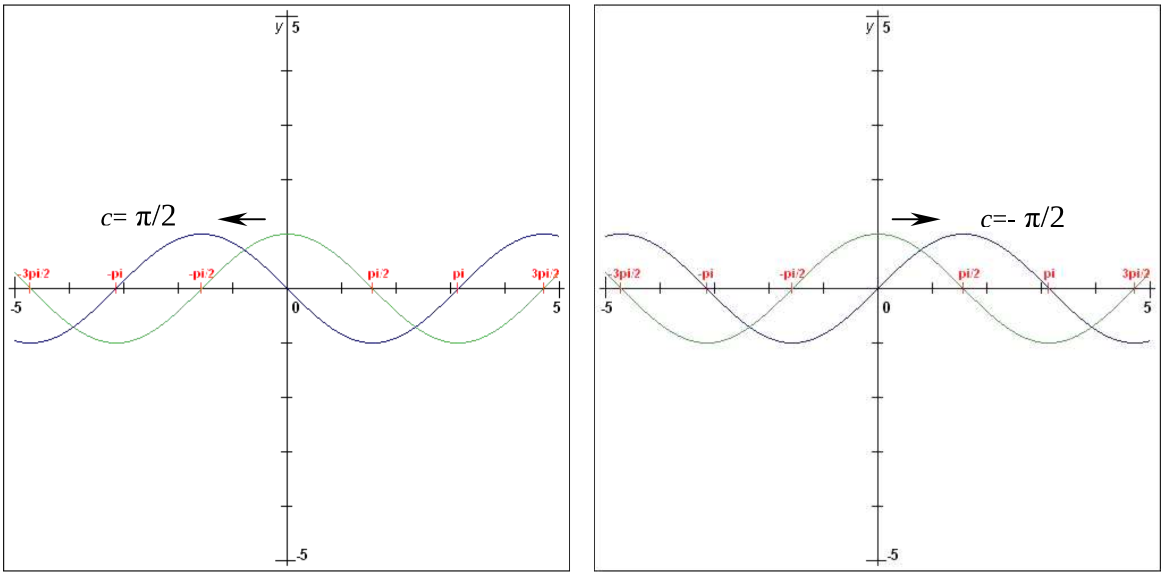
Obr. 3.12: Závislost grafu goniometrické funkce na změně parametru *a*

Změna parametru *b* se při zachovaných hodnotách parametrů $a = 1$, $c = 0$, $d = 0$ projeví změnou periody, tedy „zhuštěním“ či „roztažením“ vln kosinusoidy. Na obr. 3.13 používáme kvůli srovnání dva grafy funkcí, první s parametrem $b = 1$ (vykreslen zeleně) a druhý s jiným parametrem *b* (vykreslen modře). Můžeme snadno ukázat, že bude-li $b = 2$, tak se perioda oproti původní zmenšila a to z původní periody 2π na novou periodu π.



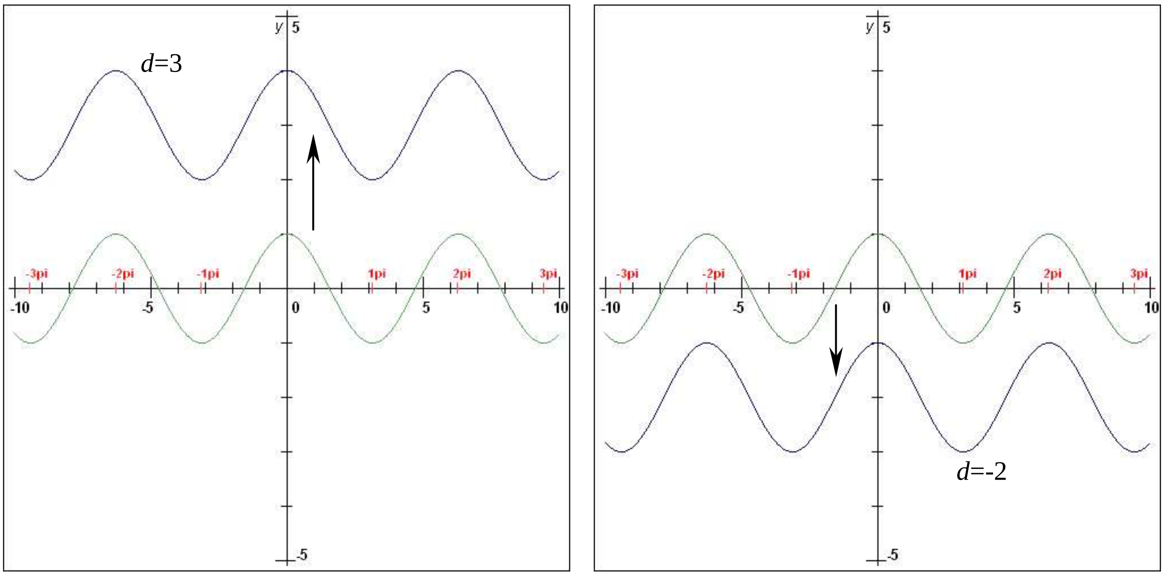
Obr. 3.13: Závislost grafu goniometrické funkce na změně parametru *b*

Zachováme-li parametry $a = 1$, $b = 1$, $d = 0$, můžeme zkoumat vliv změny parametru *c* na tvar grafu. Zde se dá využít zkušenosti z tvorby grafu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ a znalosti vlivu parametru *b* na tvar grafu. Také se zde projeví posun ve směru osy *x*, ale na rozdíl od kvadratické funkce se už nebude posouvat ve směru osy *y*. Pro $c > 0$ se graf funkce $y = a\cos(bx + c) + d$ posune o *c* jednotek ve směru záporné poloosy *x* a pro $c < 0$ se graf posune o *c* jednotek ve směru kladné poloosy *x* (obr. 3.14). V obrázku vykreslujeme pro srovnání základní tvar a posunutý.



Obr. 3.14: Závislost grafu goniometrické funkce na změně parametru *c*

Vliv parametru *d* na tvar a pozici grafu funkce $y = a\cos(bx + c) + d$ je stejný jako vliv parametru *c* na graf funkce $y = ax^2 + bx + c$. Celý graf se posouvá pouze ve vertikálním směru o *d* jednotek (obr. 3.15).



Obr. 3.15: Závislost grafu goniometrické funkce na změně parametru *d*

3.4 Grafické řešení rovnic a nerovnic

Součástí programu **Funkce** je nalezení průsečíků grafů dvou až tří funkcí. Toho lze především využít při grafickém řešení rovnic a nerovnic.

