11. cvičení

1. Určete v $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{C}[x,y]$ ireducibilní rozklad polynomů

(a) $x^2 - 2y^2$,

(b) $x^2 - y^3$,

(c) $x^2 + xy + y - 1$,

(d) $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x - 2$.

2. Buď $f \in R[x]$ a $a \in R$. Dokažte, že je polynom f ireducibilní v $\mathbf{R}[x]$ právě tehdy, když je polynom $f(x+a)$ ireducibilní v $\mathbf{R}[x]$.

3. Dokažte pomocí Eisensteinova kriteria a předchozího tvrzení ireducibilitu polynomů v $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $x^6 + 10x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 2$,

(b) $x^6 + x^3 + 1$,

(c) $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ pro každé prvočíslo p.

4. Napište všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3$.

Řešení:

1. (a) $x^2 - 2y^2$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x,y]$, $x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$ v $\mathbb{R}[x,y]$ a $\mathbb{C}[x,y]$.

   (b) $x^2 - y^3$ je ireducibilní v $\mathbb{C}[x,y]$ a tedy i v $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$,

   (c) $x^2 + xy + y - 1 = (x+1)(x+y-1)$,

   (d) $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 3y - x - 2 =$

$$\begin{aligned} &= (y+1)x^2 + (y^2-1)x + (2y^3 + 7y^2 + 3y - 2) \\ &= (y+1)(x^2 + (y-1)x + (2y^2 + 5y - 2)) \\ &= (y+1)(x-y-2)(x+2y+1) \end{aligned}$$

2. Stačí dokázat $f(x+a)$ je ireducibilní $\Rightarrow$ $f(x)$ je ireducibilní, obrácenou implikaci dostaneme použitím tvrzení pro $g(x) := f(x+a)$ a $g(x + (-a))$.

   Dokazujeme nepřímo: nechť $f(x) = g(x)h(x)$ pro nekonstantní g a h, pak $f(x+a) = g(x+a)h(x+a)$.

3. (a) plyne přímo z Eisensteinova kriteria,

   (b) použijeme Eisensteinovo kriterium pro $(x+1)^6 + (x+1)^3 + 1 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 21x^3 + 18x^2 + 9x + 3$ a prvočíslo 3,

   (c) použijeme Eisensteinovo kriterium pro $\frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)-1}$ prvočíslo p,

4. -1.