3. cvičení

Ve škole:

1. Ověřte, že polynomy s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$ chápané jako reálné funkce tvoří s obvyklými operacemi $+$, $-$, $\cdot$ a konstantami 0 a 1 obor integrity a polynomy s racionálními koeficienty $\mathbb{Q}[x]$ a s celočíselnými koeficienty $\mathbb{Z}[x]$ jsou jeho podobory. Určete prvokruh a charakteristiku všech oborů.

2. Je-li $\mathbb{Q}[\pi]$ nejmenší podokruh tělesa $\mathbb{R}$ obsahující $\mathbb{Q} \cup \{\pi\}$, dokažte, že jsou okruhy $\mathbb{Q}[\pi]$ a $\mathbb{Q}[x]$ izomorfní. (Využijte faktu, že π není kořenem žádného nenulového racionálního polynomu).

3. Dokažte, že žádné dva z okruhů $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ nejsou izomorfní.

Úloha pro samostatné počítání:

4. Uvažujme podokruhy

$$R_1 := \mathbb{Z}[i] \leq \mathbb{C},$$

$$R_2 := \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \leq M_2(\mathbb{Q}),$$

$$R_3 := \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \leq M_2(\mathbb{Q})$$

. Rozhodněte, které dvojice okruhů R_i a R_j jsou izomorfní.

Řešení:

1. Protože je sčítání i násobení v $\mathbb{R}$ komutativní a asociativní a sčítání je vzhledem k násobení v $\mathbb{R}$ distributivní, mají stejné vlastnosti tyto operace definované po složkách na množině reálných funkcí, tedy i na polynomech. Navíc platí $p + 0 = p$, $p + (-p) = 0$ a $p \cdot 1 = p$ pro každý polynom p. Protože je součet i součin reálných polynomů a opačný polynom k reálnému polynomu opět reálný polynom, jedná se o dobře definované okruhové operace. Z matematické analýzy víme, že součin dvou nenulových polynomů je nenulový, $\mathbb{R}[x]$ je tedy obor.

   Je-li $p = \sum_n p_n x^n, q = \sum_n q_n x^n \in \mathbb{Q}[x](\mathbb{Z}[x])$, pak
   $$p + q = \sum_n (p_n + q_n)x^n \in \mathbb{Q}[x](\mathbb{Z}[x]),$$
   $$p \cdot q = \sum_n (\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot q_{n-i})x^n \in \mathbb{Q}[x](\mathbb{Z}[x]),$$
   $$-p = \sum_n -p_n x^n \mathbb{Q}[x](\mathbb{Z}[x]).$$
   Protože $0, 1 \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ tvoří $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$ podobory. Prvookruhem všech těchto oborů je $\mathbb{Z}$ a jedná se tudíž o okruh charakteristiky 0.

2. Stačí uvážit dosazení $\Omega_\pi : p \to p(\pi)$. Snadno nahlédneme, že jde o zobrazení a $\mathbb{Q}[x]$ na $\mathbb{Q}[\pi]$. Pokud $p(\pi) = q(\pi)$, pak je π kořenem polynomu $p - q$, proto $p = q$ a zobrazení Ω_π je i prosté. Přímočaře ukážeme, že $(p + q)(\pi) = p(\pi) + q(\pi)$, $(p \cdot q)(\pi) = p(\pi) \cdot q(\pi)$ a $\Omega_\pi(1) = 1$.

3. Ke sporu předpokádejme, že existuje izomorfismus $\varphi : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}$. Pak
   $$-1 = \varphi(-1) = \varphi(i \cdot i) = \varphi(i) \cdot \varphi(i),$$
   tedy v $\mathbb{Q}$ máme prvek $a = \varphi(i)$ splňující podmínku $a^2 = -1$, spor. Ze stejného důvodu neexistuje izomorfismus $\mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (ani do žádného jiného podokruhu tělesa $\mathbb{R}$).

   Nechť existuje izomorfismus $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}$, pak
   $$2 = \varphi(2) = \varphi(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2}) \cdot \varphi(\sqrt{2})$$
   a $\mathbb{Q}$ by tak muselo obsahovat $\sqrt{2}$, což je opět spor.

4. $a + bi \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ určuje izomorfismus R_1 a R_2.

   R_3 není izomorfní ani R_1 ani R_2, neboť $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tedy R_3 není obor zatímco R_1 a R_2 obory jsou. Izomorfismus by musel netriviální dělitele nuly zobrazit opět na netriviální dělitele nuly.