10 Burnside vám to spočítá!

Řešení
Cvičení 24. a 25. dubna, verze ze dne 24. dubna 2024.

Cíle cvičení: Působení grupy na množině, tedy nápad, kdy si všimneme přirozeného homomorfismu vhodné grupy do grupy permutací na nějaké množině možností, nám umožní řešit jistý typ kombinatorických úloh. Ty se naučíme počítat a zároveň si rozmyslíme, co jsou a jak vypadají orbity tranzitivity daného působení a koutkem oka mrkneme i na související a teoreticky velmi užitečný pojem stabilizátoru prvku.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 10.1. Kolik různých náramků lze sestavit ze šesti červených a tří bílých korálků, použijeme-li vždy všech devět? (Předpokládáme, že máme k dispozici potřebné propriety jako šňůrku apod. a že za stejný náhrdelník považujeme každé jeho otočení i překlopení.)

Řešení. Označíme si jako X množinu všech možných korálkových sestav a všimneme si, že otočení a převrácení náramku lze reprezentovat osmnáctiprvkovou grupou symetrií pravidelného devítiúhelníku D_{18} s operací skládání, kterou můžeme po očíslování pozic korálků čísly $1, \ldots, 9$ chápat jako podgrupu grupy S_9. Uvědomíme si, že ekvivalence tranzitivity $\sim$ dává do relace právě takové seřazení barev korálků, které libovolná symetrie z grupy D_{18} zachová, proto počet všech různých náramků bez ohledu na otočení a převrácení je dán počtem rozkladových tříd $|X/{\sim}|$. Abychom mohli využít Burnsideovu větu $|X/{\sim}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X_g|$, je nejprve třeba spočítat velikosti množin $X_g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ pro jednotlivá $g \in G$, přičemž všechny korálky každého nezávislého cyklu permutace g musí mít touž barvu. Stačí tedy jednotlivé symetrie rozdělit podle počtu cyklů a spočítat počet sestav pomocí volby polohy tří bílých korálků:

1. pouze $g = \mathrm{id}$ obsahuje 9 nezávislých cyklů, proto $|X_{\mathrm{id}}| = \binom{9}{3}$,
2. otočení o úhel $\pm\frac{2\pi}{3}$ nám dává 2 permutace g se třemi trojcykly, kde jeden trojcyklus bude obarven bíle, dva zbývající červeně, což představuje $|X_g| = \binom{3}{1}$ možností,
3. otočení g o úhel $\frac{2\pi}{k}$, kde $\mathrm{NSD}(k, 9) = 1$, (kterých máme $\varphi(9) = 6$) obsahuje jediný nezávislý devíticyklus; protože žádnou stejnobarevnou sestavu nemáme, znamená to, že $|X_g| = 0$,
4. konečně 9 osových symetrií obsahuje jeden jednocyklus a čtyři dvojykly, což implikuje, že jediný jednocyklus a jeden dvojcyklus jsou obarveny bíle, tedy $|X_g| = \binom{4}{1}$.

Nyní už zbývá jen dosadit do vzorečku

$$|X/{\sim}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{18}\left(1 \cdot \binom{9}{3} + 2 \cdot \binom{3}{1} + 6 \cdot 0 + 9 \cdot \binom{4}{1}\right) = \frac{84 + 6 + 36}{18} = 7,$$

který nám sdělí, že existuje 7 různých možných náramků.

Úloha 10.2. Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých dílků ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký rovnostranný trojúhelník o čtyřnásobné hraně

(a) až na otočení,

(b) až na otočení a převrácení podél (některé) výšky?

Řešení. Postupujeme stejně jako v předchozí úloze, nejprve si označíme X množinu všech sestav velkého rovnostranného trojúhelníku, na níž budeme počítat velikost orbit tranzitivity pro jednotlivé prvky grupy G:

(a) Grupa $G_a = \{\mathrm{id}, r, r^{-1}\}$ otáčení trojúhelníku je tříprvková generovaná rotací r o úhel $\frac{2\pi}{3}$.