Při řešení rovnic či nerovnic využíváme výraz na levé (resp. pravé) straně rovnice či nerovnice jako předpis funkce, jejíž graf zobrazíme.

3.4.1 Grafické řešení rovnice

Při řešení lineárních rovnic je kromě výpočtu užitečná i metoda grafická kvůli větší názornosti a snadnějšímu pochopení řešení.

Jako první příklad jsem zvolil jednoduchou lineární rovnici $3x+1=\frac{1}{2}x$ s neznámou $x \in R$.

Řešení rovnice spočívá v tom, že nalezneme takové hodnoty *x*, pro něž budou výrazy na obou stranách rovnice nabývat stejných hodnot. Graficky řešení nalezneme tak, že sestrojíme grafy funkcí $y=3x+1$ a $y=\frac{1}{2}x$ do téže soustavy souřadnic. Nyní nalezneme průsečík grafů. Hodnota *x*-ové souřadnice průsečíku je řešením rovnice $3x+1=\frac{1}{2}x$.

Pomocí programu **Funkce** nalezneme průsečík následovně:

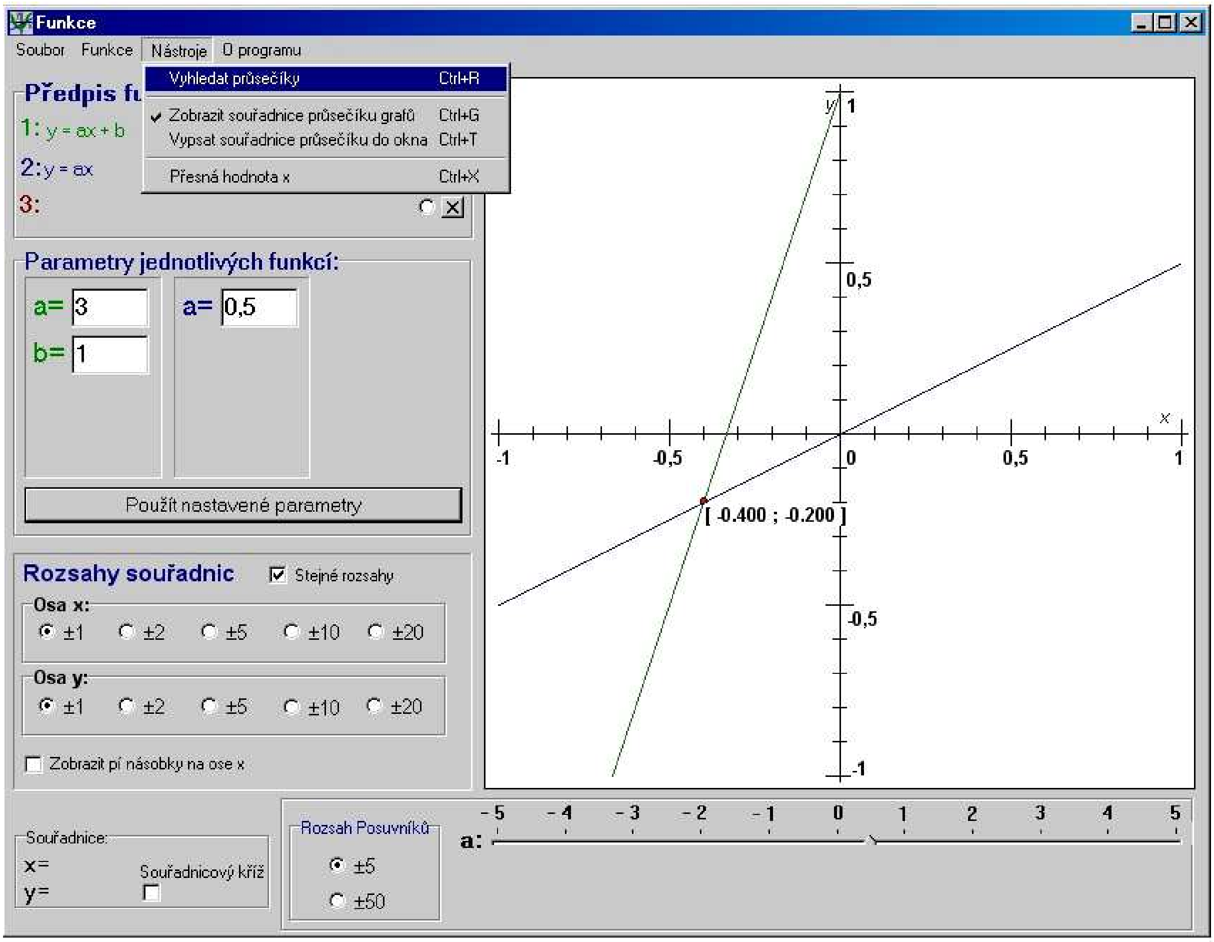
- z menu *Lineární* vybereme funkci $y=ax+b$ (zelená barva),
- nastavíme parametry na hodnoty $a=3$, $b=1$,
- z menu *Lineární* vybereme funkci $y=ax$ (modrá barva),
- nastavíme parametr *a* na hodnotu $a=\frac{1}{2}$,
- pro větší přehlednost zvolíme rozsah souřadnic ±1,
- v menu ***Nástroje*** zaškrtneme políčko *Zobrazit souřadnice průsečíků do grafu*,
- v menu ***Nástroje*** použijeme políčko *Vyhledat průsečíky* (obr. 3.16)

Z obrázku (obr. 3.16) je vidět, že hodnota *x*-ové souřadnice průsečíku je $x=-0,4$. Ověříme dosazením, jestli je tato hodnota řešením rovnice $3x+1=\frac{1}{2}x$:

$L(-0,4) = 3(-0,4)+1=-0,2$

$P(-0,4) = \frac{1}{2}(-0,4)=-0,2$

Levá i pravá strana rovnice se rovnají, řešení bylo nalezeno.



