11.10.

1 Lineární kódy

1.1 Hammingovy perfektní kódy

1.1. Označme $\mathcal{H}$ lineární kód s kontrolní maticí $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte generující matici kódu $\mathcal{H}$ ve standardním tvaru,

(b) určete vzdálenost kódu $\mathcal{H}$ a rozhodněte, zda je kód perfektní,

(c) rozhodněte, zda je $v = 1000101$ kódové slovo a případně které je nejbližší kódové slovo ke slovu v.

(a) Najdeme bázi $\mathrm{Ker} H_3 = \mathcal{H}$ a seřadíme ji do nějaké generující matice a tu upravíme pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace na odstupňovanou matici s kanonickými bazickými vektory (v této podobě ji můžeme rovnou hledat bázi):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Stačí si všimnout, že žádný sloupec kontrolní matice H_3 není nulový ani není násobkem jiného sloupce, proto má kód vzdálenost aspoň 3. Naopak součet dokonce každých dvou sloupců je opět sloupcem matice, tedy náš kód má vzdálenost právě 3, a proto opraví právě jednu chybu.

Nyní snadno ověříme, že $1 + 7 = 2^{7-4}$, tedy se jedná o 1-perfektní kód.

(c) Stačí spočítat $(Hv^T)^T = 011 \neq 000$, což znamená, že $v = 1000101$ kódové slovo není. Proto 3. sloupec kontrolní matice H obsahuje právě vektor Hv^T stačí změnit 3. souřadnici slova v na slovo $c = 1010101$, aby $(Hc^T)^T = 000$. □

17.10.

Pro $l \in \mathbb{N}$ seřaďme všechna nenulová slova množiny $\mathbb{F}_2^l$ do sloupců H_l, položme $n := 2^l - 1$ a definujme lineární kód $\mathcal{H}_l := \{c \in \mathbb{F}_2^n \mid Hc^T = 0^T\}$.

1.2. Pro $l \in \mathbb{N}$

(a) ověřte, že je H_l kontrolní matice kódu $\mathcal{H}_l$,

(b) určete vzdálenost a dimenzi $\mathcal{H}_l$ a rozhodněte, zda je kód perfektní,

(c) navrhněte algoritmus, jak opravit jednu chybu přijatého slova.

(a) Stačí si všimnout, že ve sloupcích matice H_l máme kanonickou bázi vektorového prostoru $\mathbb{F}_2^l$, a tudíž má hodnost rovnu počtu řádků.

(b) Provedeme-li stejnou úvahu jako v bodu (c) předchozí úlohy, vidíme, že vzdálenost kódu je 3, jedná se tedy o $[2^l-1, 2^l-l-1, 3]_2$-kód, který opravuje 1 chybu. Snadno tedy zjistíme, že levá strana Hammingovy nerovnosti je rovna $1 + 2^l - 1 = 2^l$ a pravá strana má hodnotu $2^{2^l-1-(2^l-l-1)} = 2^l$. To znamená, že $\mathcal{H}_l$ je o 1-perfektní kód.

(c) Kód je 1-perfektní, tedy pro každé nekódové slovo existuje ve vzdálenosti 1 právě jedno kódové slovo. Nechť v je přijaté slovo. Pokud $H_l v^T = \mathbf{0}^T$, pak $v \in \mathcal{H}_l$. Pokud $H_l v^T \neq \mathbf{0}^T$, pak existuje i, pro než je $H_l v^T$ právě i-tým sloupcem. Nyní stačí vzít slovo $c = v + e_i$, pro něž platí, že $d(v, c) = 1$ a

$$cH_l^T = (v + e_i)H_l^T = vH_l^T + h_i = h_i + h_i = \mathbf{0}$$

tedy $c \in \mathcal{H}_l$ je opravené slovo.

Označíme-li $\alpha : \mathbb{F}_2^l \setminus \{0\} \to \{1, \ldots, 2^l - 1\}$ zobrazení dané předpisem $\alpha(c_1 \ldots c_l) = \sum_{i=1}^{l} c_i 2^{i-1}$, tj. $\alpha^{-1}(i)$ je právě binární zápis hodnoty $i \in \{1, \ldots, 2^l - 1\}$ (doplněný nulami). Předpokládejme, že v i-tém sloupci matice H_l je právě $\alpha^{-1}(i)^T$. Potom každé slovo $c \in \mathbb{F}_2^l \setminus \mathcal{H}_l$ platí, že $c + e_{\alpha(cH^T)} \in \mathcal{H}_l$. □

1.3. Nad konečným tělesem $\mathbb{F}_q$ spočítejte velikost koule $V_q(n, r)$.

Nejprve spočítáme velikost množiny A_i všech slov váhy i:

$$|A_i| = |\{c \in \mathbb{F}_q^n |\ w(c) = n\}| = |\{I \subseteq \{1, \ldots n\} | I| = i\}| \cdot |(\mathbb{F}_q^*)^i| = \binom{n}{i}(q-1)^i.$$

Potom dostáváme $V_q(n, r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}(q-1)^i$ □

1.4. Nad konečným tělesem $\mathbb{F}_q$ sestrojte obdobným způsobem jako v předchozí úloze kontrolní matici perfektního kódu délky $n := \frac{q^l-1}{q-1} = \sum_{i=0}^{l-1} q^i$ dimenze $n - l$. Jaká je jeho Hammingova vzdálenost?

Vezmeme množinu všech přímek (tj. projektivní prostor) v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{F}_q^l$ dimenze l, kterých je právě $n := \frac{q^l-1}{q-1} = \sum_{i=0}^{l-1} q^i$ a z každé přímky vezmeme jeden nenulový vektor h_i. Tyto vektory sestavíme do matice M typu $l \times n$, která je jistě hodnosti l. Každé dva sloupce jsou

přitom lineárně nezávislé, neboť neleží na stejné přímce, ale každá dvojice určuje rovinu, která obsahuje jiný sloupcový vektor, proto je vzdálenost kódu 3. Máme tedy $[n, n-l, 3]_q$-kód.

Zbývá zjistit, že levá strana Hammingovy nerovnosti je $1 + n(q-1) = 1 + \frac{q^l-1}{q-1}(q-1) = q^l$, zatímco pravá strana je $q^{n-(n-l)} = q^l$, tudíž je kód opět 1-perfektní. □

1.2 Matice a parametry

1.5. Uvažujme pro $n \geq 2$ paritní kód $\mathcal{C} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_i v_i = 0\}$.

(a) Určete kontrolní matici kódu $\mathcal{C}$,

(b) najděte generující matici $\mathcal{C}$ ve standardním tvaru,

(c) spočítejte vzdálenost kódu $\mathcal{H}$ a uveďte všechny parametry kódu,

(d) rozhodněte, zda je kód perfektní či MDS,

(e) jak vypadá duální kód $\mathcal{C}^\perp$?

(a) Protože je paritní kód tvořen právě všemi řešeními jediné lineární rovnice $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, je jeho kontrolní matice tvaru $\mathbf{H} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{F}_2^n$.

