Teorie čísel: Cvičení 4

Simona Hlavinnková, e-mail: simonkahlavinkova@gmail.com

Věta: Nechť $m \in \mathbb{N}$ není čtverec. Předpokládejme, že Pellova rovnice $x^2 - my^2 = 1$ má netriviální řešení.[1] Pak existuje řešení (a_0, b_0) takové, že množina všech řešení je

$$\left\{(a,b) \mid a + b\sqrt{m} = \pm(a_0 + b_0\sqrt{m})^n, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

-1. Řešte rovnici $x^2 - 2y^2 = 1$ v $\mathbb{Z}$ a najděte alespoň dvě konkrétní řešení, kde $x, y > 0$.

0. Ukažte, že rovnice $x^2 - 3y^2 = -1$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení.

! 1. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice
   (a) $x^2 - 3y^2 = 1$;
   (b) $x^2 - 5y^2 = 1$;
   (c) $x^2 - 7y^2 = 1$.

2. Ukažte, že rovnice $x^2 - 7y^2 = -4$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení.

3. Dokažte, že pokud je (x, y) řešením Pellovy rovnice $x^2 - my^2 = 1$, pak: $x + y\sqrt{m} > 1 \iff x, y > 0$.

Další příklady:

4. Dokažte, že pokud má řešení Pellova rovnice $x^2 - my^2 = -1$, pak má řešení i $x^2 - my^2 = 1$.

5. Nechť $B \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. Dokažte, že má-li zobecněná Pellova rovnice $x^2 - my^2 = B$ alespoň jedno řešení, potom má nekonečně mnoho řešení.

6. Najděte explicitně alespoň čtyři řešení rovnice $x^2 - 3y^2 = -2$ v $\mathbb{Z}$, kde $x, y > 0$.

7. Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

8. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je $\frac{n(n+1)}{2}$ čtverec.

9. Buď (x, y) celočíselným řešením rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$. Ukažte, že $6 \mid xy$.

Věta: Nechť $m \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. Nechť $l \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $\sqrt{m} = \left[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{l-1}, 2a_0}\right]$. Označme $\frac{p_n}{q_n}$ n-tý sblížený zlomek čísla $\sqrt{m}$.

(i) Je-li l sudé, pak rovnice $x^2 - my^2 = -1$ nemá řešení a minimální řešení $x^2 - my^2 = 1$ je (p_{l-1}, q_{l-1}).

(ii) Pokud je l liché, pak minimální řešení $x^2 - my^2 = -1$ je (p_{l-1}, q_{l-1}) a minimální řešení $x^2 - my^2 = 1$ je (p_{2l-1}, q_{2l-1}). Navíc $p_{2l-1} + q_{2l-1}\sqrt{m} = (p_{l-1} + q_{l-1}\sqrt{m})^2$.

! 10. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice $x^2 - 41y^2 = \pm 1$.

! 11. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice
   (a) $x^2 - 23y^2 = \pm 1$;
   (b) $x^2 - 13y^2 = \pm 1$.

12. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice
   (a) $x^2 - 29y^2 = \pm 1$;
   (b) $x^2 - 61y^2 = \pm 1$.

13. Určete, pro která celá čísla $B \in (-\sqrt{41}, \sqrt{41})$ existuje celočíselné řešení rovnice $x^2 - 41y^2 = B$.

14. Buď $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$. Předpokládejme, že rovnice $x^2 - my^2 = -1$ má řešení. Buď $a + b\sqrt{m}$ její minimální řešení. Dokažte, že $\pm(a + b\sqrt{m})^k$ pro $k \in \mathbb{Z}$ dává všechna řešení rovnice $x^2 - my^2 = \pm 1$.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s $*$ jsou náročnější.

[1] Což vždy platí, vizte větu níže.