Teorie čísel: Cvičení 1

Simona Hlavinková, e-mail: simonkahlavinkova@gmail.com

Definice: Buď p prvočíslo a $n \in \mathbb{Z}$. Pak $v_p(n)$ značí největší j splňující $p^j \mid n$; jde o *p-valuaci* čísla n. Klademe $v_p(0) = \infty$.

Na celém předmětu můžete bez důkazu využívat jednoznačnosti rozkladu na prvočísla. Z definice p-valuace je jasné, že příslušné exponenty jsou právě $v_p(n)$, tj. pro $n \in \mathbb{N}$ máme $n = \prod p^{v_p(n)}$.

0. Pro celá čísla a, b dokažte, že $a \mid b$ právě tehdy, když pro všechna prvočísla p platí $v_p(a) \leq v_p(b)$.
1. Pro všechna prvočísla p spočtěte a) $v_p(63)$, b) $v_p(170)$, c) $v_p(360)$.
2. Dokažte následující tvrzení s celými čísly a, b:
   (a) Pokud prvočíslo p dělí ab, tak dělí alespoň jedno z čísel a, b.
   (b) $a^2 \mid b^2$, právě když $a \mid b$.
   (c) Pokud $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$, pak $\mathrm{NSD}(a^n, b^m) = 1$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.
3. Ukažte, že pro prvočíslo p a $m, n \in \mathbb{Z}$ platí:
   (a) multiplikativita: $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$, speciálně $v_p(m^k) = kv_p(m)$ pro $k \in \mathbb{N}$;
   (b) pokud je $\frac{m}{n}$ celé číslo, tak $v_p\left(\frac{m}{n}\right) = v_p(m) - v_p(n)$;
   (c) trojúhelníková nerovnost: $v_p(m + n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$. Ukažte, že pokud $v_p(m) \neq v_p(n)$, pak nastává rovnost.
4. Najděte příklad, kdy $v_p(a + b) > \max(v_p(a), v_p(b))$.
5. Rozmyslete si hodnoty p-valuací faktoriálů:
   (a) Pro přirozené číslo n a reálné číslo $x \geq 1$ určete, kolik čísel z intervalu $[1, x]$ je dělitelných n.
   (b) Dokažte Legendreův vzorec $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
   (c) Spočtěte, kolika nulami končí číslo 100!.

Další příklady:

6. Spočtěte $v_2(2^{60} - 6)$ a $v_3\left(\binom{80}{40}\right)$.
7. Rozhodněte, zda jsou přirozená čísla a a b jednoznačně určena, známe-li $\mathrm{nsn}(a, b)$ a $\mathrm{NSD}(a, b)$.
8. Dokažte, že pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \in \{0, 1\}$.
9. Pomocí valuací dokažte, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je vždy celé.
10. Rozmyslete si, jak definovat $v_p(x)$ pro $x \in \mathbb{Q}$. Zůstanou zachovány vlastnosti z příkladu 3?
11. Rozhodněte, zda pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ platí: Když $m^m \mid n^n$, pak $m \mid n$.
12. Ukažte, že pro každé n existuje n po sobě jdoucích složených čísel.

$*$ 13. Jsou dána přirozená čísla a, b, c splňující $a^b \mid b^c$, $a^c \mid c^b$. Dokažte, že $a^2 \mid bc$.

$*$ 14. Ukažte, že pro nezáporná $m, n \in \mathbb{Z}$ číslo $\binom{m+n}{m}$ vždy dělí $\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}$.

$*$ 15. Dokažte $2^n \nmid n!$. Obecně pro prvočíslo p dokažte $p^n \nmid ((p-1)n)!$.

$*$ 16. Pro přirozené číslo n dokažte $v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$.

$*$ 17. Dokažte, že pro $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ splňující $ab = cd$ platí $\mathrm{NSD}(a, c) \cdot \mathrm{NSD}(a, d) = a \cdot \mathrm{NSD}(a, b, c, d)$.

$*$ 18. Lze pro každé n najít n po sobě jdoucích čísel, z nichž každé je dělitelné nějakým čtvercem > 1?

$*$ 19. Pan Žemlička má knihu, v níž jsou bez mezer zapsaná všechna prvočísla menší než 10 miliónů. Simča má podobnou knihu obsahující prvočísla větší než 10 miliónů, ale menší než 20 miliónů. Odhadněte, čí kniha je tlustší, a jde-li o výrazný rozdíl.