6. cvičení

Ve škole:

1. Určete násobnost kořenu 2 polynomu

(a) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 \in \mathbb{R}[x]$

(b) $x^5 + x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$,

(c) $x^5 + 2x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

2. Najděte všechny kořeny polynomu $x^2 + x \in \mathbb{Z}_6[x]$ v okruhu $\mathbb{Z}_6$ a napište všechny jeho rozklady na součin kořenových činitelů.

3. Najděte všechna taková $a, b \in \mathbb{R}$, pro která má reálný polynom $x^4 - ax^3 + b$ násobný kořen (tj. aspoň dvojnásobný).

Úlohy pro samostatné počítání:

4. Najděte polynom s racionálními koeficienty stupně 4, jehož kořenem je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

5. Nechť f je polynom kladného stupně nad oborem integrity. Dokažte, že jsou-li polynomy f, f' nesoudělné, pak f nemá žádný násobný kořen.

Řešení:

1. (a) 3, (b) 3, (c) 4.

2. Kořenem jsou prvky $0, 2, 3, 5$,

   $x^2 + x = x(x+1) = (x+4)(x+3)$.

3. $(a, b) \in \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \frac{27}{256}a^4) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

4. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ a $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 49 + 20\sqrt{6}$, proto $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = -1$, tudíž $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je kořeneme polynomu $x^4 - 10x^2 + 1$.

5. Má-li f násobný kořen α, pak existuje g, pro který $f = (x-\alpha)^2 g$, a protože $f' = ((x-\alpha)^2 g)' = 2(x-\alpha)g + (x-\alpha)^2 g'$ je $(x - \alpha)$ společný dělitel f, tudíž f, f' jsou soudělné.