10. Algebrou za lepší popísemkové odpoledne

Homomorfismy

1. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy [ve všech případech existuje příslušný triviální homomorfismus f zobrazující všechny prvky na neutrální prvek s $\mathrm{Ker\,f}$ rovným výchozí grupě, kromě toho pak:]

   (a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
   [každý je jednoznačně určen obrazem 1; pro nenulová k pak platí $f_k(x) = x$, $\mathrm{Im\,f_k} = \mathrm{k}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ker\,f_k} = \{0\}$]

   (b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$
   [každý je určen obrazem 1; pro nenulová k platí $f_k(x) = k \cdot x \pmod n$, $\mathrm{Im\,f_k} = \langle \mathrm{k} \rangle_{\mathbb{Z}_\mathrm{n}}$, $\mathrm{Ker\,f_k} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{NSD(n,k)}}\mathbb{Z}$]

   (c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ [pouze triviální]

   (d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ [$f_1 : (1,0),(0,1) \mapsto 2$, $f_2 : (1,0),(1,1) \mapsto 2$, $f_3 : (1,1),(0,1) \mapsto 2$ a obrazy zbylých dvou prvků jsou vždy 0 (a tvoří tedy $\mathrm{Ker\,f_i}$), $\mathrm{Im\,f_i} = \{0, 2\}$]

   (e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$
   [$f_1 : 1 \mapsto (1,0)$, $f_2 : 1 \mapsto (1,1)$, $f_3 : 1 \mapsto (0,1)$, $f_i(2) = 0$, $f_i(3) = f_i(1)$, $\mathrm{Ker\,f_i} = \{0, 2\}$, $\mathrm{Im\,f_i} = \{(0,0), \mathrm{f_i}(1)\}$]

   (f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$
   [$f_\sigma(1) = \sigma$ pro libovolnou transpozici $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $\mathrm{Ker\,f_\sigma} = \{0\}, \mathrm{Im\,f_\sigma} = \langle \sigma \rangle = \{\mathrm{id}, \sigma\}$]

(Ne)Izomorfismy

2. Ukažte, že grupy $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nejsou izomorfní. [$\mathbb{Z}$ je na rozdíl od $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cyklická]

3. Dokažte, že $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. *(Návod: buď $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prostý homomorfismus, nechť $\varphi(1) = (r, s)$. Dokažte, že tato hodnota už určuje zobrazení jednoznačně a že nikdy nedostaneme zobrazení, které je na.)*

4. Ukažte, že $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ je podgrupa kladných čísel v grupě $\mathbb{R}^*$. [zobrazení $r \mapsto e^r$ je izomorfismus mezi nimi]

5. Ukažte, že grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$ a $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq \mathbb{S}_4$ jsou navzájem izomorfní.
   [všechny jsou čtyřprvkové a nejsou cyklické]

6. Ukažte, že $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{S}_3$. [$\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ permutuje množinu nenulových vektorů vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^2$.]

7. Rozhodněte, zda jsou grupy $\mathbb{Z}_{24}^*$ a $\mathbb{Z}_{15}^*$ izomorfní.
   [Ne, otázka se skrze ČVZ redukuje na problém, zda je $\mathbb{Z}_8^*$ cyklická, což není.]

Cyklické grupy

8. Najděte všechny generátory zadané grupy:
   (a) $\mathbb{Z}_{12}$ [1,5,7,11] (b) $\mathbb{Z}_7^*$ [3,5]

9. Najděte nějaký izomorfismus $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7^*$ [buď $i \to 3^i$ nebo $i \to 5^i$]

10. Napište všechny podgrupy dané grupy. Jak jsou podgrupy uspořádány inkluzí?

    (a) $\mathbb{Z}$ [$k\mathbb{Z}$ pro $k \in \mathbb{Z}$]

    (b) $\mathbb{Z}_{18}$ [$k\mathbb{Z}_{18} = \langle k \rangle$ pro k, které dělí 18]

    (c) $\mathbb{Z}_{23}^*$ [$\mathbb{Z}_{23}^*, \langle 2 \rangle, \langle 22 \rangle, \{1\}$]