1. Pro triviální rotaci id vybíráme 8 červených pozic z 16, tedy $|X_{\mathrm{id}}| = \binom{16}{8}$,
2. pro obě rotace r, r^{-1} by stejnou barvu musely mít vždy trojice trojúhelníčků symetricky umístěných kolem středu, ale rozdělit dvě osmice do skupin o $3k$ a $3l+1$ prvcích (druhá skupina zahrnuje střed trojúhelníku) nejde, proto $|X_r| = |X_{r^{-1}}| = 0$.

Celkem dostáváme $|X/{\sim}| = \frac{1}{3}\binom{16}{8} = 4290$ sestav.

(b) Grupa $G_a = \{\mathrm{id}, r, r^{-1}, s_1, s_2, s_3\}$ symetrií trojúhelníku obsahuje kromě identity a dvou rotací ještě tři osové symetrie.

1. Pro triviální rotaci id a rotace máme stejně jako v (a) $|X_{\mathrm{id}}| = \binom{16}{8}$ a $|X_r| = |X_{r^{-1}}| = 0$,
2. pro tři osové symetrie s_i zvolíme sudý počet červených na čtyři pozice trojúhelníku na ose (tedy 4, 2 nebo 0) a poté polovinu zbylého počtu volíme na šest pozic levé strany trojúhelníka. Pravé potom musí být voleny symetricky s použitím druhé poloviny červených trojúhelníčků, zbytek doplníme modrými dílky. Tedy pro 4 červené dílky na ose máme $\binom{4}{4}\binom{6}{2}$ možností, pro 2 červené dílky na ose máme $\binom{4}{2}\binom{6}{3}$ a pro žádný červený dílek na ose máme $\binom{4}{0}\binom{6}{4} = \binom{6}{4}$.

Celkem dostáváme $\frac{1}{6}[\binom{16}{8} + 3(\binom{6}{2} + \binom{4}{2}\binom{6}{3} + \binom{6}{4})] = 2220$ možných sestav.

Úloha 10.3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete, kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu n barvami (až na orotování čtyřstěnu). Předpokládáme, že každou stěnu barvíme celistvě právě jednou barvou (tedy žádné puntíky či proužky), různé stěny mohou mít totožné barvy a není nutné použít barvy všecky.

Řešení. Stejně jako v předchozích dvou úlohách využijeme Burnsideovu větu, a proto nejprve zavedeme množinu X všech obarvení čtyřstěnu v pevné pozici, tedy přiřazujeme barvu ke čtyřem stěnám. Dále uvážíme, že grupu otáčení můžeme reprezentovat jako permutaci čtyř stěn (tedy podgrupu $\mathbf{S}_4$) a že čtyřstěn můžeme otáčet podle spojnic vrcholu a středu protilehlé stěny (celkem osmi způsoby reprezentovaných trojcyklem (abc)) a pak můžeme skládat dvě taková otočení (celkem tři možnosti reprezentované dvojicí nezávislých cyklů $(ab)(cd)$). Orbity tranzitivity v závislosti na cyklickém zápisu jsou tvaru:

1. $|X_{\mathrm{id}}| = n^4$,
2. $|X_g| = n^2$ pro oba typy otočení, neboť se skládají ze dvou nezávislých cyklů.

Nyní opět dosadíme do vzorce a dostaneme $|X/{\sim}| = \frac{n^4+11n^2}{12}$ obarvení.

Úloha 10.4. Uvažujte působení grupy $G = \mathbf{S}_n$ na množině $\{(a, b) : 1 \leq a, b \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách, tj. $\pi((a, b)) = (\pi(a), \pi(b))$.

(a) Kolik má toto působení orbit a jak jsou velké?

(b) Jak vypadají stabilizátory $G_{(1,1)}$, resp. $G_{(1,2)}$ a jaký mají index?

Řešení. (a) Pokud $a \neq b$, pak pro každou dvojici $c \neq d$ najdeme permutaci $\pi \in \mathbf{S}_n$, pro niž $\pi((a,b)) = (\pi(a), \pi(b)) = (c,d)$ a pokud $a = b$, potom pro každou permutaci $\pi \in \mathbf{S}_n$ platí, že $\pi(a) = \pi(b)$. To znamená, že máme právě dvě orbity tranzitivity:

$$\{(a,b) \mid a \neq b,\ a,b \in \{1,\dots,n\}\}, \quad \{(a,a) \mid a \in \{1,\dots,n\}\},$$

první z nich má $n(n-1)$ prvků a druhá právě n prvků.

