10. cvičení

1. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ označme $I = \{p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] |\ p(\alpha,\beta) = 0\}$.
(a) Ověřte, že je I ideál oboru $\mathbb{C}[x,y]$,
(b) dokažte, že $I = (x-\alpha)\mathbb{C}[x,y] + (y-\beta)\mathbb{C}[x,y]$,
(c) rozhodněte, zda je I hlavní.

2. Pro $p(y) \in \mathbb{C}[y]$ a $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ dokažte, že
(a) $(x - p(y)) | h(x,y)$ v $\mathbb{C}[x,y] \Leftrightarrow h(p(y),y) = 0$,
(b) $x - p(y)$ je ireducibilní v $\mathbb{C}[x,y]$.

3. Určete v oborech $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{C}[x,y]$ ireducibilní rozklad polynomů
(a) $x^2 - y + 2$, (b) $2x^2 - 4y^2$, (c) $x^2 + y^2$.

Řešení:

1. (a) Nechť $p, q \in I$ a $a, b \in I\mathbb{C}[x,y]$, pak $[ap+bq](\alpha,\beta) = a(\alpha,\beta)p(\alpha,\beta) + b(\alpha,\beta)q(\alpha,\beta) = a(\alpha,\beta)\cdot 0 + b(\alpha,\beta)\cdot 0 = 0$,

   (b) $(x-\alpha), (y-\beta) \in I \Rightarrow (x-\alpha)\mathbb{C}[x,y] + (y-\beta)\mathbb{C}[x,y] \subseteq I$.

   Využijem dělení se zbytkem v $(\mathbb{C}[x])[y]$ polynomem $y-\beta$ a v $\mathbb{C}[x]$ polynomem $x-\alpha$. Nechť $h \in I$, pak

   $\exists q \in (\mathbb{C}[x])[y]$ a $r \in (\mathbb{C}[x])[y]$: $h = q(y-\beta) + r$, $\deg_y r < 1 \Rightarrow r \in \mathbb{C}[x]$,

   $\exists s \in \mathbb{C}[x]$ a $c \in \mathbb{C}[x]$: $r = s(x-\alpha) + c$, $\deg_x c < 1 \Rightarrow r \in \mathbb{C}$.

   Nyní $h = q(y-\beta) + s(x-\alpha) + c$, a protože $0 = h(\alpha,\beta) = c$, dostáváme $h \in (x-\alpha)\mathbb{C}[x,y] + (y-\beta)\mathbb{C}[x,y]$.

   (c) Kdyby $p\mathbb{C}[x,y] = I$, pak by $(x-\alpha)|p$ a $(y-\alpha)|p \Rightarrow p \in \mathbb{C}^*$, tedy $I = \mathbb{C}[x,y]$, což je spor.

2. (a) Dosazení $R := \mathbb{C}[y]$ a $\alpha := p(y)$ do Tvrzení 10.1 ze skript.

   (b) Je-li $a \cdot b = x - p(y)$, pak BÚNO $b \in \mathbb{C}[y]$ a existují $c, d \in \mathbb{C}[y]$ $a = cx + d \Rightarrow x - p(y) = bcx + bd \Rightarrow b \in \mathbb{C}^*$.

3. (a) $x^2 - y + 2$ je ireducibilní dle 2(b) v $\mathbb{C}[x,y]$ a tedy i v $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$,

   (b) $2x^2 - 4y^2 = 2\cdot(x^2 - 2y^2)$ v $\mathbb{Z}[x,y]$ a $2x^2 - 4y^2 = (2x - 2\sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$ v $\mathbb{R}[x,y]$ a $\mathbb{C}[x,y]$.

   (c) $x^2 + y^2$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$ a $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ v $\mathbb{C}[x,y]$.