2. cvičení

1. Uvažujme obor integrity $(R, +, -, \cdot, 0)$ a označme $(Q, +, -, \cdot, \frac{0}{1})$ jeho podílové těleso. Ověřte, že

(a) $\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a \cdot y}{b \cdot y}$ pro každé $\frac{a}{b} \in Q$ a $x, y \in R \setminus 0$,

(b) jsou operace na podílové tělese dobře definované,

(c) je $(Q, +, -, \cdot, \frac{0}{1})$ opravdu těleso.

2. Dokažte, že podílové těleso oboru $\mathbb{Z}[i]$ lze ztotožnit s tělesem $\mathbb{Q}[i]$ (nejprve tvrzení přesně zformulujte!).

3. Ověřte, že operace s polynomy splňují axiomy komutativního okruhu.

4. Kdybychom symbolem $\frac{a}{b}$ označili nikoli třídu ekvivalence, nýbrž dvojici $(a, b) \in R \times (R \setminus \{0\})$ a kdybychom operace $+, -, \cdot$ zavedli stejně jako u podílových těles, které axiomy oboru integrity by pro $R \times (R \setminus \{0\})$ neplatily?

Řešení:

1. (a) $\frac{a\cdot x}{b\cdot x} = \frac{a\cdot y}{b\cdot y} \Leftrightarrow (a\cdot x, b\cdot x) \sim (a\cdot y, b\cdot y) \Leftrightarrow axby = bxay$, což plyne z komutativity násobení.

   (b) nechť $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ a $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$, pak $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1} = \frac{a_1 c_1}{b_1 d_1} = \frac{a_1 c_1 b_2 d_2}{b_1 d_1 b_2 d_2} = \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{c_2}{d_2}$ a $\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} = \frac{a_1 d_1 + b_1 c_1}{b_1 d_1} = = \frac{a_1 b_2 d_1 d_2 + b_1 b_2 d_2 c_1}{b_1 d_1 b_2 d_2} = \frac{a_2 b_1 d_1 d_2 + b_1 b_2 d_1 c_2}{b_1 d_1 b_2 d_2} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{c_2}{d_2}$.

   (c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{cb+da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$,

   $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{adf + b(cf+de)}{bdf} = \frac{(ad+bc)f + bde}{bdf} = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$,

   $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = \frac{a(ce)}{bdf} = \frac{(ac)e}{bdf} = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f}$,

   $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a\cdot 1 + b\cdot 0}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a\cdot 1}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a+(-a)}{bb} = \frac{0}{bb} = \frac{0}{1}$,

   $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{acbf + bdae}{bdbf} = \frac{acf + ade}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$.

2. zobrazení, které formálnímu zlomku $\frac{a+bi}{c+di}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0 \neq d$, přiřadí jeho komplexní vyhodnocení $\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)(c-di)c^2 + d^2 \in \mathbb{Q}[i]$ je bijekce převádějící operace $+$ a $\cdot$ v podílovém tělese oboru $\mathbb{Z}[i]$ na operace $+$ a $\cdot$ v tělese $\mathbb{Q}[i]$.

3. Máme-li $p = \sum_n p_n x^n$, $q = \sum_n q_n x^n$, $r = \sum_n r_n x^n \in R[x]$, pak

   $p + q = \sum_n (p_n + q_n) x^n = \sum_n (q_n + p_n) x^n = q + p$,

   $p \cdot q = \sum_n (\sum_{i+j=n} p_i \cdot q_j) x^n = \sum_n (\sum_{i+j=n} q_i \cdot p_j) x^n = p \cdot q$,

   $(p+q)+r = \sum_n ((p_n + q_n) + r_n) x^n = \sum_n (p_n + (q_n + r_n)) x^n = p + (q + r)$.
   $(p\cdot q)\cdot r = \sum_n (\sum_{i+j=n} p_i \cdot q_j) x^n \cdot r = \sum_n (\sum_{i+j+k=n} p_i \cdot q_j \cdot r_k) x^n = p \cdot (q \cdot r)$,

   $p + 0 = p$, $p \cdot 1 = p$, $p + (-p) = 0$,

   $r \cdot (p + q) = r \cdot \sum_n (p_n + q_n) x^n = \sum_n (\sum_{i=0}^n r_i \cdot (p_{n-i} + q_{n-i})) x^n =$
   $= \sum_n (\sum_{i=0}^n r_i \cdot p_{n-i}) x^n + \sum_n (\sum_{i=0}^n r_i \cdot q_{n-i}) x^n = p \cdot r + q \cdot r$,

4. Platily by všechny axiomy kromě axiomu opačného prvku a axiomu distributivity.