(b) Stačí najít bázi řešení homogení soustavy rovnic ve tvaru

$$\mathbf{C} = (I_{n-1}|\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{(n-1)\times n}.$$

(c) Například z kontrolní matice, která neobsahuje žádný nulový sloupec, ale každé dva jsou už lineárně závislé vidíme, že $d(\mathcal{C}) = 2$. Jedná se tedy o $[n, n-l, 2]_2$-kód

(d) Protože je vzdálenost kódu sudá, nemůže jít o perfektní kód. Naopak Singletonův odhad nabývá rovnosti $2 = n - (n-1) + 1$, proto jde o MDS kód.

(e) duální kód má generující matici $\mathbf{H} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{F}_2^n$, jedná se tedy $[n, 1, n]_2$-kód obsahující jen dvě slova $00\ldots0$ a $11\ldots1$. □

1.6. Uvažujme generující matici $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. nad tělesem $\mathbb{F}_5$. kódu $\mathcal{C}$.

(a) Určete kontrolní matici kódu $\mathcal{C}$,

(b) spočítejte všechny parametry kódu $\mathcal{C}$ a kódu $\mathcal{C}^\perp$,

(c) najděte permutaci σ a generující matici ve standardním tvaru permutačně ekvivalentního kódu $\mathcal{C}_\sigma \sim_\sigma \mathcal{C}$

(d) rozhodněte, zda je kód $\mathcal{C}$ perfektní či MDS.

(a) a (c) Matici upravíme pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace tak, abychom měli v bázických sloupcích kanonickou bázi:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nyní nejprve snadno najdeme bázi řešení soustavy a dopočítáme tak kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a přepermutováním sloupců matice $\mathbf{C}$ permutací $\sigma = (243)$ dostaneme generující matici $\mathbf{C}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ permutačně ekvivalentního kódu $\mathcal{C}_\sigma \sim_\sigma \mathcal{C}$.

(b) Vidíme, že žádný sloupec kontrolní matice $\mathbf{H}$ kódu $\mathcal{C}$ není nulový a například 3. a 4. jsou lineárně závislé, tedy $d(\mathcal{C}) = 2$. Podobně kontrolní matice $\mathbf{C}$ kódu $\mathcal{C}^\perp$ neobsahuje nulový vektoro a například 1. a 2. jsou lineárně závislé, proto i $d(\mathcal{C}^\perp) = 2$. Tedy $\mathcal{C}$ je $[5, 3, 2]_5$-kód a $\mathcal{C}^\perp$ je $[5, 2, 2]_5$-kód.

(d) Protože je vzdállenost $\mathcal{C}$ sudá nemůže se jednat o perfektní kód a kód není ani MDS, neboť $2 + 3 < 5 + 1$. □

18.10.

1.3 Samoduální kódy

1.7. Určete všechny parametry a rozhodněte, zda je samoduální lineární kód nad $\mathbb{F}_2$ s generující maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Popište propíchnutý kód $\pi_8(\mathcal{C})$.

Protože je C hodnosti 4, jedná se o kód délky 8 a dimenze 4. Snadno spočítáme, že $CC^T = \mathbf{0}$, proto C generuje samoduální lineární kód. To znamená, že C je kontrolní matice kódu, z níž zjistíme vzdálenost. Protože žádný sloupec matice $\mathbf{C}$ není nulový, každé dva jsou různé, součet každých tří má lichou váhu, vidímee $d(\mathcal{C}) \geq 4$. Všechny řádky matice mají váhu 4, je $d(\mathcal{C}) = 4$ a $\mathcal{C}$ je tudíž $[8,4,4]_2$-kód.

Propíchnutí $\pi_8(\mathcal{C})$ je podle pozorování na přednášce $[7,4,3]_2$-kód nebo $[7,4,4]_2$-kód, protože jsme už zjistili, že $[7,4,3]_2$-kód je perfektní, nemůže žádný $[7,4,4]_2$-kód existovat. Můžeme si všimnout, že odstraněním posledního sloupce matice C dostaneme právě generující matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hammingova 1-perfektního $[7,4,3]_2$-kódu z 1.1. □

25.10.

2 Polynomy nad konečnými tělesy a cyklické kódy

2.1 Rozklady polynomů

2.1. Určete polynomy Q_1, Q_3, Q_5, Q_{15} nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

Pro výpočet využijeme vztahu $x^n - 1 = \prod_{k|n} Q_k$. Zřejmě je jediný prvek řádu 1 jednička, proto $Q_1 = x - 1$ a dále

$$Q_3 = \frac{x^3-1}{Q_1} = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1 \quad \text{a} \quad Q_5 = \frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Stejně určíme $Q_{15} = \frac{x^{15}-1}{Q_1 Q_3 Q_5}$.

Zřejmě jsou Q_1 a Q_3 ireducibilní a protože 2 má v $\mathbb{Z}_5^*$ řád 4, je podle věty z přednášky polynm Q_5 ireducibilní. 2 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 4 a Q_{15} je stupně 8, tudíž je součinem dvou ireducibilních polynomů stupně 4.

Dále $x^{30} - 1 = (x^{15} - 1)^2 = Q_1^2 Q_3^2 Q_5^2 Q_{15}^2$, tedy $x^{30} - 1$ má právě 10 ireducibilních faktorů. □

1.11.

2.2. Určete kolik existuje různých ireducibilních polynomů stupně a) 2, b) 3, c) 4, d) 7 nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

Stačí uvážit, že

(a) $x^4 - x$ je součin všech ireducibilních polynomů stupně 1 a 2 nad tělesem $\mathbb{F}_2$, přitom $x^2 - x$ je součin všech ireducibilních polynomů stupně 1 nad tělesem $\mathbb{F}_2$, tedy existuje jediný polynom stupně 2: $x^2 + x + 1$,

(b) $x^8 - x$ je součin všech ireducibilních polynomů stupně 1 a 3 nad tělesem $\mathbb{F}_2$, součin ireducibilních polynomů stupně 3 je tedy $\frac{x^8-x}{x^2-x} = \sum_{i=0}^{6} x^i$, proto existují právě dva, snadno zjistíme (neboť stačí ověřit, zda mají v $\mathbb{F}_2$ kořen), že to jsou polynomy: $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$.

(c) $x^{16} - x$ je součin všech ireducibilních polynomů stupně 1,2 a 4 nad tělesem $\mathbb{F}_2$, součin ireducibilních polynomů stupně 4 je tudíž $\frac{x^{16}-x}{x^4-x} = \sum_{i=0}^{4} x^{3i}$, proto existují právě 3.

(d) $x^{128} - x$ je součin všech ireducibilních polynomů stupně 1 a 7 nad tělesem $\mathbb{F}_2$, součin ireducibilních polynomů stupně 4 je tudíž $\frac{x^{128}-x}{x^2-x} = \sum_{i=0}^{126} x^i$, a proto existuje právě $\frac{126}{7} = 18$ různých ireducibilních polynomů stupně 18.

