14. cvičení

To nejlepší z celého semestru

1. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí $x \equiv 5 \pmod 7$, $x \equiv 4 \pmod 8$, $x \equiv 2 \pmod 9$.

2. Spočítejte ireducibilní rozklad prvku $9 + 3i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.

3. Najděte v okruhu $\mathbb{Z}$ generátor hlavního ideálu $(100\mathbb{Z}+60\mathbb{Z}+16\mathbb{Z})\cap 21\mathbb{Z}\cap 9\mathbb{Z}$.

4. Dokažte (pomocí Eisensteinova kriteria) ireducibilitu polynomu x^6+x^3+1 v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

5. Uvažujme monický polynom $f = \sum a_i x^i \in R[x]$, který se v R rozkládá na lineární činitele $(x - u_1) \cdot \ldots \cdot (x - u_n)$. Vyjádřete součet čtverců jeho kořenů $u_1^2 + \ldots + u_n^2$ pomocí koeficientů $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

6. Najděte všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 15w^2$ (návod: řešte nejprve kongruenci modulo 8).

Řešení:

1. $x \equiv 236 \pmod{504}$, , tj. $x \in \{236 + 504k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $9 + 3i = 3 \cdot (1 + i) \cdot (2 - i)$
3. $252\mathbb{Z}$.
4. Použijeme Eisensteinovo kriterium pro $(x + 1)^6 + (x + 1)^3 + 1 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 21x^3 + 18x^2 + 9x + 3$ a prvočíslo 3.
5. $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}$.
6. nutná podmínka: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \pmod 8$ a $a^2 \equiv 1 \pmod 8$ pro a liché $a^2 \equiv 0$ nebo $4 \pmod 8$ pro a sudé $\Rightarrow x, y, z, w$ sudé. Nyní vytkneme ze všech naznámých číslo 2 a vykrátíme číslem 4 a řešíme stejnou rovnici $\Rightarrow x = y = z = w = 0$