Obr. 3.16: Zobrazení průsečíku pro nalezení řešení rovnice

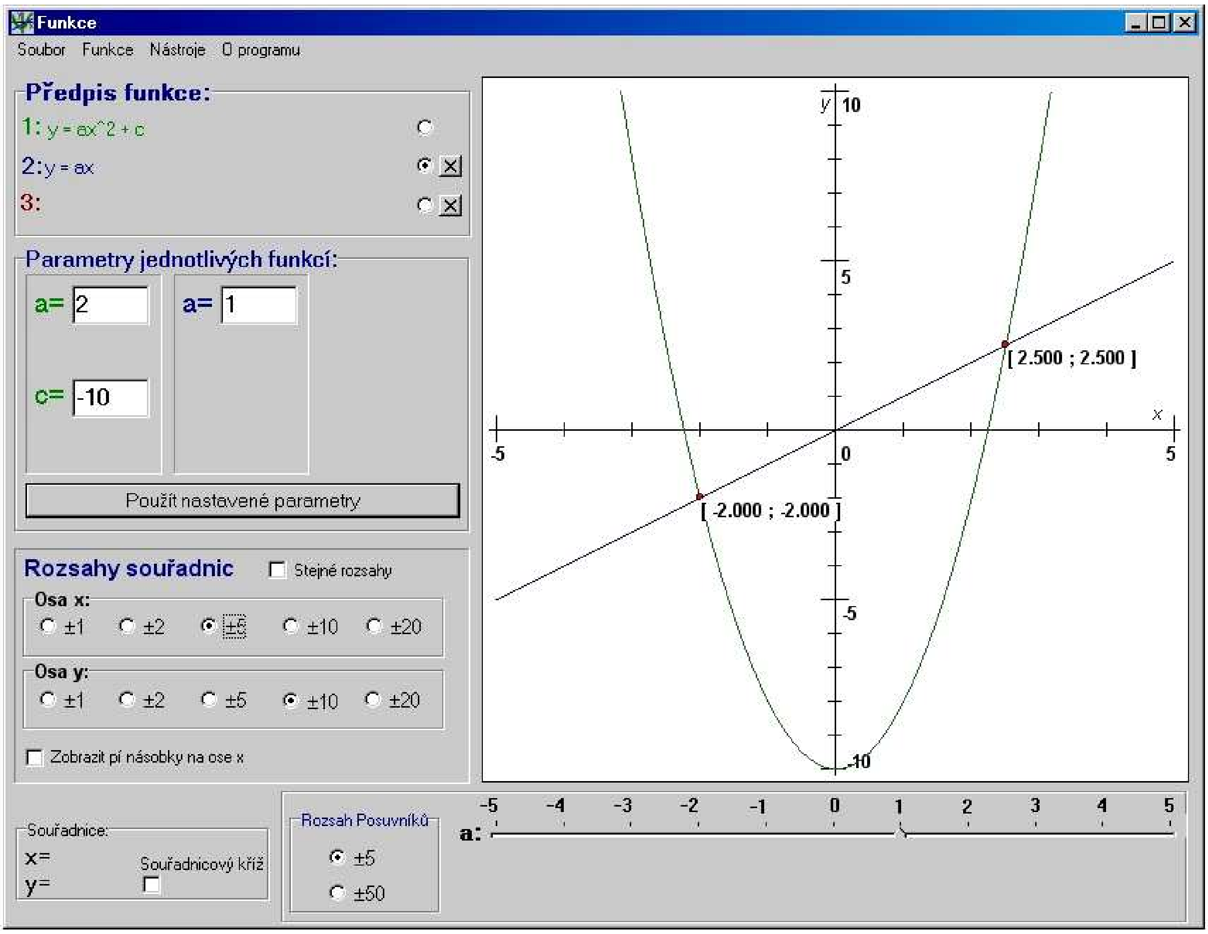
3.4.2 Grafické řešení nerovnice

Pro ukázku řešení nerovnice jsme vybrali příklad $2x^2 - 10 < x$, kde $x \in R$.

Nejdříve sestrojíme grafy funkcí f: $y = 2x^2 - 10$ a g: $y = x$.

Pak vyhledáme všechna čísla *x*, v nichž je hodnota funkce *f* menší než hodnota funkce *g*. Tj. zjistíme, pro které hodnoty *x* leží příslušný bod grafu funkce *g* nad odpovídajícím bodem grafu funkce *f*. Právě taková čísla *x* jsou řešením dané nerovnice.

Zadáním obou funkcí do programu **Funkce** a vyhledáním průsečíků dostaneme situaci na obr. 3.17. Z obrázku snadno určíme, pro které hodnoty *x* leží body grafu přímky $y = x$ nad body grafu paraboly $y = 2x^2 - 10$. Hodnoty *x*-ových souřadnic zobrazených průsečíků určují krajní body výsledného intervalu. Pro naši nerovnici je množinou řešení interval (-2 ; 2,5).



Obr. 3.17: Obrázek k řešení nerovnice

3.4.3 Složitější rovnice a nerovnice

Výhoda programu **Funkce** spočívá v možnosti hledání řešení i složitějších rovnic a nerovnic, jejichž grafy nelze na papíře snadno a rychle sestrojit. V této části uvedeme již stručně ukázky s ilustracemi řešení složitějších či zajímavějších rovnic a nerovnic. Následovat bude zadání čtyř příkladů a jejich řešení pomocí programu **Funkce**.