□

2.2 Cyklické kódy

Připomeňme, že kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ je *cyklický*, jestliže

$$c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} \in \mathcal{C} \Rightarrow c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2} \in \mathcal{C}.$$

Symbolem $\mathbb{F}_q[x]_n$ označíme $\mathbb{F}_q$-algebru (tedy vektorový prostor nad $\mathbb{F}_q$ se strukturou okruhu) s nosnou množinou $\mathbb{F}_q^n$, operacemi $+, -$ aritmetického vektorového prostoru. Násobení je určeno vztahem

$$0a0\dots0 \cdot c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} = c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} \cdot 0a0 \dots 0 = a \cdot c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2},$$

kde násobení vpravo je násobení skalárem a na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{F}_q^n$.

2.3. Najděte všechny binární lineární cyklické kódy délky 5. Pro netriviální z nich určete jejich generující a kontrolní matici a jejich parametry.

Protože víme, že

$$x^5 - 1 = Q_1 \cdot Q_5 = (x+1)(1+x+x^2+x^3+x^4),$$

kde Q_5 je ireducibilní neboť 2 má v $\mathbb{Z}_5^*$ řád 4, jedná se ireducibilní rozklad v $\mathbb{F}_2[x]$, a proto snadno určíme všechny dělitele x^5-1. Najdeme tedy právě čtyři kódy:

$$\mathcal{C}(1) = \mathbb{F}_2^5, \quad \mathcal{C}(x^5-1) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{C}(x+1), \quad \mathcal{C}(\sum_{i=0}^{4} x^i).$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pak A tvoří generující matici kódu $\mathcal{C}(x+1)$ a kontrolní matici kódu $\mathcal{C}(\sum_{i=0}^{4} x^i)$ a B tvoří kontrolní matici kódu $\mathcal{C}(x+1)$ a generující matici kódu $\mathcal{C}(\sum_{i=0}^{4} x^i)$. Z kontrolních matice snadno určíme vzdálenost kódů, proto je $\mathcal{C}(x+1)$ $[5,4,2]_2$-kód a $\mathcal{C}(\sum_{i=0}^{4} x^i)$ je $[5,1,5]_2$-kód □

2.4. Známe-li ireducibilní rozklad $x^7 - 1 = (x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$ v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$,

(a) najděte generující a kontrolní matici kódu $\mathcal{C}(x^3+x+1)$,

(b) určete, kolik různých binárních cyklických kódů délky 7 existuje,

(c) ověřte, že je kód $\mathcal{H}$ z úlohy 1.1 permutačně ekvivalentní s kódy $\mathcal{C}(x^3+x+1)$ a $\mathcal{C}(x^3+x^2+1)$.

(d) najděte permutaci zprostředkující permutační ekvivalenci mezi kódy $\mathcal{C}(x^3+x+1)$ a $\mathcal{C}(x^3+x^2+1)$.

(a) Okamžitě ze znalosti koeficientů polynomu x^3+x+1 dostáváme generující matici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro kontrolní matici nám stačí spočítat $(x+1)(x^3+x^2+1) = x^4+x^2+x+1$ a kontrolní matici tedy dostaneme obdobnou konstrukcí

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Různých binárních cyklických kódů délky 7 máme právě tolik kolik je (neasociovaných) dělitelů polynomu f, tedy

$$|\{(x+1)^{i_1}(x^3+x+1)^{i_2}(x^3+x^2+1)^{i_3} |\ i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{Z}_2\}| = 8.$$

(c) Nejprve stejně jako v úloze (a) spočítáme kontrolní matici cyklického kódu $\mathcal{C}(x^3+x^2+1)$. Protože $\frac{x^7-1}{x^3+x^2+1} = (x+1)(x^3+x+1) = x^4+x^3+x^2+1$, dostáváme

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

kontrolní matici kódu $\mathcal{C}(x^3+x^2+1)$. Vidíme, že obě kontrolní matice stejně jako kontrolní matice Hammingova kódu z 1.1 obsahují jen v různém pořadí právě všechny nenulové sloupcové vektory z $\mathbb{F}_2^3$, proto se jedná o permutačně ekvivalentní kódy.

(d) Snqadno určíme, že permutace (246)(35) aplikovaná na slouce matice K ji změní na matici H, jedná se o permutaci zprostředkující permutační ekvivalenci kódů $\mathcal{C}(x^3+x^2+1)$ a $\mathcal{C}(x^3+x+1)$. □

2.5. Rozhodněte, kolik existuje lineárních binárních cyklických kódů délky 10.

Obdobně jako v úlohách 2.3 a 2.4 máme spočítat počet všech dělitelů polynomu $x^{10}-1$ v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$. Tentokrát charakteristika tělesa dělí délku kódu, proto

$$x^{10}-1 = (x^5-1)^2 = Q_1^2 \cdot Q_5^2 = (x+1)^2(1+x+x^2+x^3+x^4)^2,$$

kde využijeme úlohy 2.3, v níž jsme ukázali, že Q_5 je ireducibilní. Vidíme, že dělitelé $x^{10}-1$ jsou právě tvaru $(x+1)^i(1+x+x^2+x^3+x^4)^j$ pro $(i,j) \in \mathbb{Z}_3^2$, proto dělitelů i lineárních cyklických kódů je právě $3^2 = 9$. □

2.6. Rozhodněte, pro která i existuje nějaký cyklický $[10,i]_3$ kód.

Nejprve si uvědomíme, že ireducibilní rozklad polynomu $x^{10}-1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ je tvaru $(x-1)(x+1)Q_5Q_{10}$, kde Q_5 a Q_{10} jsou ireducibilní (cyklotomické)

polynomy stupně 4, protože prvek 3 je řádu 4 v grupách $\mathbb{Z}_5^*$ i $\mathbb{Z}_{10}^*$. Z ireducibilního rozkladu vidíme, že dělitelé polynomu $x^{10}-1$ jsou v $\mathbb{Z}_3[x]$ právě stupně $0,1,2,4,5,6,8,9,10$. Protože každý cyklický kód je tvaru $\mathcal{C}(f)$ pro nějaké polynomy g,h splňující $x^{10}-1=gh$ a $\dim\mathcal{C}(f)=n-\deg f=\deg g$, existují ternární lineární cyklický kód déky 10 a dimenze $i=0,1,\ldots,10$ s výjimkou dimeneze 3 a 7. □

14.11.

2.7. Uvažujme binární lineární kód $\mathcal{C}$ s generující maticí $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

(a) Ukažte, že $\mathcal{C}$ není cyklický,

(b) najděte cyklický kód permutačně ekvivalentní $\mathcal{C}$.

(a) Stačí si uvědomit, že slovo 0110, kterí dostaneme z (bázického) slova 1100 cyklickým posunutím neleží v kódu $\mathcal{C}$.

