Domácí úlohy ze samoopravných kódů

2022/23

Domácích úkolů bude zadáno celkem 8 za 50 bodů a k získání zápočtu z nich bude třeba získat aspoň 25 bodů.

1. (odevzdejte do 9.11.) Pro $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ spočítejte determinant (Vandermondovy) matice $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$ a dokažte, že $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je regulární, právě když jsou $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ po dvou různé prvky.

5 bodů

2. (odevzdejte do 8.11.) Popište všechny (i nelineární) binární 1-perfektní MDS kódy.

4 body

3. (odevzdejte do 22.11.) Určete kontrolní matice a vzdálenost všech cyklických binárních $[9, k]_2$-kódů pro $3 \le k \le 8$. Kolik existuje cyklických $[9, 3]_4$-kódů?

4 body

4. (odevzdejte do 22.11.) Nechť $\alpha_i \in \mathbb{E}_{(n)} \subseteq (\mathbb{F}_{q^r})_{(n)}$ (tj.$\alpha_i^n = 1$) a označme m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_q$ a $m_{i,r}$ minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_{q^r}$ pro $i = 1, \dots, s$. Pro $f = \mathrm{nsn}_i(m_{i,r}) \in \mathbb{F}_{q^r}[x]$ a $g = \mathrm{nsn}_i(m_i) \in \mathbb{F}_q[x]$ uvažujme cyklické kódy $\mathcal{C}(g) \subseteq \mathbb{F}_q^n$ a $\mathcal{C}(f) \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$. Dokažte, že $\mathcal{C}(g) = \mathbb{F}_q^n \cap \mathcal{C}(f)$.

5 bodů

5. (odevzdejte do 13.12.) Určete generující matici binárního Reedova-Mullerova kódu $\mathcal{R}(4, 1)$, kde Booleovské funkce $\mathbf{c} \to f(\mathbf{c})$ reprezentujme slovem $f(\mathbf{c}_0) \dots f(\mathbf{c}_{15})$ pro čtveřice cifer $\mathbf{c}_i \in \mathbb{F}_2^4$ představující binární zápis čísla i. Najděte Booleův polynom p, aby $\Phi(p) = 100 \dots 001$ (tj 1 jen jako první a poslední cifra).

6 bodů

6. (odevzdejte do 13.12.) Uvažujme ternární lineární kód $\mathcal{T}$ generovaný maticí

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6 \times 12},$$

kde $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$. Dokažte, že je $\mathcal{T}$ samoduální kód a dále za předpokladu, že jde o kód vzdálenosti 6 (to nemusíte dokazovat), dokažte, že je propíchnutí $\mathcal{T}$ v libovolné souřadnici 2-perfektní $[11, 6, 5]_3$-kód (zvaný *Golayův ternární* kód).

7 bodů

7. (odevzdejte do své zkoušky, nejpozději do 10.2.) Pro abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) nad tělesem $\mathbb{F}_5$ se stavovou a výstupní funkcí $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte fyzickou realizaci (K, G), určete vnější stupeň matice G a nakreslete realizaci kódovače obvodem.

9 bodů

8. (odevzdejte do své zkoušky, nejpozději do 10.2.) Pro polynomiální generující matici $G \in \mathbb{F}^{k\times n}$ konvolučního kódu dokažte, že G je základní, právě když $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}(D)^k$ platí $\mathbf{u}G \in \mathbb{F}[D]^n \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{F}[D]^k$.

10 bodů