(b) Snadno si rozmyslíme, že

$$G_{(1,1)} = \{\pi \in \mathbf{S}_n \mid \pi(1) = 1\} \simeq \mathbf{S}_{n-1}, \quad G_{(1,2)} = \{\pi \in \mathbf{S}_n \mid \pi(1) = 1 \,\&\, \pi(2) = 2\} \simeq \mathbf{S}_{n-2}$$

(pozor, jde o izomorfismy, nikoli o rovnosti!) a díky tvrzení o indexu stabilizátoru a velikosti orbity dostáváme, že $[\mathbf{S}_n : G_{(1,1)}] = |X_{(1,1)}| = n$, $[\mathbf{S}_n : G_{(1,2)}] = |X_{(1,2)}| = n(n-1)$.

A kdyby toho bylo málo, máme ještě:

Úloha 10.5. Anička chce pro každého ze svých 506 facebookových přátel vytvořit podobný (ale ne stejný) odznáček, rozhodne se proto pro následující návrh: rozdělí kruh na 12 stejných výsečí a každou výseč obarví. Kolik minimálně barev musí použít, aby splnila, co si předsevzala, předpokládáme-li, že dva odznáčky jsou různé, nelze-li jeden získat z druhého pootočením?

Řešení. Opět využijeme Burnsideovu větu pro množinu X všech obarvení n barvami a grupu G všech otočení řádu 12, kterou můžeme reprezentovat jako cyklickou grupu generovanou cyklem $\sigma \in \mathbf{S}_{12}$ délky 12. Nejprve určíme velikosti orbit:

1. $|X_{\mathrm{id}}| = n^{12}$,
2. $|X_{\sigma^6}| = n^6$,
3. $|X_g| = n^4$ pro dva prvky $g \in \langle\sigma\rangle$ řádu 3 (tj. pro $g = \sigma^4, \sigma^8$),
4. $|X_g| = n^3$ pro dva prvky $g \in \langle\sigma\rangle$ řádu 4 (tj. pro $g = \sigma^3, \sigma^9$),
5. $|X_g| = n^2$ pro dva prvky $g \in \langle\sigma\rangle$ řádu 6 (tj. pro $g = \sigma^2, \sigma^{10}$),
6. $|X_g| = n$ pro čtyři prvky $g \in \langle\sigma\rangle$ řádu 12 (tj. pro $g = \sigma^1, \sigma^5, \sigma^7, \sigma^{11}$).

Cekem dostáváme pro n barev $c(n) = \frac{1}{12}(n^{12} + n^6 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n)$ různých obarvení, a protože $c(2) = 352$ a $c(3) = 44368$, Anička musí použít alespoň 3 barvy.

Úloha 10.6. Spočítejte, kolika způsoby lze obarvit stěny krychle (bez ohledu na její polohu) pomocí n barev.

Řešení. Postupujeme jako v předchozích úlohách, tedy nejprve definujme množinu X jako množinu všech obarvení krychle v pevné pozici, kdy přiřazujeme barvu šesti pozicím s ohledem na jejich polohu, a grupu G všech rotací krychle a její působení, které pro rotaci $g \in G$ přiřadí obarvení x příslušně otočení krychle $g(x)$. Dvě obarvení z množiny X jsou ekvivalentní vzhledem k ekvivalenci $\sim$, pokud lze jedno převést na druhé nějakým otočením krychle, a počet všech obarvení krychle bez ohledu na její otočení je právě roven počtu rozkladových tříd $|X/{\sim}|$.