(b) Snadno nahlédneme, že kód s generující maticí $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ je cyklický kód tvaru $\mathcal{C}(x^2+1)$ a z kódu $\mathcal{C}$ ho obdržíme přehozením druhého a třetího sloupce, tedy $\mathcal{C}(x^2+1)\sim_{(12)}\mathcal{C}$. □

2.3 Konstrukce GRS a RS kódů

Nechť $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}^*$ jsou po dvou různé prvky, položme $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{F}_q^*)^n$ a nechť $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in(\mathbb{F}^*)^n$. Potom pro $r<n$ definujme matice

$$\mathbf{H}_\alpha^r=\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\ldots&\alpha_n\\ .&.&\ldots&.\\ .&.&\ldots&.\\ \alpha_1^{r-1}&\alpha_2^{r-1}&\ldots&\alpha_n^{r-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{r\times n},\ \Delta(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}v_1&0&\ldots&0\\ 0&v_2&\ldots&0\\ .&.&\ldots&.\\ .&.&\ldots&.\\ 0&0&\ldots&v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$$

Lineární kód $\mathcal{C}=\ker(\mathbf{H}_\alpha^r\Delta(\mathbf{v}))$ s kontrolní maticí $\mathbf{H}_\alpha^r\Delta(\mathbf{v})$ se nazývá *zobecněný Reedův-Solomonův* (GRS) kód s *lokátory* α a *multiplikátory* $\mathbf{v}$. $\mathcal{C}$ se nazývá Reedův-Solomonův (RS), pokud $\exists\alpha\in\mathbb{F}^*$ řádu n a $b\in\mathbb{N}$ tak, že $\alpha_i=\alpha^{i-1}$ a $v_i=\alpha^{b(i-1)}$.

2.8. Najděte MDS kód s parametry $[n,k,d]$

(a) pro daná $0<k<n$,

(b) pro daná $0<d<n$,

(c) pro daná $0 < d, k$.

Ve všech případech využijeme vztahu $d = n - k + 1$ a konstrukce GRS-kódu.

(a), (b) zvolíme těleso $\mathbb{F}_q$ pro $q > n$ a a jeho po dvou různé prvky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

(c) Položíme $n = k + d - 1$ a pokračujeme jako v (a)

Nyní je $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_1^{n-k-1} & \alpha_2^{n-k-1} & \ldots & \alpha_n^{n-k-1} \end{pmatrix}$ kontrolní matice hledaného kódu. □

2.9. Najděte generující a kontrolní matici nějakého MDS kódu s parametry $[5, 3, 3]$ a $[5, 2, 4]$

Zvolíme například těleso $\mathbb{F}_7$.

Pak je matice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ kontrolní maticí GRS kódu s parametry $[5, 3, 3]_7$ a generující maticí GRS kódu s parametry $[5, 2, 4]_7$.

Snadno dopočítáme, že například matice $G = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je odpovídající generující matice GRS kódu s parametry $[5, 2, 4]_7$ a kontrolní matice GRS kódu s parametry $[5, 3, 3]_7$. □

2.10. Zkonstruujte těleso $\mathbb{F}_9$ a popište řády všech jeho prvků.

Stačí vzít ireducibilní polynom $x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ a pak dostaneme

$$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1) = \mathbb{F}_3[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha \mid a_i \in \mathbb{F}_3\},$$

kde $\alpha = x + ((x^2 + 1))$, a proto $\alpha^2 = -1 = 2$. Zřejmě 1 je jediný prvek řádu 1 a 2 jediný prvek řádu 2. Protože $\alpha^2 = -1$ jsou α a 2α prvky řádu 4 a zbylé prvky, tj. $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $2\alpha + 1$ a $2\alpha + 2$ jsou nutně prvky řádu 8. □

2.11. Najděte RS-kód s parametry (a) $[5, 3, 3]_q$, (b) $[7, 5, 3]_q$.

(a) Hledáme q, pro které 5 dělí $q - 1$. Víme, že q musí být mocninou prvočísla a snadno tedy nahlédneme, že nejmenší přípustné $q = 11$. Nyní musíme zvolit prvek řádu 5 v $\mathbb{F}_{11}$. Protože $2^5 = -1$ v $\mathbb{F}_{11}$, vidíme, že vyhovuje například prvek 4, tedy kontrolní matice RS $[5, 3, 3]_{11}$ je tvaru $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Tentokrát hledáme q, pro které 7 dělí $q-1$, zřejmě je to právě $q=2^3$. Reprezentujme si prvky tělesa $\mathbb{F}_8$ pomocí kořenu α polynomu x^3+x+1 ireducibilního nad $\mathbb{F}_2$, tedy $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[\alpha]=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 \mid a_i\in\mathbb{F}_2\}$. Protože je grupa $\mathbb{F}_8^*$ cyklická, je každý nejednotkový prvek řádu 7. Nyní dopočítáme, že například matice

$$H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha+1 & \alpha^2+\alpha & \alpha^2+\alpha+1 & \alpha^2+1\end{pmatrix}.$$

je kontrolní maticí RS $[7,5,3]_8$-kódu □

2.4 Konstrukce BCH kódů

2.12. Najděte kontrolní matici a určete parametry binárního BCH-kódu určeného RS kódem s parametry $[7,5,3]_8$.

Budeme pracovat se stejnou prezentací $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[\alpha]$ pro $\alpha^3+\alpha+1$. Hledáme binární slova délky 7, která jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha+1 & \alpha^2+\alpha & \alpha^2+\alpha+1 & \alpha^2+1\end{pmatrix}.$$

Tj. řešíme pro $c\in\mathbb{F}_2^7$ vektorovou rovnici $Hc^T=0^T$. Když si soustavu rozepíšeme pro α^0, α^1 a α^2 dostáváme matici:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Nyní vidíme, že náš kód má kontrolní matici $\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$, z níž určíme parametry $[7,3,4]_2$. □

Připomeňme, že RS -kód určený prvkem $\alpha\in\mathbb{F}_{q^r}$ řádu n dimenze k je cyklický kód s generujícím polynomem $\prod_{j=0}^{n-k-1}(x-\alpha^j)$ a jím vytvořený r-ární BCH-kód je rovněž cyklický s generujícím polynomem $\mathrm{nsn}\{m_{\alpha^j}, j=0,\dots,n-k-1\}$.

2.13. Určete parametry binárního BCH-kódu určeného RS kódem s parametry $[7,4,4]_8$.

Opět pracujeme se stejnou prezentací $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[\alpha]$ pro $\alpha^3+\alpha+1$.

Využijeme popis BCH-kódu jako cyklického kódu, tj., že je jeho generující polynom je právě $\mathrm{nsn}\{m_1, m_\alpha, m_{\alpha^2}\}$. Nyní si stačí všimnout, že je α^2 kořenem polynomu x^3+x+1, tedy $m_{\alpha^2} = x^3+x+1 = m_\alpha$, což znamená, že náš BCH-kód je týž jako BCH-kód určený RS kódem s parametry $[7,5,3]_8$ z předchozí úlohy, a tudíž má stejné parametry $[7,3,4]_2$. □

15.11.

3 Reed-Mullerovy kódy

3.1. Určete parametry a generující matici binárního Reed-Mullerova kódu $\mathcal{R}(3,1)$. Jaký kód dostaneme propíchnutím $\mathcal{R}(3,1)$ v jedné souřadnici?

