Teorie čísel: Cvičení 3

Simona Hlavinková, e-mail: simonkahlavinkova@gmail.com

-2. Určete řetězový zlomek a první tři sblížené zlomky čísla $\sqrt{2}$.

-1. Určete, kterému reálnému číslu odpovídá řetězový zlomek $[2, \overline{5, 3}]$.

0. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Určete hodnotu řetězového zlomku $\left[k, \overline{1, 2k}\right]$.

! 1. Určete řetězové zlomky a první tři sblížené zlomky čísla $\sqrt{n}$ pro $n = 3, 11, 13$.

2. Najděte řetězový zlomek zlatého řezu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

! 3. K zadanému periodickému řetězovému zlomku určete jeho hodnotu:
   (a) $[1, 2, \overline{3}]$;
   (b) $[1, \overline{6, 9}]$;
   (c) $[1, \overline{1, 1, 2}]$.

! 4. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Určete, čemu se rovná:
   (a) $[\overline{k}]$;
   (b) $[1, \overline{2, k}]$.

Další příklady:

5. Najděte n-tý sblížený zlomek a) pro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\quad *$ b) obecně pro $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$.

6. Najděte řetězový zlomek čísel a) $\sqrt{k^2+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$; $\quad$ b) $\sqrt{k^2-1}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$.

7. Vymyslete si jakýkoliv vlastní příklad podobný těm předchozím a spočítejte ho.

8. Dokažte, že sblížené zlomky $\frac{p_n}{q_n}$ jsou vždy v základním tvaru.

9. Dokažte, že pokud máme libovolná čísla $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ pro $i \geq 1$, tak existuje právě jedno reálné číslo ξ, že $[a_0, a_1, \ldots]$ je řetězovým zlomkem ξ. Jde postupovat například následujícími kroky:
   (a) Označte klasicky $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Cílem bude ukázat $\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.
   (b) Díky identitám z přednášky ukažte $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. Dále s využitím konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ukažte, že je posloupnost $\frac{p_n}{q_n}$ cauchyovská (a definice ξ je tudíž korektní).
   (c) Ukažte $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ a podobně indukcí pro další koeficienty.

$*$ 10. Ukažte, že pokud je řetězový zlomek čísla $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ od jistého místa periodický, pak je α algebraické číslo stupně 2.

$**$ 11. Pokud $D \in \mathbb{N}$ není čtverec, pak je řetězový zlomek čísla $\sqrt{D}$ periodický s předperiodou délky 1 (můžete taky zkusit ukázat). Ať $\sqrt{D} = \left[\lfloor\sqrt{D}\rfloor, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_l}\right]$. Ukažte:
   (a) Pokud $l = 1$, $a_1 = 2 \cdot \lfloor\sqrt{D}\rfloor$.
   (b) Pokud $l = 2$, $a_2 = 2 \cdot \lfloor\sqrt{D}\rfloor$.
   (c) Pokud $l = 3$, $a_1 = a_2$ a $a_3 = 2 \cdot \lfloor\sqrt{D}\rfloor$.
   (d) Pro obecné l ukažte, že platí $a_i = a_{l-i}$ pro $i = 1, \ldots, l-1$ a $a_l = 2 \cdot \lfloor\sqrt{D}\rfloor$.

   (Pokud už tuto úlohu chcete řešit, doporučuju se podívat na nápovědu. Bez ní mi přijde rozumně řešitelná jen část a).)

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s $*$ jsou náročnější.