9. cvičení

1. Pro každé $a, b \in \mathbb{Z}$ dokažte, že $\mathrm{NSD}(a, b)\mathbb{Z}$ je vzhledem k inkluzi nejmenší ideál okruhu celých čísel $\mathbb{Z}$ obsahující ideály $a\mathbb{Z}$ i $b\mathbb{Z}$ a že $\mathrm{NSN}(a, b)\mathbb{Z}$ je největší ideál okruhu $\mathbb{Z}$ obsažený v ideálech $a\mathbb{Z}$ i $b\mathbb{Z}$. Platí obdobné tvrzení v každém eukleidovském oboru?

2. Nechť I a J jsou ideály nějakého komutativního okruhu. Dokažte, že $I + J := \{i + j |\ i \in I, j \in J\}$ je nejmenší ideál obsahující I i J a že $I \cap J$ je největší ideál obsažený I i J (vzhledem k uspořádání inkluzí). Kdy je ideálem $I \cup J$?

3. Nechť $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ je posloupnost ideálů nějakého komutativního okruhu. Dokažte, že $I = \bigcup_n I_n$ je opět ideál. Kdy je I hlavní?

4. Najděte v okruhu $\mathbb{Z}$ generátory hlavních ideálů:
(a) $15\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$, (b) $15\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$, (c)$(100\mathbb{Z} + 60\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z}) \cap 21\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$.

5. Ověřte, že (a) $2\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$, (b) $x\mathbb{Q}[x, y] + y\mathbb{Q}[x, y]$ v oboru $\mathbb{Q}[x, y]$ nejsou hlavní ideály.

Řešení:

1. Nejprve si v $x/y \Leftrightarrow y\mathbb{Z} \subseteq x\mathbb{Z}$. Je-li $c := \mathrm{NSD}(a,b)$ a $d\mathbb{Z}$ ideál obsahující $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ je obor hlavních ideálů), pak $d/a, b$, a protože je d největší společný dělitel, dostáváme, že d/c, a proto $c\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$.

   Duálně, jestliže $g := \mathrm{NSN}(a,b)$ a $h\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, pak $a, b/g$, a protože je h nejmenší společný násobek, dostáváme, že g/h a $h\mathbb{Z} \subseteq g\mathbb{Z}$.

   Úvaha projde v jakémkoli Eukleidovském oboru (dokonce i v OIHI).

2. Využijeme charakterizaci, že M je ideál komutativního okruhu $R \Leftrightarrow \forall a, b \in M, \forall r, s \in R : ar + bs \in M$.

   Pokud $i + j, \widetilde{i} + \widetilde{j} \in I + J$ pro $i, \widetilde{i} \in I$ a $j, \widetilde{j} \in J$ a $, r, s \in R$ pak $(i + j)r + (\widetilde{i} + \widetilde{j})s = (ir + \widetilde{i}s) + (jr + \widetilde{j}s) \in I + J$. Pro každý ideál M obsahující I a J navíc platí, že $\forall i \in I, j \in J : i + j \in M$, tedy $I + J \subseteq M$.

   Pokud $a, b \in I \cap J \subseteq I, J$ a $r, s \in R$, potom $ar + bs \in I$ i $ar + bs \in J$, tudíž $ar+bs \in I \cap J$. pak $(i+j)r+(\widetilde{i+j})s = (ir+\widetilde{i}s)+(jr+\widetilde{j}s) \in I+J$. Množina $I \cup J$ je zjevně největší obsažená jak v I, tak v J.

   $I + J$ je ideál $\Leftrightarrow I \subseteq J$ nebo $J \subseteq I$.

3. Nechť $a, b \in I$ a $r, s \in R$, pak existuje takové n, že $\forall k \geq n$ $a, b \in I_n$, a tedy $ar + bs \in I_k \subseteq I$.

   I je hlavní $\Leftrightarrow I \subseteq J$ nebo $J \subseteq I$ existuje takové n, že $\forall k \geq n$ $I_k = I_n = I$ je hlavní ideál.

4. (a) $3\mathbb{Z}$, (b) $120\mathbb{Z}$, (c)$252\mathbb{Z}$

5. Sporem:

   (a) případný generátor hlavního ideálu by byl společný dělitel 2 a x v oboru $\mathbb{Z}[x]$, tedy 1 nebo -1, ovšem $\pm 1 \notin \mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$

   (b) případný generátor hlavního ideálu by byl společný dělitel x a y v oboru $\mathbb{Q}[x]$, tedy nenulový konstantní polynom $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ovšem $q \notin x\mathbb{Q}[x, y] + y\mathbb{Q}[x, y]$.