Protože jsou parametry obecného binárního Reed-Mullerova kódu $\mathcal{R}(m,r)$ právě $[2^m, \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}, 2^{m-r}]_2$, vidíme, že $\mathcal{R}(3,1)$ je $[8,4,4]_2$-kód. To nutně znamená, že propíchnutí má dimenzi 4 a vzdálenost 3 (jinak bychom došli ke sporu s Hammingovým odhadem), snadno nahlédneme, že se jedná právě o kód permutačně ekvivalentní Hammingovu perfektnímu $[7,4,3]_2$-kódu.

Připomeňme, že $\Phi : \mathcal{BP}_3 \to \mathcal{BF}_3$ je zobrazení, které Booleovskému polynomu p přiřadí právě Booleovskou funkci $\mathbf{c} \to p(\mathbf{c})$, kterou reprezentujme slovem $p(\mathbf{c}_0)\dots p(\mathbf{c}_7)$, kde $\mathbf{c}_i$ je právě trojice cifer z $\mathbb{F}_2$ představující binární zápis čísla i. K nalezení matice stačí spočítat

$$\Phi(1) = 11111111, \Phi(x_1) = 00001111, \Phi(x_2) = 00110011, \Phi(x_3) = 01010101.$$

To znamená, že $G = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$ generující matice kódu $\mathcal{R}(3,1)$. □

3.2. Určete parametry a generující matici binárního Reed-Mullerových kódů $\mathcal{R}(3,0)$ a $\mathcal{R}(3,2)$.

Protože $\Phi(x_\emptyset) = \Phi(1) = 1$, je generující matice $[8,1,8]_2$-kód kódu $\mathcal{R}(3,0)$ tvaru $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$. Tato matice je zároveň kontrolní maticíc

$[8,7,2]_2$-kód $\mathcal{R}(3,2) = \mathcal{R}(3,0)^\perp$. To znamená, že je $\mathcal{R}(3,2)$ paritní kód jehož generující maticí je například $\left(\begin{array}{cccccccc} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right)$. □

Označme $\mathcal{P}_r^m = \{I \subseteq \{1,\dots,m\} \mid |I| \le r\}$ a $k = |\mathcal{P}_r^m| = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$. Potom existuje bijekce $b : \{1,\dots,k\} \to \mathcal{P}_r^m$, která indukuje izomorfismsus vektorových prostorů $\beta\mathbb{F}^k \to \mathcal{BP}_m(r)$ předpisem $\beta((a_i)) = \sum_{i=1}^k a_{b(i)} x_{b(i)}$. Jako zdroj kódování můžeme uvažovat $\mathcal{BP}_m(r)$ (místo $\beta\mathbb{F}^k$) a kódování potom určuje dosazovací zobrazení $\Phi : \mathcal{BP}_m(r) \to \mathcal{BF}_m$.

Pro dekódování (po průchodu BSC) přijatého slova (reprezentovaného booleovskou funkcí) na původní booleovský polynom bude sloužit následující algoritmus:

`VSTUP:` $g \in \mathcal{BF}_m$
`VÝSTUP:` $f \in \mathcal{BP}_m(r)$`, pro který` $d(\Phi(f), g) \le 2^{m-r-1}$
`for d=r downto 0 do`
  `for all` $I \subseteq \{1,\dots,m\} : |I| = d$ `do`
    $\alpha_0 := |\{Y \subseteq \{1,\dots,m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 0\}|$;
    $\alpha_1 := 2^{m-d} - \alpha_0$ $(= |\{Y \subseteq \{1,\dots,m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 1\}|)$;
    `if` $\alpha_0 > \alpha_1$ `then` $a_I := 0$ `else` $a_I := 1$, $g := g + \Phi(x_I)$;
`return` $\sum_{I \in \mathcal{P}_r^m} a_I x_I$.

22.11.

3.3. Pro kódování pomocí RM-kódu $\mathcal{R}(3,1)$ dekódujte přijaté slovo $g =$ 11000100 reprezentující boolovskou funkci stejně jako v úloze 3.1.

Budeme používat značení z algoritmu:
Nechť $d = 1$.

$I = \{1\}$: $g^{\{1\}}(i_\emptyset) = \sum_{B:\emptyset\subseteq B\subseteq\{1\}} g(i_B) = g_0 + g_4 = 1 + 0 = 1$,
$g^{\{1\}}(i_{\{2\}}) = \sum_{B:\{2\}\subseteq B\subseteq\{1,2\}} g(i_B) = g_2 + g_6 = 0 + 0 = 0$,
$g^{\{1\}}(i_{\{3\}}) = \sum_{B:\{3\}\subseteq B\subseteq\{1,3\}} g(i_B) = g_1 + g_5 = 1 + 1 = 0$,
$g^{\{1\}}(i_{\{2,3\}}) = \sum_{B:\{2,3\}\subseteq B\subseteq\{1,2,3\}} g(i_B) = g_3 + g_7 = 0 + 0 = 0$.
Tedy $\alpha_0 = 3 > \alpha_1 = 1$ a volíme $a_{\{1\}} := 0$.

$I = \{2\}$: $g^{\{2\}}(i_\emptyset) = \sum_{B:\emptyset\subseteq B\subseteq\{2\}} g(i_B) = g_0 + g_2 = 1 + 0 = 1$,
$g^{\{2\}}(i_{\{1\}}) = \sum_{B:\{1\}\subseteq B\subseteq\{1,2\}} g(i_B) = g_4 + g_6 = 0 + 0 = 0$,
$g^{\{2\}}(i_{\{3\}}) = \sum_{B:\{3\}\subseteq B\subseteq\{2,3\}} g(i_B) = g_1 + g_3 = 1 + 0 = 1$,
$g^{\{2\}}(i_{\{1,3\}}) = \sum_{B:\{1,3\}\subseteq B\subseteq\{1,2,3\}} g(i_B) = g_5 + g_7 = 1 + 0 = 1$.
Tedy $\alpha_0 = 1 < \alpha_1 = 3$ a volíme $a_{\{2\}} := 1$ a
$g := g + \Phi(x_{\{2\}}) = 11000100 + 00110011 = 11110111$.

$I = \{3\}$: $g^{\{3\}}(i_\emptyset) = \sum_{B:\emptyset\subseteq B\subseteq\{3\}} g(i_B) = g_0 + g_1 = 1 + 1 = 0$,
$g^{\{3\}}(i_{\{1\}}) = \sum_{B:\{1\}\subseteq B\subseteq\{1,3\}} g(i_B) = g_4 + g_5 = 1 + 0 = 1$,
$g^{\{3\}}(i_{\{2\}}) = \sum_{B:\{2\}\subseteq B\subseteq\{2,3\}} g(i_B) = g_2 + g_3 = 1 + 1 = 0$,
$g^{\{3\}}(i_{\{1,2\}}) = \sum_{B:\{1,2\}\subseteq B\subseteq\{1,2,3\}} g(i_B) = g_6 + g_7 = 1 + 1 = 0$.
Tedy $\alpha_0 = 3 > \alpha_1 = 1$ a volíme $a_{\{3\}} := 0$.

Nechť $d = 0$.