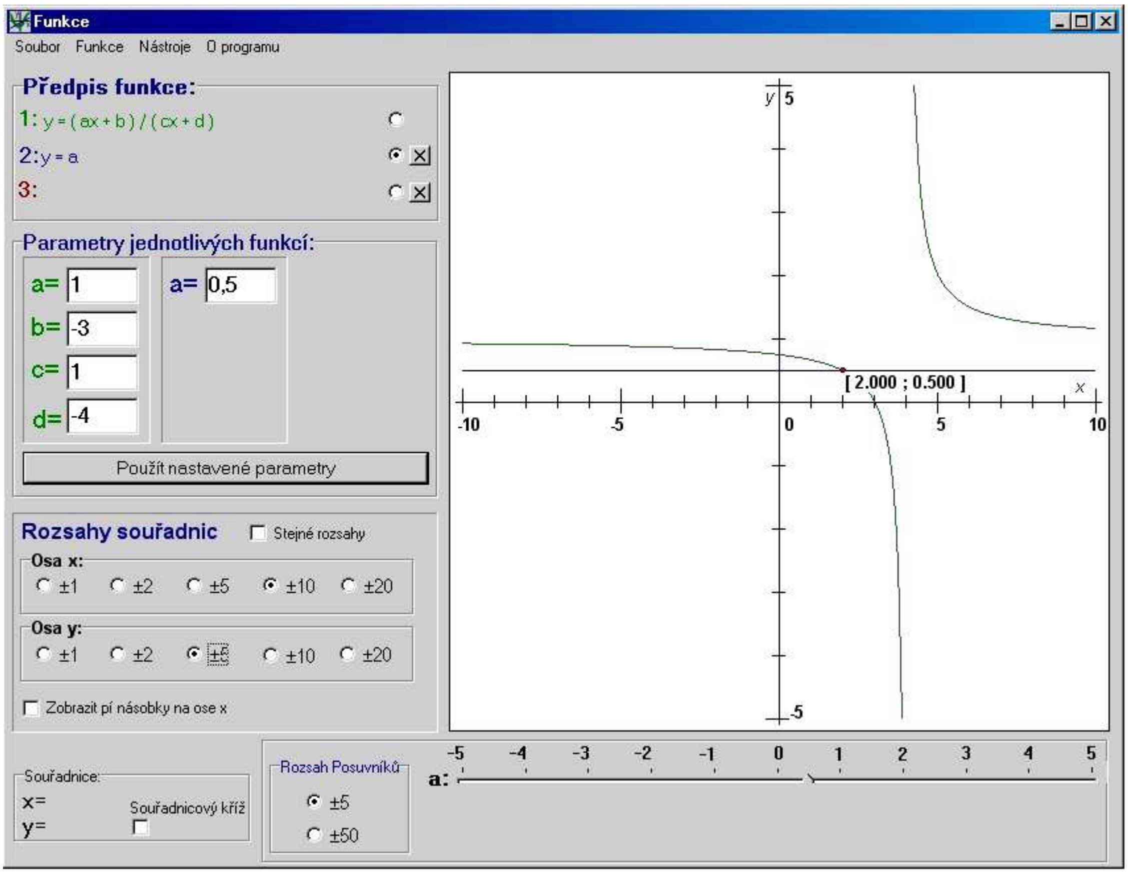
Příklad 1

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{2}$$

Řešení

- první funkci vybereme z menu *Lineární lomená* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (zelená barva),
- nastavíme parametry na hodnoty $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -4$,
- druhou funkci vybereme z menu *Konstantní* $y = a$ (modrá barva),
- parametr *a* v předpisu funkce nastavíme na hodnotu $a = 0{,}5$,
- pro přehlednější zobrazení nastavíme rozsahy souřadnic na ose *x*: ±10, na ose *y*: ±5,
- nalezneme a zobrazíme průsečík,
- přečteme *x*-ovou hodnotu průsečíku $x = 2$ (obr. 3.18),
- dosazením nalezené hodnoty do původní rovnice ověříme, že $x = 2$ je kořen rovnice



Obr. 3.18: Ilustrace k řešení *Příkladu 1*

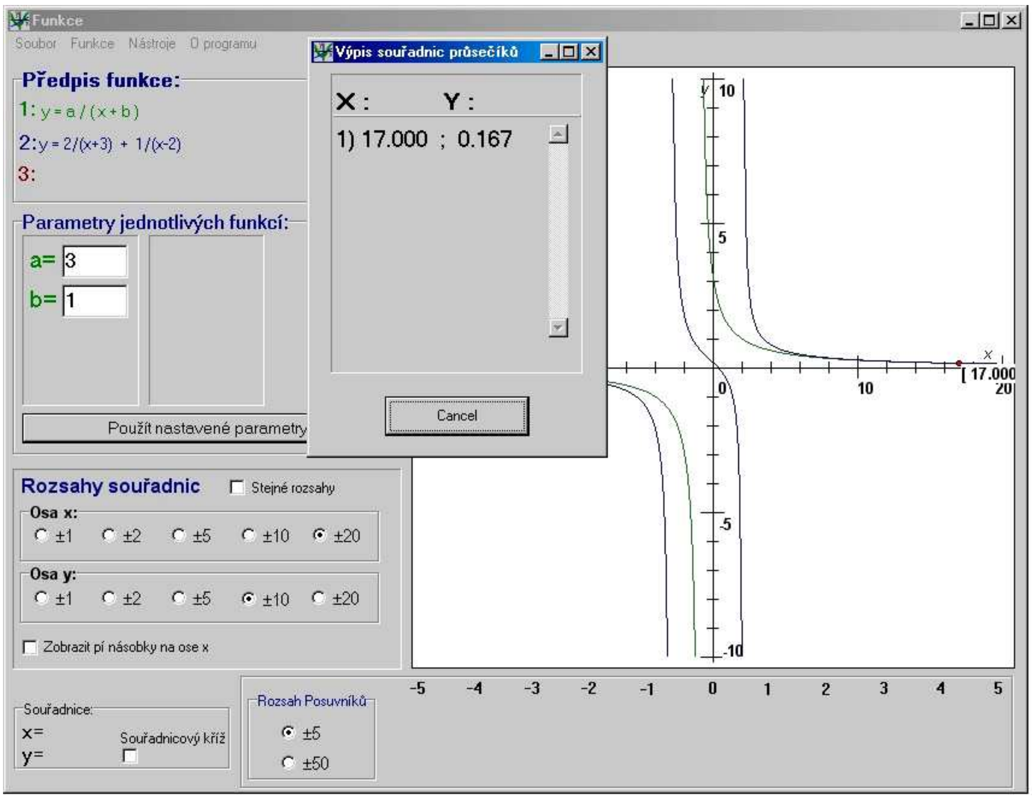
Příklad 2

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-2}$$

Řešení

- první funkci vybereme z menu *Lineární lomená* $y = \dfrac{a}{x+b}$ (zelená barva),
- nastavíme parametry na hodnoty $a = 3$, $b = 1$,
- druhou funkci zapíšeme v menu *Uživatelem zadané* $y = 2/(x+3) + 1/(x-2)$ (modrá barva),
- pro přehlednější zobrazení nastavíme rozsahy souřadnic na ose *x*: ±20, na ose *y*: ±10,
- jelikož je předpokládaný průsečík na kraji obrázku, tak v menu ***Nástroje*** zvolíme i možnost *Vypsat souřadnice průsečíků do okna*,
- nalezneme a zobrazíme průsečík,
- přečteme *x*-ovou hodnotu průsečíku $x = 17$ (obr. 3.19),
- dosazením nalezené hodnoty do původní rovnice ověříme, že $x = 17$ je kořen rovnice,