    (d) $\mathbb{Z}_{17}^*$ [$\langle 3^k \rangle$, kde k dělí 16]

11. Rozložte dané grupy na direktní součin co nejvíce netriviálních cyklických grup *(všimněte si, že Čínská věta 15.6 má užitečnou druhou část)*:

    (a) $\mathbb{Z}_{18}$ [např. $\langle 2 \rangle \times \langle 9 \rangle \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$]

(b) $\mathbb{Z}_{29}^*$ [např. $\langle 12\rangle \times \langle 16\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$]

(c) $\mathbb{Z}_{21}^*$ [např. $\langle 8\rangle \times \langle 13\rangle \times \langle 16\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$]

(d) $\mathbb{Z}_{30}^*$ [např. $\langle 21\rangle \times \langle 25\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$]

12. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické:

(a) $\mathbb{S}_3$ [ne] (b) $\mathbb{A}_3$ [ano] (c) $\mathbb{Z}_{12}^*$ [ne] (d) $\mathbb{Z}_{14}^*$ [ano]

13. Najděte všechny homomorfismy

(a) ze $\mathbb{Z}_3$ do $\mathbb{Z}_5$ [jen triviální]

(b) ze $\mathbb{Z}_6$ do $\mathbb{Z}_{15}$ [$a \mapsto ka \pmod{15}$ pro $k \in \{0, 5, 10\}$]

(c) ze $\mathbb{Z}_{15}$ do $\mathbb{Z}_6$ [$a \mapsto ka \pmod 6$ pro $k \in \{0, 2, 4\}$]

(d) ze $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ do $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ [$\mathbb{Z}_{11}^*$ je generována např. prvkem 2; všechny možné homomorfismy jsou tedy dány předpisem $2^a \mapsto ka \pmod 6$ pro $k \in \{0, 3\}$]

(e) ze $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$. [z podobného důvodu jako výše jsou všechny možné homomorfismy dány předpisem $a \mapsto 2^{ka} \pmod{11}$ pro $k \in \{0, 5\}$]

14. Buď $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 + 1)$. Najděte generátor grupy T^*. Kolik má tato grupa generátorů celkem?

[celkem $\varphi(8) = 4$ generátory; jeden z nich je např. $\alpha + 1$]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

15. Jaké jsou maximální možné řády prvků v grupách z cvičení 11? Zkuste nějaké takové najít.

[(a) 17; jakýkoli generátor (číslo nesoudělné s 18) (b) 28; jakýkoli generátor, např. 2 (c) 6; prvky 5, 17, 2, 19, 10, 11 (d) 4; prvky 7, 13, 23, 17]

16.* Ukažte, že $\mathbf{D}_{12} \simeq \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$. [každá symetrie šestiúhelníka je jednoznačně určena permutací jeho tří úhlopříček + znaménkem permutace jeho vrcholů, tedy zobrazením $\varphi(s) = (\text{permutace os}, sgn(\text{permutace vrcholů}))$; jde o homomorfismus, což si rozmyslíme po složkách: pokud je symetrie s výsledkem složení dvou symetrií s_1, s_2, tj. $s = s_2 \circ s_1$, z nichž každá permutuje úhlopříčky odpovídající permutací π_i $(i = 1, 2)$, pak jejich složení permutuje úhlopříčky permutací $\pi_2 \circ \pi_1$; podobně i pro permutace vrcholů a jelikož sgn je grupový homomorfismus, získáváme slučitelnost zobrazení φ i v druhé složce; celkem máme $\varphi(s_2 \circ s_1) = \varphi(s_2)\varphi(s_1)$. Navíc je φ na – tedy i prosté, jelikož jde o konečné množiny stejné velikosti –, neboť jádrem φ je pouze identita (toto si lze rozmyslet i naopak, neboť pro zadanou permutaci os jsou dvě různé symetrie: v případě trojcyklů buď rotací o $k\pi/3$, nebo o $(k+3)\pi/3$, v případě dvojcyklů reflexe kolem os úhlů mezi permutovanými úhlopříčkami.]