$I = \emptyset$: Všimněme si, že $g^\emptyset(i_Y) = g(i_Y)$, proto
$g^\emptyset(i_{\{1\}}) = g_4 = 0$ a
$g^\emptyset(i_I) = 1$ pro všechny zbylé množiny $I \neq \{1\}$.
Tudíž $\alpha_0 = 1 < \alpha_1 = 7$ a volíme $a_\emptyset := 1$.

Našli jsme booleovský polynom $x_{\{2\}} + x_\emptyset = x_2 + 1$, pro který snadno ověříme, že $d(g, \Phi(x_2 + 1)) = d(11000100, 11001100) = 1$. □

12.12.

4 Konvoluční kódy

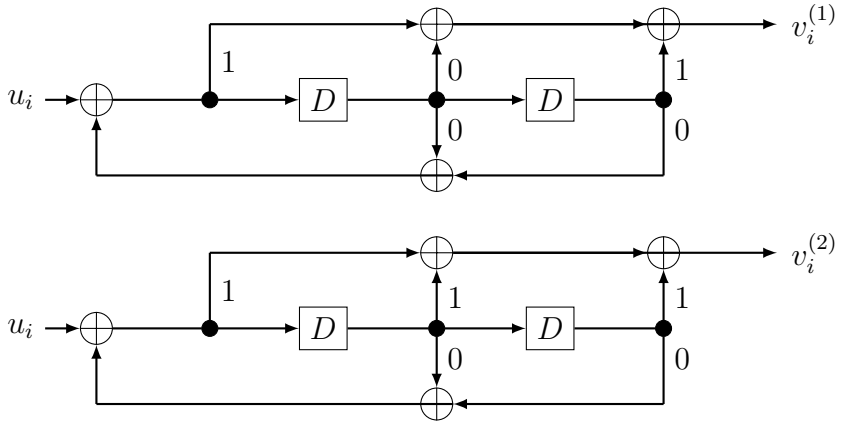
4.1 Abstraktní a fyzický konvoluční kódovač

4.1. Pro generující polynomiální matici $G = \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2[D]^{1\times 2}$ určete vnější stupeň a odpovídající fyzický konvoluční kódovač (K, G) realizujte obvodem.

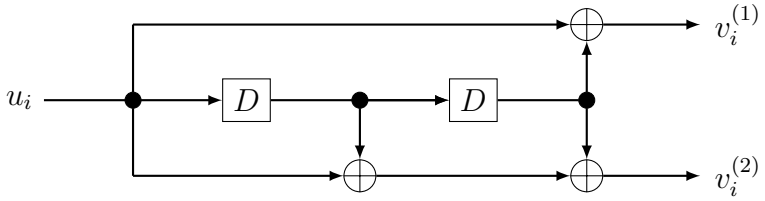
Snadno určíme $\operatorname{extdeg}(G) = \max(\deg 1 + D^2, \deg 1 + D + D^2) = 2$.
Pro každou souřadnici $v = \sum_i \mathbf{v}_i D^i = K(u) =$

$$= \sum_i u_i D^i \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} = (\sum_i (u_i + u_{i-2}) D^i, \sum_i (u_i + u_{i-1} + u_{i-2}) D^i)$$

můžeme namalovat obvod podle definice:



Nebo lépe zjednodušenou realizaci vypouštějící všechny nulové hrany a zahrnující oba obvody:



□

4.2. Rozhodněte, které z matic tvoří generující matice konvolučního kódu nad tělesem $\mathbb{F}_3$:

$$G_1 = \left(\tfrac{D}{D^2-D}\right), G_2 = \left(\tfrac{D^2-1}{D^2+D}\right), G_3 = \begin{pmatrix} \frac{D+1}{D} & \frac{1}{D+1} \\ \frac{D^2+D}{D} & \frac{1}{D^2+1} \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} \frac{D+1}{D-1} & \frac{1}{D+1} \\ \frac{D^2+D}{D} & \frac{1}{D^2+1} \end{pmatrix}.$$

Pro generující matice konvolučního kódu spočítejte vnější stupeň a najděte nějakou polynomiální generující matici téhož konvolučního kódu

$G_1 = \left(\tfrac{D}{D^2-D}\right) = \left(\tfrac{1}{D-1}\right))$ je generující matice konvolučního kódu $\mathbb{F}((D))$, protože její jediná racionální funkce je realizovatelná, tedy ji lze napsat jako podíl polynomů s nenulovým absolutním členem ve jmenovateli. Matice G_1 má vnější stupeň (tj. maximální stupeň polynomu v redukovaném vyjádření) právě 1 a polynomiální generující matici konvolučního kódu $\mathbb{F}((D))$ představuje například matice (1).

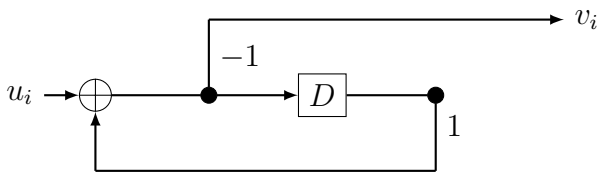
Matice $G_2 = (\frac{D-1}{D})$ ani G_3 nejsou generující matice, neboť obsahují nerealizovatelnou racionální funkci. Matice

$$G_4 = \begin{pmatrix} \frac{D+1}{D-1} & \frac{1}{D+1} \\ \frac{D^2+D}{D} & \frac{1}{D^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D^2-D+1}{D^2-1} & \frac{D-1}{D^2-1} \\ \frac{D^3+D^2+D+1}{D^2+1} & \frac{1}{D^2+1} \end{pmatrix}$$

je generující maticí konvolučního kódu a z vyjádření se společným jmenovatelem na řádcích snadno určíme vnější stupeň $\operatorname{extdeg}(G_4) = 2+3 = 5$. Vynásobením řádků matice společnými jmenovateli dostaneme polynomiální generující matici $\begin{pmatrix} D^2-D+1 & D^2-1 \\ D^3+D^2+D+1 & 1 \end{pmatrix}$ daného konvolučního kódu. □

4.3. Fyzický konvoluční kódovač určený generující matici $G_1 = \left(\frac{-1}{1-D}\right) \in \mathbb{F}_3 1 \times 1$ z předchozí úlohy realizujte obvodem.

Nakreslíme opět zjednodušenou variantu:



□

19.12.

4.4. Uvažujme fyzický konvoluční kódovač (K, G) určený generující matici $G = \left(\frac{1}{1+D+D^2} \quad \frac{1+D}{1+D+D^2}\right)$ nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

(a) Určete $\operatorname{extdeg} G$,

(b) najděte matice P, Q, R, S určující abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ), kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$,

(c) realizujte fyzický konvoluční kódovač (K, G) obvodem.

realizujte obvodem.