Obr. 3.19: Ilustrace k řešení *Příkladu 2*

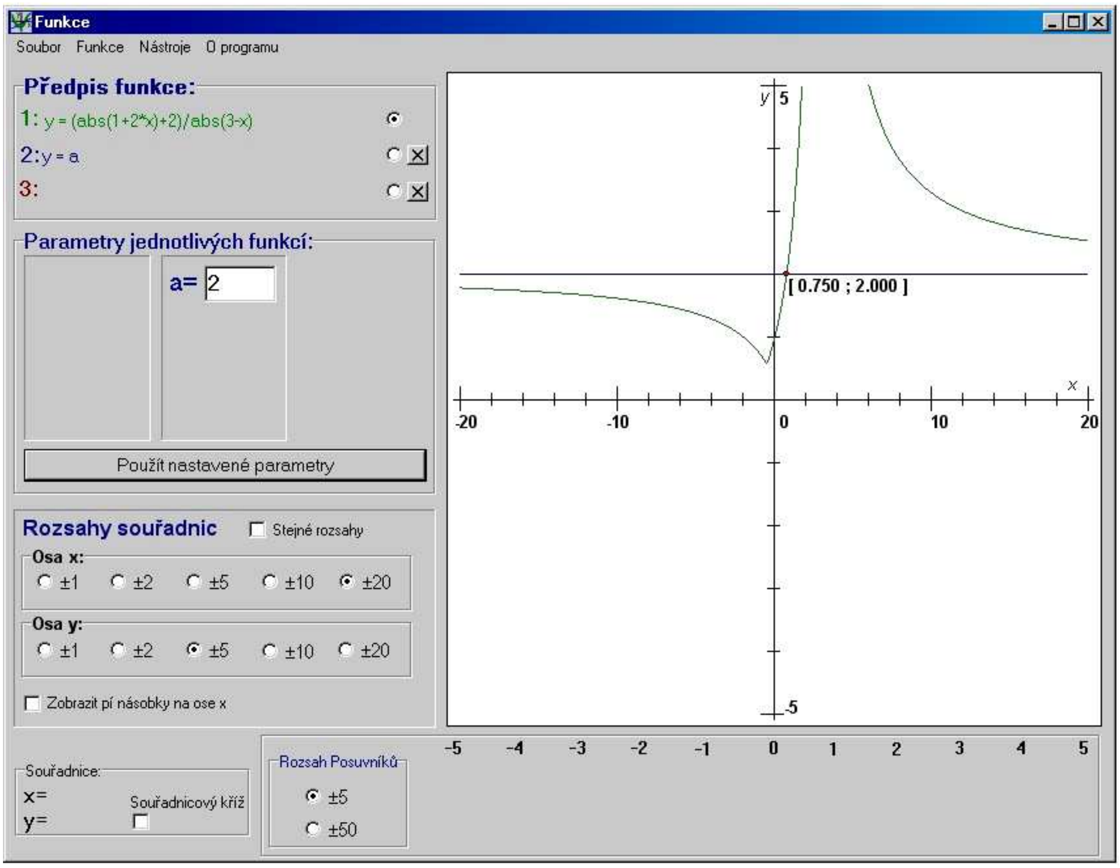
Příklad 3

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{|1+2x|+2}{|3-x|} \leq 2$$

Řešení

- první funkci zapíšeme v menu *Uživatelem zadané* $y = (abs(1+2*x)+2)/abs(3-x)$ (zelená barva),
- druhou funkci vybereme z menu *Konstantní* $y = a$ (modrá barva),
- nastavíme parametr v předpisu konstantní funkce $a = 2$,
- pro přehlednější zobrazení nastavíme rozsahy souřadnic na ose *x*: ±20, na ose *y*: ±5,
- nalezneme a zobrazíme průsečík,
- přečteme *x*-ovou hodnotu průsečíku $x = 0{,}75$ (obr. 3.20),
- dosazením několika hodnot do původní nerovnice ověříme, že $x \in (-\infty; \frac{3}{4}\rangle$ je řešením zadané nerovnice



Obr. 3.20: Ilustrace k řešení *Příkladu 3*

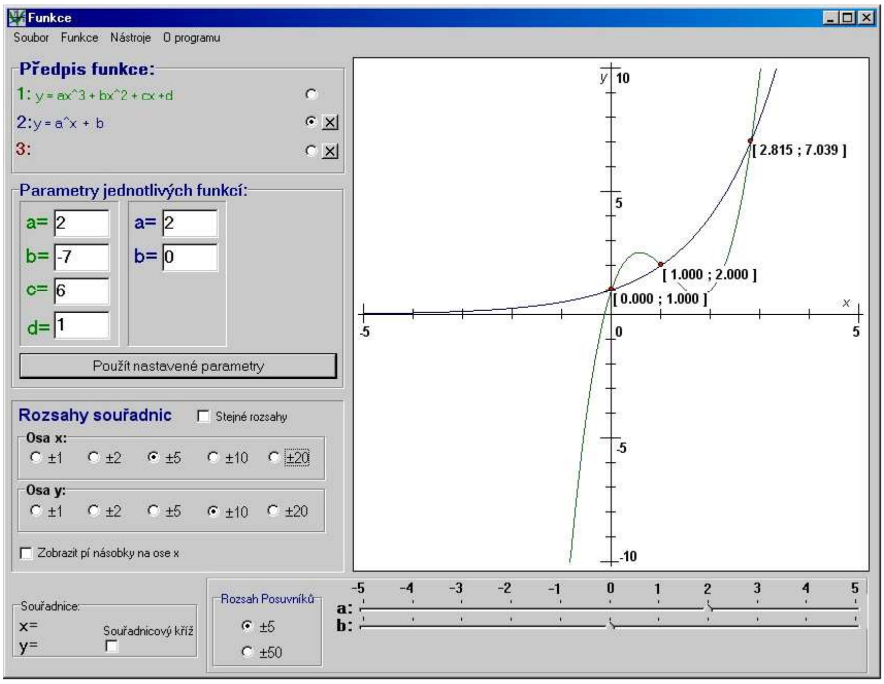
Příklad 4

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$

$$2x^3 - 7x^2 + 6x + 1 > 2^x$$

Řešení

- první funkci vybereme z menu *Polynomy* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (zelená barva),
- nastavíme parametry na hodnoty $a = 2$, $b = -7$, $c = 6$, $d = 1$,
- druhou funkci vybereme z menu *Exponenciální a logaritmické* $y = a^x + b$ (modrá barva),
- nastavíme parametry na hodnoty $a = 2$, $b = 0$,
- pro přehlednější zobrazení nastavíme rozsahy souřadnic na ose *x*: ±5, na ose *y*: ±10,
- nalezneme a zobrazíme průsečíky,
- přečteme *x*-ové hodnoty průsečíků $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2.815$ (obr. 3.21),
- dosazením do odpovídající rovnice ověříme, že $x = 0$, $x = 1$ vyhovují této rovnici, $x = 2{,}815$ je však přibližná hodnota (viz kapitola 2.4, str. 19), pomocí položky menu *Přesná hodnota* najdeme přesnější odhad tohoto kořene,
- řešením zadané nerovnice je sjednocení intervalů $(0,1) \cup (k, \infty)$, kde $k > 2{,}81536$



Obr. 3.21: Ilustrace k řešení *Příkladu 4*

3.5 Příprava učitele na hodinu

Program **Funkce** můžeme snadno využít při výkladu různých vlastností funkcí.

