13. cvičení

1. S využitím vhodné substituce popište, v jakém vztahu jsou kořeny polynomů $f = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$ a $g = y^3 - 6y - 9$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

2. Najděte kořeny polynomů f a g z předchozí úlohy a popište jejich rozkladové nadtěleso a Galoisovu grupu nad tělesem $\mathbb{Q}$.

3. Nad tělesem charakteristiky různé od 3 popište rozkladové nadtěleso polynomu $f = x^3 + bx + c$. Je jeho Galoisova grupa řešitelná?

Řešení:

1. α je kořen f, právě když je $\alpha - 1$ kořen g, protože $g(y) = f(y+1)$.

2. Kořeny g jsou 3, $\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$ a kořeny f jsou 4, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Rozkladové nadtěleso obou je $Q(\sqrt{3}i)$ a Galoisova grupa je izomorfní $\mathbb{Z}_2$.

3. Rozkladové nadtěleso je těleso $T(\sqrt{D}, \sqrt[3]{-c+\sqrt{D}}, \zeta)$, kde $D = c^2 + \frac{4}{27}b^3$, $\sqrt{D}$ je kořen polynomu $x^2 - D$, $\sqrt[3]{-c+\sqrt{D}}$ je kořen polynomu $x^3 + c - \sqrt{D}$ a ζ je primitivní třetí odmocnina z 1 v algebraickém uzávěru. Jeho Galoisova grupa je izomorfní podgrupě grupy $\mathbb{S}_3$, proto je to buď cyklická, a proto abelovská grupa (je-li izomorfní vlastní podgrupě $\mathbb{S}_3$) nebo matabelovská grupa (je-li izomorfní celé grupě $\mathbb{S}_3$), tedy je řešitelná.