Uvědomíme si, že grupa otočení G obsahuje právě 24 prvků, neboť otočení jednoznačně určí zobrazením stěny na jednu z 6 stěn ve 4 možných pozicích (případně zobrazením jednoho vrcholu na jeden z 8 vrcholů s třemi možnými umístěními hran). Každé otočení budeme reprezentovat jako permutaci stěn, které se k tomuto účelu očíslujeme čísly $1, \dots, 6$, grupu G tedy chápeme jako podgrupu grupy $\mathbf{S}_6$. Konečně připomeňme, že má-li zůstat při konkrétním otočení zachováno obarvení krychle, musí být obarvení všech stěn v jednom cyklu stejné. Tedy potřebujeme zjistit, kolik cyklů každá z permutací odpovídající danému otočení obsahuje, je-li jich v permutaci g právě k, pak $|X_g| = n^k$. Probereme jednotlivé případy:

1. 6 cyklů obsahuje pouze $g = \mathrm{id}$, tedy $|X_g| = n^6$,

2. 4 cykly obsahují 3 osové symetrie podle os procházejících středy protilehlých stěn, tj. pokud $g \in \{(13)(24), (13)(53), (24)(56)\}$, pak a $|X_g| = n^4$,

3. 3 cykly obsahuje 6 otočení o 90 stupňů vpravo a vlevo podle os procházejících středy protilehlých stěn $A = \{(1234), (1432), (1635), (1536), (2645), (2546)\}$ a 6 překlopení podle os procházejících středy protilehlých hran

$$B = \{(13)(64)(25), (13)(26)(45), (24)(16)(35), (24)(15)(36), (56)(14)(23), (56)(12)(34)\},$$

tedy pokud $g \in A \cup B$, pak $|X_g| = n^3$,

4. 2 cykly obsahuje 8 otočení o 120 stupňů vpravo a vlevo podle os procházejících protilehlými vrcholy, tj. g leží v množině $\{(164)(235),\ (146)(253),\ (126)(345),\ (162)(354),\ (145)(263),\ (154)(236),\ (125)(634),\ (125)(634)\}$ a v takovém případě $|X_g| = n^2$,

Zjistili jsme, že $|X/{\sim}| = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$.

Úloha 10.7. Uvažujme působení grupy $\mathbf{A}_5$ na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, kteréžto působení je opět definováno po složkách, tj. vztahem

$$\pi(k, l, m) = (\pi(k), \pi(l), \pi(m)) \text{ pro každé } \pi \in \mathbf{A}_5.$$

Určete počet orbit tohoto působení a nějakou množinu reprezentantů těchto orbit.

Řešení. Úvaha je obdobná jako v úloze 10.4, rozdělíme třídy podle počtu shodných hodnot trojice a v případě dvou shodných a jednoho rozdílného podle toho, na které pozici se rozdílná hodnota nachází. Zvolíme 5 reprezentantů $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 3)$, u nichž už snadno najdeme permutaci, která některý z reprezentantů zobrazí na libovolný prvek (a, b, c). Naopak žádná dva různé reprezentanty na sebe permutací nezobrazíme, tudíž existuje právě 5 orbit.

Úloha 10.8. Nechť $n \geq k$. Uvažujte působení grupy $\mathbf{S}_n$ na množině $\{(a_1, \ldots, a_k) \mid 1 \leq a_i \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách. Dokažte, že počet orbit je roven počtu ekvivalencí na k-prvkové množině.

Řešení. Je-li E ekvivalence na $\{1, \ldots, k\}$, pak pro rozkladovou třídu prvku $[c]_E = \{c_1 < \ldots < c_m\}$ dejme v prvku $(a_1, \ldots, a_k)$ na místa s indexy $\{c_1, \ldots, c_m\}$ číslo c_1; snadno (haha) se již rozmyslí, že takto je definována bijekce mezi ekvivalencemi a orbitami tohoto působení.

Úloha 10.9. Ukažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na její vlastní nosné množině, kde prvek g působí jako $g(x) = gxg^{-1}$. Pro grupu $\mathbf{S}_4$ vypište orbity a pro každou orbitu určete stabilizátor nějakého jejího prvku.