3.5.1 Hotové sestavy

S využitím možnosti ukládat do souboru celé sestavy funkcí a nastavení (*Uložit sestavu*) předvedeme, jak si učitel může usnadnit práci tím, že před hodinou vybere a uloží jemu vyhovující sestavy do souboru a při hodině bude už jen načítat sestavy. Tuto možnost využijeme například, když chceme zopakovat látku, nebo když chceme porovnat určité vlastnosti funkcí atd.

Všechny použité „sestavy“ v následujícím textu jsou uloženy v adresáři *Save\Sestavy*, který se nachází ve stejném adresáři jako program **Funkce**.

Ukázka rostoucích funkcí

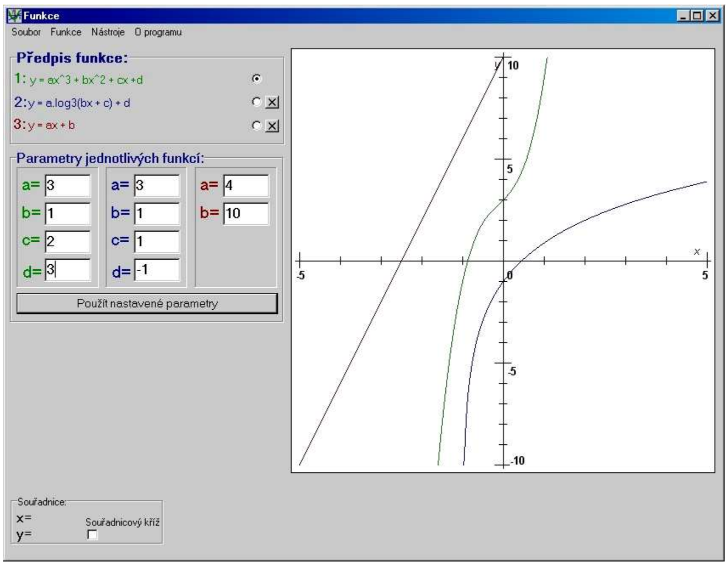
Definice: Funkce *f* se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$ [6] .

Z adresáře *Sestavy* vybereme soubor s připravenou sestavou: *Rostoucí fce.stv*.

Načetli jsme sestavu, která obsahuje předpisy tří rostoucích funkcí:

- 1. $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ s parametry $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$ (zelená barva),
- 2. $y = a\log 3(bx + c) + d$ s parametry $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$ (modrá barva),
- 3. $y = ax + b$ s parametry $a = 4$, $b = 10$ (červená barva), (obr. 3.22)



Obr. 3.22: Ilustrace k vlastnosti rostoucí funkce

Pohybem souřadnicového kříže po grafu lze odečítat *x*-ové a *y*-ové souřadnice a sledovat jev, že s rostoucím *x* roste hodnota *y*.

Ukázka klesajících funkcí

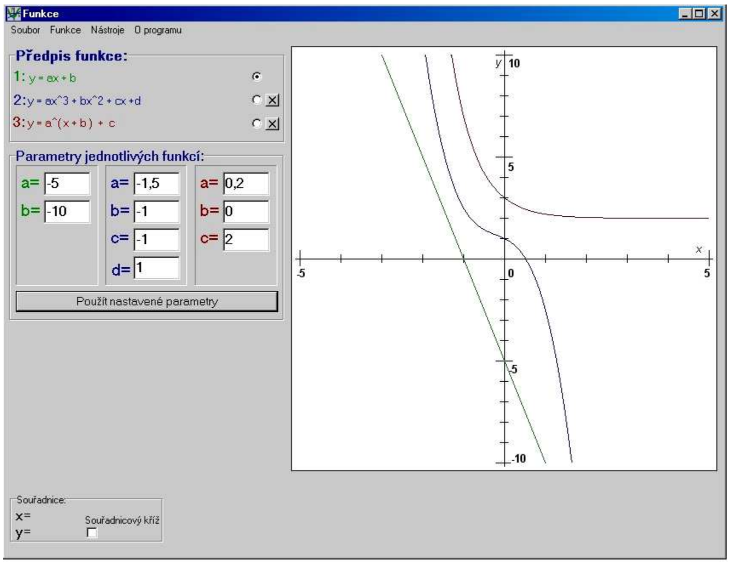
Definice: Funkce *f* se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$ [6].

Z adresáře *Sestavy* vybereme soubor s připravenou sestavou: *Klesající fce.stv*.

Načetli jsme sestavu, která obsahuje předpisy tří klesajících funkcí:

- 1. $y = ax + b$ s parametry $a = -5$, $b = -10$ (zelená barva),
- 2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ s parametry $a = -1{,}5$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$ (modrá barva),
- 3. $y = a^{x+b} + 2$ s parametry $a = 0{,}2$, $b = 0$, $c = 2$ (červená barva), (obr. 3.23)



Obr. 3.23: Ilustrace k vlastnosti klesající funkce

Pohybem souřadnicového kříže po grafu lze odečítat *x*-ové a *y*-ové souřadnice a sledovat jev, že s rostoucím *x* klesá hodnota *y*.