(a) Přímočaře spočítáme, že

$$\operatorname{extdeg} G = \max(\deg(1), \deg(1+D), \deg(1+D+D^2)) = 3.$$

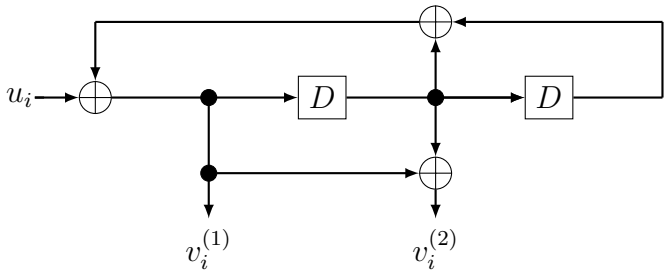
(b) Matice určující abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) spočítáme pomocí důkazu Věty 10.3 z přednášky. Nejprve si všimneme, že společný jmenovatel $q = 1+D+D^2$ už máme zadán a první sloupec matice P obsahuje jeho koeficienty kladných mocnin D a matice Q je v tomto případě pouze první vektor standardní báze a matice S obsahuje absolutní členy jmenovatelů:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro matici R využijeme dále koeficienty jmenovatelů $p_1 = 1$ a $p_2 = 1 + D$:

$$R = \begin{pmatrix} (p_1)_1 - (p_1)_0(q)_1 & (p_2)_1 - (p_2)_0(q)_1 \\ (p_1)_2 - (p_1)_0(q)_2 & (p_2)_2 - (p_2)_0(q)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \cdot 1 & 1 - 1 \cdot 1 \\ 0 - 1 \cdot 1 & 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Znázorníme zjednodušený zápis realizace obvod popisující (K, δ, λ):



□

4.5. Pro dvě polynomiální matice $G = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D+D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$ téhož konvolučního kódu nad $\mathbb{F}_2$ najděte matice určující abstraktní konvoluční kódovače a $(\tilde{K}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ pro $K(u) = uG$ a $\tilde{K}(u) = u\tilde{G}$.

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze, všimněme si přitom, že i matice R a $\tilde{R}$ je pro polynomiální matice velmi snadné určit, neboť obsahují po řádcích jen koeficienty jmenovatelů u jednotlivých kladných mocnin D.

Nejprve určíme $\operatorname{extdeg} G = 2 + 2 = 4$ a z důkazu Věty 10.3 dostaneme matice

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{proto} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pro generující matici $\tilde{G}$ spočítáme $\operatorname{extdeg} \tilde{G} = 2+1 = 3$ a matice určující abstraktní konvoluční kódovač

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

4.6. Fyzický konvoluční kódovač (K, G) nad $\mathbb{F}_3$ popište jako abstraktní konvoluční kódovač, pokud (a) $G = \left(\frac{D}{1+D^2}\right)$ (b) $G = \begin{pmatrix} \frac{D}{1+D^2} & \frac{1+D^3}{1-D} \end{pmatrix}$.

(a) Všimneme si, že $\mathrm{extdeg}(G) = 2$ a využijeme Poznámku 9.6 z přednášky pro výpočet matic $P \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}, Q \in \mathbb{F}_3^{1\times 2}$, $Q \in \mathbb{F}_3^{2\times 1}, R \in \mathbb{F}_3^{1\times 1}$ z koeficientů polynomů p, q ve vyjádření $\frac{p}{q} = \frac{D}{1+D^2}$:

$$P = \begin{pmatrix} -q_1 & 1 \\ -q_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} p_1 - p_0 q_1 \\ p_2 - p_0 q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Hledaná přechodová funkce je $\delta((s_1, s_2), u) = (s_1, s_2)P + uQ = (u - s_2, s_1)$, výstupní funkce $\lambda((s_1, s_2), u) = (s_1, s_2)R + uS = s_1$ a abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ).

(b) Spočítáme, že $G = \begin{pmatrix} \frac{D-D^2}{1-D+D^2-D^3} & \frac{1+D^2+D^3+D^5}{1-D+D^2-D^3} \end{pmatrix}$, proto je

$$\mathrm{extdeg}(G) = \max(3, 2, 5) = 5$$

a využijeme opět Poznámku 9.6 a důkaz Věty 9.7 z přednášky pro výpočet matic $P \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}, Q \in \mathbb{F}_3^{1\times 5}$, $Q \in \mathbb{F}_3^{5\times 2}, R \in \mathbb{F}_3^{1\times 2}$ z koeficientů polynomů $G = \begin{pmatrix} \frac{p}{q} & \frac{\tilde{p}}{q} \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} -q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -q_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} p_1 - p_0 q_1 & \tilde{p}_1 - \tilde{p}_0 q_1 \\ p_2 - p_0 q_2 & \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0 q_2 \\ p_3 - p_0 q_3 & \tilde{p}_3 - \tilde{p}_0 q_3 \\ p_4 - p_0 q_4 & \tilde{p}_4 1 - \tilde{p}_0 q_4 \\ p_5 - p_0 q_5 & \tilde{p}_5 - \tilde{p}_0 q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \cdot (-1) & 0 - 1 \cdot (-1) \\ -1 - 0 \cdot 1 & 1 - 1 \cdot 1 \\ 0 - 0 \cdot (-1) & 1 - 1 \cdot (-1) \\ 0 - 0 \cdot 0 & 0 - 1 \cdot 0 \\ 0 - 0 \cdot 0 & 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Přechodová funkce je

$$\delta(\mathbf{s}, u) = \mathbf{s}P + uQ = (u + s_1 - s_2 + s_3, s_1, s_2, s_3, s_4)$$

a výstupní funkce

$$\lambda(\mathbf{s}, u) = \mathbf{s}R + uS = (s_1 - s_2, u + s_1 - s_3 + s_5)$$

Abstraktní konvoluční kódovač je tedy (K, δ, λ). □

4.7. Nechť matice nad tělesem $\mathbb{F}_2$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

určují abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ), tj. $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$. Najděte jeho fyzickou realizaci (K, G) a určete $\operatorname{extdeg}(G)$.

Stačí nám přímočaře využít důkazu Věty 9.7, který nám dává vyjádření $G = Q(I_2 - DP)^{-1}RD + S \in \mathbb{F}(D)^{2\times 3}$ generující matice hledaného fyzického konvolučního kódovače (K, G). Spočítáme-li pomocí faktu z lineární algebry $A^{-1} = \det(A)^{-1}\operatorname{adj}(A)$ pro každou regulární matici A matici

$$(I_2 - DP)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+D^2}\begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix}.$$

Proto dostáváme, že $Q(I_2 - DP)^{-1}RD + S =$

$$= \frac{D}{1+D^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+D^2}\left(\begin{pmatrix} D+D^2 & D^2 & D \\ 0 & D+D^2 & D+D^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+D^2 & 0 & 1+D^2 \\ 1+D^2 & 1+D^2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+D^2}\begin{pmatrix} 1+D & D^2 & 1+D+D^2 \\ 1+D^2 & 1+D & D+D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+D}{1+D^2} & \frac{D^2}{1+D^2} & \frac{1+D+D^2}{1+D^2} \\ \frac{1+D}{1+D} & \frac{1}{1+D} & \frac{D}{1+D} \end{pmatrix}.$$

Našli jsme vyjádření fyzického konvolučního kódovače (K, G) s maticí $G = \begin{pmatrix} \frac{1+D}{1+D^2} & \frac{D^2}{1+D^2} & \frac{1+D+D^2}{1+D^2} \\ \frac{1+D}{1+D} & \frac{1}{1+D} & \frac{D}{1+D} \end{pmatrix}$, odkud snadno zjistíme $\operatorname{extdeg}(G) = 2 + 1 = 3$. □

20.12.

