9 Izomorfismus – dobrý sluha, ale zlý pán

Zadání
Cvičení 17. a 18. dubna, verze ze dne 24. dubna 2024.

Cíle cvičení: Cílem dnešního cvičení je to, abychom si po jeho skončení chápali, jak dobře a útulno je na světě s izomorfismy. Ochočené izomorfismy nám pomohou s odhalováním všech generátorů cyklických grup. Naopak, invarianty izomorfismů, tedy vlastnosti grupy, které musí izomorfismus zachovat, nám odhalí i situaci, kde s láskyplnou pomocí izomorfismu počítat nemůžeme. Nakonec s úspěchem využijeme dvojici ochočených izomorfismů, které nám poskytuje čínská věta o zbytcích.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 9.1. Dokažte, že jsou izomorfní grupy:

(a) $(\mathbb{R}, +, -, 0)$ a $(\mathbb{R}^+, \cdot, ^{-1}, 1)$, kde $\mathbb{R}^+$ množina kladných reálných čísel,

(b) aditivní grupa $\mathbb{Z}_6$ a multiplikativní grupa $\mathbb{Z}_7^*$,

(c) součin aditivních grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a multiplikativní grupa $\mathbb{Z}_8^*$.

Úloha 9.2. Ukažte, že nejsou izomorfní dvojice grup (a) $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbf{S}_3$, (b) $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Úloha 9.3. Rozhodněte, zda jsou cyklické grupy (a) $\mathbf{S}_3$, (b) $\mathbf{A}_3$, (c) $\mathbb{Z}_{12}^*$, (d) $\mathbb{Z}_{14}^*$.

Úloha 9.4. Najděte všechny generátory zadané cyklické grupy (a) $\mathbb{Z}_{12}$, (b) $\mathbb{Z}_7^*$.

Úloha 9.5. Jaké jsou maximální možné řády prvků v grupách (a) $\mathbb{Z}_{18}$, (b) $\mathbb{Z}_{29}^*$, (c) $\mathbb{Z}_{21}^*$, (d) $\mathbb{Z}_{30}^*$? Zkuste nějaké takové prvky najít.

A na závěr si dáme ještě jeden divoký slalom mezi izomorfismy:

Úloha 9.6. Pro devítiprvkové těleso $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 + 1)$ najděte generátor grupy T^*. Kolik má tato grupa generátorů celkem?

Úloha 9.7. Rozhodněte, zda jsou izomorfní grupy:

(a) $\mathbb{Z}_8^*$ a $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq \mathbf{S}_4$

(b) $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ a $\mathbf{S}_3$,

(c) $\mathbb{Z}_{24}^*$ a $\mathbb{Z}_{15}^*$,

(d)* $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.

Úloha 9.8. Napište všechny podgrupy grupy (a) $\mathbb{Z}$, (b) $\mathbb{Z}_{18}$, (c) $\mathbb{Z}_{23}^*$, (d) $\mathbb{Z}_{17}^*$. Jak jsou podgrupy uspořádány inkluzí?

Úloha 9.9. Rozložte grupy (a) $\mathbb{Z}_{18}$, (b) $\mathbb{Z}_{29}^*$, (c) $\mathbb{Z}_{21}^*$, (d) $\mathbb{Z}_{30}^*$ z úlohy 9.5 na direktní součin co nejvíce netriviálních cyklických grup

Úloha 9.10.* Ukažte, že $D_{12} \simeq \mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

Úloha 9.11. Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají binární grupovou operaci $\bullet$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \bullet y$. Doplňte zbytek tabulky.

(a)

$\bullet$	a	b
a		b
b		

(b)

$\bullet$	a	b	c	d
a				b
b	d	c		
c				
d				

Úloha 9.12. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby následující čtveřice byly grupami:

(a) $(\mathbb{Q}^+, \cdot, ', e)$,

(b) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$, kde $a * b = |a \cdot b|$.