Ukázka sudých funkcí

Definice: Funkce *f* se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:

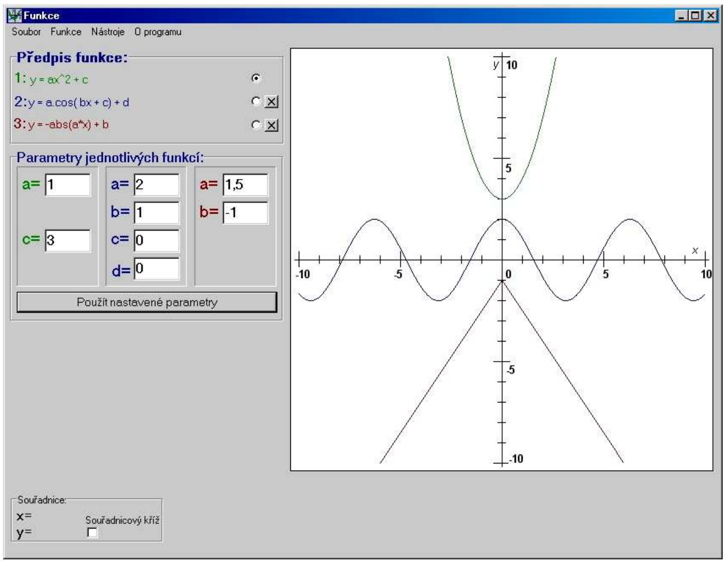
1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.

2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$ [6].

Z adresáře *Sestavy* vybereme soubor s připravenou sestavou: *Sudé fce.stv*.

Načetli jsme sestavu, která obsahuje předpisy tří sudých funkcí:

- 1. $y = ax^2 + c$ s parametry $a = 1$, $c = 3$ (zelená barva),
- 2. $y = a\cos(bx + c) + d$ s parametry $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$ (modrá barva),
- 3. $y = -|ax| + b$ s parametry $a = 1{,}5$, $b = -1$ (červená barva), (obr. 3.24)



Obr. 3.24: Ilustrace k vlastnosti sudá funkce

Všimněte si, že grafy sudých funkcí jsou osově souměrné podle osy *y*. Pomocí souřadnicového kříže můžeme ověřit vlastnosti sudé funkce tak, že potvrdíme rovnost:

f(x) = f(-x).

Ukázka lichých funkcí

Definice: Funkce *f* se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.

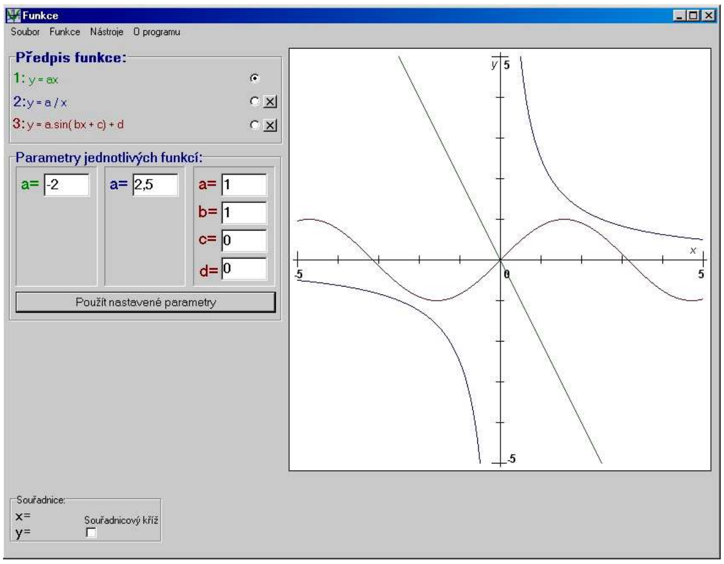
2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$ [6].

Z adresáře *Sestavy* vybereme soubor s připravenou sestavou: *Liché fce.stv*.

Načetli jsme sestavu, která obsahuje předpisy tří lichých funkcí:

- 1. $y = ax$ s parametry $a = -2$ (zelená barva),
- 2. $y = a/x$ s parametry $a = 2{,}5$ (modrá barva),
- 3. $y = a\sin(bx + c) + d$ s parametry $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$ (červená barva),

(obr. 3.25)



Obr. 3.25: Ilustrace k vlastnosti lichá funkce

Všimněte si, že grafy lichých funkcí jsou středově souměrné podle počátku. Pomocí souřadnicového kříže můžeme ověřit vlastnosti liché funkce tak, že potvrdíme rovnost:

f(-x) = -f(x).

Ukázka omezených funkcí

Definice: Funkce *f* se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje číslo *d* takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq d$.

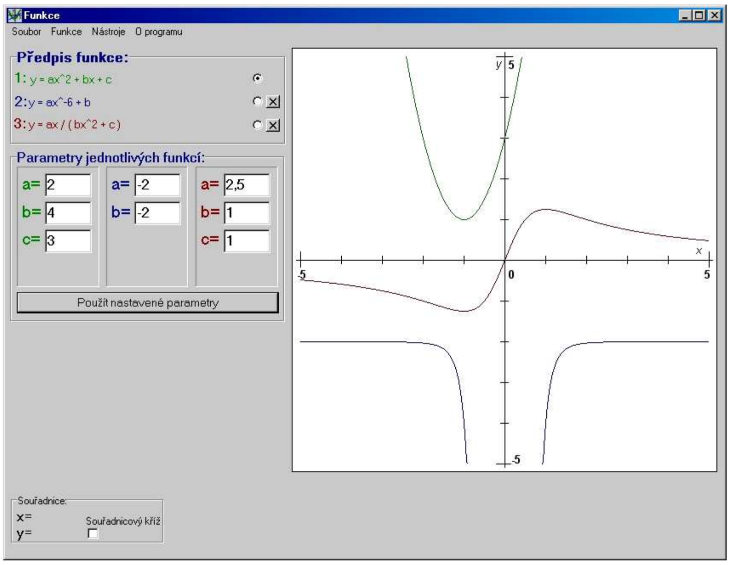
Funkce *f* se nazývá **shora omezená**, právě když existuje číslo *h* takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq h$.

Funkce *f* se nazývá **omezená**, právě když je zdola omezená a zároveň shora omezená [6].

Z adresáře *Sestavy* vybereme soubor s připravenou sestavou: *Omezené fce.stv*.

Načetli jsme sestavu, která obsahuje předpisy tří různě omezených funkcí:

- 1. zdola omezená $y = ax^2 + bx + c$ s parametry $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$ (zelená)
- 2. shora omezená $y = ax^{-6} + b$ s parametry $a = -2$, $b = -2$ (modrá)
- 3. omezená $y = ax/(bx^2 + c)$ s parametry $a = 2{,}5$, $b = 1$, $c = 1$ (červená), (obr. 3.26)



Obr. 3.26: Ilustrace k vlastnosti omezená funkce

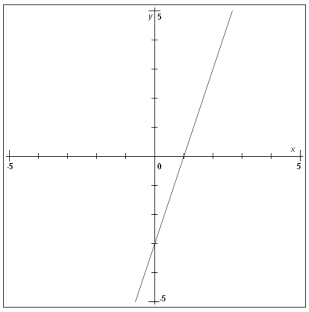
Z uvedených grafů lze předpokládat, že funkce $y = 2x^2 + 4x + 3$ je omezená zdola hodnotou $d = 1$; funkce $y = 2{,}5x/(x^2 + 1)$ je omezená shora hodnotou $h = -2$ a funkce $y = -2x^{-6} - 2$ je omezená shora i zdola hodnotami $h = 2$ a $d = -2$.

