8. cvičení

1. Spočítejte ireducibilní rozklady
(a) $10 - 6i$, $9 + 3i$ a $11 + 2i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$,
(b) $x^3 - 2$ a $x^4 - x^2 - 2$ v oborech $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}_3[x], \mathbb{Z}_5[x]$.

2. Popište všechny ireducibilní polynomy (a) v $\mathbb{C}[x]$, (b) v $\mathbb{R}[x]$.

3. Určete v $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ireducibilní rozklady $3 - i\sqrt{2}, 1 - 2i\sqrt{2}, 2, 3, 5 - i\sqrt{2}$.

4. Dokažte, že správnost obdoby algoritmu dělení se zbytkem v oborech $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ pro $s = -2, 2, 3$. Proč totéž nemůže fungovat pro $s = -3, 5$?

Řešení:

1. (a) $10 - 6i = -(1+i)^3 \cdot (4+i)$, $9 + 3i = 3 \cdot (1+i) \cdot (2-i)$ a $11 + 2i = -(1+2i)^3$,

   (b) $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}})(x + \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}})$ v $\mathbb{C}[x]$,

   $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$ v $\mathbb{R}[x]$ $x^3 - 2$ je ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$,

   $x^3 - 2 = x^3 + 1 = (x+1)^3$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a $x^3 - 2 = (x+2)(x^2 + 3x + 4)$ v $\mathbb{Z}_5[x]$.

   $x^4 - x^2 - 2 = (x^2+1)(x^2-2) = (x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ v $\mathbb{C}[x]$,

   $x^4 - x^2 - 2 = (x^2+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ v $\mathbb{R}[x]$,

   $x^4 - x^2 - 2 = (x^2+1)(x^2-2)$ v $\mathbb{Q}[x]$,

   $x^4 - x^2 - 2 = (x^2+1)^2$ v $\mathbb{Z}_3[x]$,

   $x^4 - x^2 - 2 = (x+2)(x-2)(x^2-2)$ v $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. (a) nenulové komplexní násobky $x+a$ (b) nenulové reálné násobky $x+a$ a $(x-b)(x-\overline{b}) = x^2 - Re(b) + |b|^2$ pro $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

3. $3 - i\sqrt{2}$ je ireducibilní, $1 - 2i\sqrt{2} = -(1+i\sqrt{2})^2$, $2 = -(i\sqrt{2})^2$,

   $3 = (1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})$, $5 - i\sqrt{2} = -(1+i\sqrt{2})^3$.