4.2 Základní, redukované a kanonické matice

4.8. Kdy je čtvercová polynomiální matice (a) základní, (b) kanonická?

(a) Matice je podle Poznámky 11.3 základní, právě když ji lze řádkově doplnit na unimodulární čtvercovou matici. V případě, že uvažujeme čtvercovou základní matici, pak je tedy nutně unimodulární. Naopak unimodulární čtvercová matici je zřejmě základní.

Vidíme, že je čtvercová matice základní, právě když je unimodulární.

(b) Využijeme-li (a) charakterizaci redukované matice jako matice se shodným vnitřním a vnějším stupněm, je čtvercová matice G kanonická $\Leftrightarrow$ G je unimodulární a $\operatorname{extdeg} G = \operatorname{intdeg} G \Leftrightarrow G \in \mathbb{F}^{k\times k}$ je regulární. □

4.9. Pro polynomiální matice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ D & 1+D+D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1+D & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$$

konvolučního kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2((D))^4$ určete jejich vnitřní a vnější stupeň.

Vnější stupně spočítáme z definice

$$\operatorname{extdeg}(G) = 2+2 = 4 \quad \text{a} \quad \operatorname{extdeg}(G) = 2+1 = 3.$$

Všimněme si, že $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{G}$, proto podle pozorování z přednášky

$$\operatorname{intdeg}(G) = \operatorname{intdeg}(\tilde{G}) \leq \operatorname{extdeg}(\tilde{G}) = 3.$$

Protože podle definice

$$\operatorname{intdeg}(G) = \max\{\deg m \mid \ m \text{ je subdeterminant } G \text{ stupně } 2\},$$

stačí si všimnout, že $\deg \begin{vmatrix} 1 & 1+D+D^2 \\ 1+D & 0 \end{vmatrix} = 3$, tedy $3 \leq \operatorname{intdeg}(\tilde{G}) \leq 3$, proto $\operatorname{intdeg}(G) = \operatorname{intdeg}(\tilde{G}) = 3$. □

4.10. Pro generující matice G a $\tilde{G}$ z úlohy 4.8 rozhodněte, zda jsou (a) redukované, (b) základní, (c) kanonické. Nakreslete realizaci příslušných fyzických kódovačů obvodem.

(a) Protože jsme ve 4.8 zjistili, že

$$3 = \operatorname{extdeg}(\tilde{G}) = \operatorname{intdeg}(\tilde{G}) = \operatorname{intdeg}(G) < \operatorname{extdeg}(G) = 4,$$

dostáváme jako důsledek charakterizace redukovaných matic pomocí rovnosti vnitřního a vnějšího stupně, že G není redukovaná, zatímco $\tilde{G}$ redukovaná je.

(b) nebo Upravíme posloupností řádkových a sloupcových ekvivalentních polynomiálních (tedy polynomiálně invertovatelných) úprav jednodušší matici $\tilde{G}$, kde $\sim_s$ značí sloupcovou ekvivalenci:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1+D & 0 & 1 & D \end{pmatrix} \sim_s$$

$$\sim_s \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D^2 & D \\ 1+D & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D^2 & 0 \\ 1+D & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & D & 1+D^2 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2 & D+D^2+D^3 & 0 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde jsem nejprve přičetli 3. sloupec k 2. a 1. sloupec ke 4., poté jsme přičetli 2. sloupec ke 4. Následně jsme přičetli $(1+D)$ násobek 1. řádku k 2. a nakonec nejprve vhodné násobky 1. sloupce ke 2. a 3. a pak D násobek 2. sloupce k třetímu. Zjistili jsme, že Smithův normální tvar matice $\tilde{G}$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, proto se podle charakterizační poznámky z přednášky nejedná o základní matici. Protože $\operatorname{intdeg}(\tilde{G}) = \operatorname{intdeg}(G)$, není základní ani matice G.

(c) Matice nejsou základní, proto ani kanonické. □

4.11. Pro konvoluční kód $\mathcal{C}$ nad tělesem $\mathbb{F}_2$ z úlohy 4.8 spočítejte jeho stupeň a Forneyho indexy a najděte nějakou jeho kanonickou matici.

Nejprve najdeme pomocí pouze řádkových ekvivalentních úprav $\tilde{G}$ nad tělesem $\mathbb{F}_2(D)$ základní generující matici

$$\tilde{G} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D^3 & D+D^2+D^3 & 1+D+D^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D & D & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+D & D & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme nejprve přičetli $(1+D)$ násobek 1. řádku k 2. a poté jsme druhý vydělili polynomem $1+D+D^2$ a nakonec, abychom snížili stupeň (víme, že 3 je moc) přičetli D násobek 2. řádku k 1. Protože snadno sloupcově polynomiálně upravíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+D & D & 1 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{G},$$

našli jsme základní generující matici $\hat{G}$. Snadno určíme z definice její vnitřní i vnější stupeň $\operatorname{intdeg}(\hat{G}) = \operatorname{extdeg}(\hat{G}) = 1$, tedy jde i o redukovanou a proto kanonickou matici. Konečně Forneyho indexy kódu jsou 0, 1 a věta z přednášky říká, že $\deg \mathcal{C} = 1$. □

4.12. Pro konvoluční kód s generující maticí G nad tělesem $\mathbb{F}_3$ najděte nějakou jeho kanonickou generující matici a určete jeho stupeň, pokud

(a) $G = \begin{pmatrix} \frac{D}{1-D^2} & \frac{D}{1+D} & 1 \end{pmatrix}$, (b) $G = \begin{pmatrix} 1-D^3 & D-1 \end{pmatrix}$

(a) Upravíme matici G pomocí řádkových ekvivalentních úprav nad tělesem $\mathbb{F}_3(D)$ tak, abychom dostali generující matici s nesoudělnými polynomy na řádku, tj. stačí nám přenásobení společným jmenovatelem $1 - D^2$:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{D}{1-D^2} & \frac{D}{1+D} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & D - D^2 & 1 - D^2 \end{pmatrix}$$

Protože je největší společný dělitel polynomů na řádku invertibilní, má Smithův normální tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tedy se jedná o základní matici. Protože z definice $\operatorname{intdeg}(G) = \operatorname{extdeg}(G) = 2$, je matice $\begin{pmatrix} D & D - D^2 & 1 - D^2 \end{pmatrix}$ redukovaná, a proto kanonická a $\deg \mathcal{C} = \operatorname{extdeg}(G) = 2$

(b) Kanonickou generující matici $\begin{pmatrix} 1 + D + D^2 & -1 \end{pmatrix}$ dostáváme stejným argumentem jako v (a) po vydělení polynomem $1 - D$. Odtud opět vidíme, že $\deg \mathcal{C} = \operatorname{extdeg}(G) = 2$. □