Řešení. Rozmyslíme si, že zobrazení $\Omega(g) = g \cdot - \cdot g^{-1}$ je opravdu homomorfismus, k tomu nám stačí ověřit, že $\Omega(gh) = \Omega(g)\Omega(h)$ pro libovolné dva prvky $g, h \in G$, což ověříme vyhodnocením obou zobrazení na libovolném prvku $x \in G$:

$$[\Omega(g)\Omega(h)](x) = \Omega(g)(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \Omega(gh)(x)$$

Na 7. cvičení jsme si uvědomili, že konjugované permutace jsou právě ty, které mají stejný cyklický zápis, snadno si tedy rozmyslíme, že máme právě pět orbit tranzitivity v S_4:

$$(\bullet\ \bullet\ \bullet\bullet) = \{(abcd) \in S_4 \mid |\{a, b, c, d\}| = 4\}, \quad (\bullet\ \bullet\ \bullet) = \{(abc) \in S_4 \mid |\{a, b, c\}| = 3\},$$

$$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet) = \{(ab)(cd) \in S_4 \mid |\{a, b, c, d\}| = 4\}, \quad (\bullet\bullet) = \{(ab) \in S_4 \mid |\{a, b\}| = 2\}, \quad \{\mathrm{id}\}$$

Nyní z každé orbity vybereme jeden prvek a přímočaře najdeme, konjugování čím ho převede na touž permutaci:

orbita	stabilizátor
$(\bullet\ \bullet\ \bullet\bullet)$	$G_{(1234)} = \langle(1\,2\,3\,4)\rangle$
$(\bullet\ \bullet\ \bullet)$	$G_{(123)} = \langle(1\,2\,3)\rangle$
$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	$G_{(12)(34)} = \langle(1\,3\,2\,4)\rangle \cup (12)\,\langle(1\,3\,2\,4)\rangle$
$(\bullet\bullet)$	$G_{(12)} = \{(1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4), \mathrm{id}\}$
$\{\mathrm{id}\}$	$G_{\mathrm{id}} = \mathbf{S}_4$

Úloha 10.10. Uvažujte grupu G řádu p^k pro p prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že existuje prvek $a \in G$ různý od jednotky, který komutuje se všemi ostatními prvky.

Řešení. Použijeme působení grupy G na G konjugací z předchozího příkladu. Rozmyslete si, co znamenají jednoprvkové orbity, a použijte stejný trik, jako v důkazu Cauchyovy věty.

Úloha 10.11. Uvažujte působení eukleidovské grupy $\mathbf{E}_2$ na množině $\mathbb{R}^2$.

(a) Která zobrazení obsahuje podgrupa $(\mathbf{E}_2)_x$ pro daný bod x?

(b) Určete, které prvky patří do $\mathbb{R}^2_g$, kde $g \neq \mathrm{id}$ je (i) translace, (ii) rotace, (iii) reflexe.

Řešení. (a) Pro $x = (0, 0)$ představuje stabilizátor právě grupa O_2, pro obecný bod ho tvoří rotace se středem v x a rotace okolo v x složené s reflexí okolo osy procházející počátkem a bodem x.

(b) (i) Netriviální posunutí je zobrazení, které zjevně nemá žádný pevný bod, proto je odpovídající množina pevných bodů prázdná.

(ii) Je-li g netriviální rotace se středem v bodě (a, b), je pevným bodem pouze střed otáčení, tedy $\mathbb{R}^2_g = \{(a, b)\}$.

(iii) Reflexe podle osy zachovává právě tuto osu, tudíž množina pevných bodů tvoří právě všechny body osy dané reflexe.

Úloha 10.12. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte nějakou množinu $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takovou, aby byla grupa symetrií že $\mathbf{Sym}(X_n)$ izomorfní grupě $\mathbb{Z}_n$ (tedy cyklická řádu).

Řešení. Pro $n = 1$ můžeme vzít znak **2** umístěný kdekoli v rovině.

Pro $n = 2$ lze zvolit písmeno **T** umístěné svislou čarou v počátku (písmeno **H** by ale neprošlo).

Pro $n = 3$ rovnostranný trojúhelník se středem v počátku, jehož hrany jsou tvořeny šipkami směřujícími po či proti směru hodinových ručiček (bez šipek by opět neprošel), není to náhodou obecný návod?