3.5.2 Pracovní listy

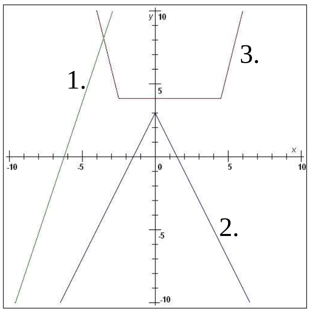
Potřebuje-li učitel ověřit dovednosti studentů při určování druhu funkce, určování jejích parametrů, nebo jejich vlastností, může si pomocí programu **Funkce** připravit tzv. pracovní listy se zaměřením na procvičení konkrétní dovednosti. V programu si vybere funkci, nastaví jí parametry podle potřeb a uloží obrázek pomocí položky menu *Uložit jako BMP*. Tyto obrázky pak může vložit do textového editoru a použít podle svého uvážení.

Ukázka pracovních listů:

Pracovní list 1 (téma: *lineární funkce*)



Z grafu lineární funkce $y = ax + b$ určete hodnoty koeficientů a, b:

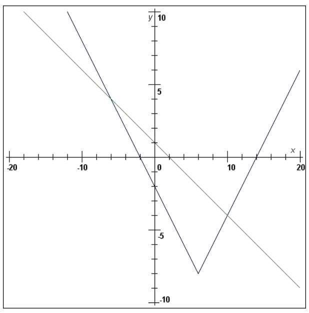


Napište vlastnosti funkcí (rostoucí, klesající, sudá, lichá, omezená), jejichž grafy jsou na obrázku:

1. funkce:

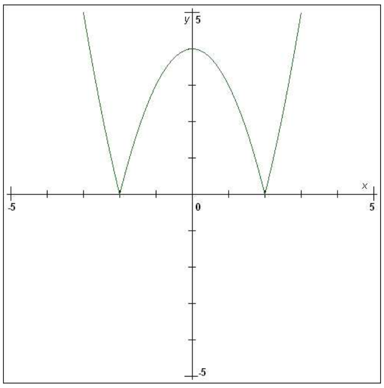
2. funkce:

3. funkce:

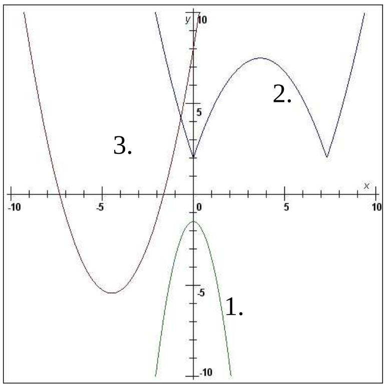


Řešte početně i graficky nerovnici: $-\frac{1}{2}x + 1 \geq |x - 6| - 8$

Pracovní list 2 (téma: *kvadratická funkce*)

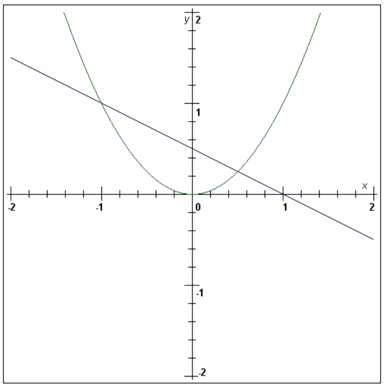


Z grafu kvadratické funkce $y=\left|ax^2+c\right|$ určete hodnoty koeficientů *a*, *c*:



Napište vlastnosti funkcí (rostoucí, klesající, sudá, lichá, omezená), jejichž grafy jsou na obrázku:

1. funkce:
2. funkce:
3. funkce:



Řešte početně i graficky rovnici: $x^2=\dfrac{-x+1}{2}$

Závěr

Výsledkem diplomové práce je nový výukový program **Funkce**, který slouží jako didaktická pomůcka při výuce a studiu grafů matematických funkcí. Jeho předností je možnost dynamické změny parametrů funkce s návazností na okamžité překreslení grafu s novými hodnotami parametrů.

Výběr předpisů funkcí v programu není omezen pouze na autorem připravené funkce, ale uživateli je dovoleno zadat vlastní předpis funkce a pracovat s ním stejně jako s připravenými.

Existuje mnoho programů, které umí nakreslit graf funkce, ale z těch, co jsem měl možnost vidět, nedovedl žádný dynamicky překreslovat graf funkce v souvislosti se změnou hodnoty parametru pomocí posuvníku.

Současná verze programu **Funkce** je volně šiřitelná a bude umístěna na www stránkách katedry didaktiky matematiky MFF UK.

Samotný text práce kromě podrobného popisu všech částí programu nabízí ukázky využití práce s programem, jeho použití při hodinách a v přípravě na ně.

Program **Funkce** má řadu využití nejen ve školské výuce (viz kap. 3.1 až 3.5), ale lze ho s úspěchem použít i při studiu složitých grafů funkcí, které nejsou předmětem výuky na střední škole.

Seznam literatury

[1] Cantú M. (1995): Mistrovství v Delphi. Computer Press, Praha.

[2] Coufalová J., Pěchoučková Š., Hejl J., Lávička M. (2000): Matematika pro devátý ročník základní školy. Fortuna, Praha.

[3] Holan T. (2001): Delphi v příkladech. BEN-technická literatura, Praha.

[4] Charvát J., Zhouf J., Boček L. (2004): Matematika pro gymnázia Rovnice a nerovnice. Prometheus, Praha.

[5] Kadlec V. (2003): Delphi-Hotová řešení. Computer Press, Brno.

[6] Odvárko O. (2004): Matematika pro gymnázia Funkce. Prometheus, Praha.

[7] Odvárko O. (2004): Matematika pro gymnázia Goniometrie. Prometheus, Praha.

[8] Odvárko O., Kadleček J. (2004): Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha.

[9] Svoboda L., Voneš P., Konšal T., Mareš M. (2002): 1001 tipů a triků pro Delphi. Computer Press, Praha.