9. cvičení

1. Dokažte pro komutativní těleso $\mathbb{T}$, že zobrazení $\Omega : \mathbb{T}[x,y] \to \mathbb{T}$, $f \mapsto f(0,0)$, je homomorfismus. Spočtěte jeho jádro a obraz a rozhodněte, zda je jádro hlavní ideál.

2. Rozhodněte, zda je $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Jaká by byla odpověď pro obecnou dvojici $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$.

(*Návod: homomorfismus zachovává řešení rovnice* $x^2 = r$.)

3. Pomocí Čínské věty o zbytcích popište faktorokruhy $\mathbb{T}[x]/(x^4 - 4)$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a $(x^4 - 4)$ značí ideál generovaný polynomem $x^4 - 4$.

4. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbb{Z}[x]/I$, kde

(a) $I = (x-1)\mathbb{Z}[x]$, (b) $I = (x^2+1)\mathbb{Z}[x]$, (c) $I = (x^2-1)\mathbb{Z}[x]$?

Řešení:

1. Pro každý komutativní okruh R a prvek $\alpha \in R$ je dosazení do polynomu $p(x) \to p(\alpha)$ homomorfismus $R[x] \to R$. Označme $\rho_y : \mathbb{T}[x,y] = T[x][y] \to T[x]$ dosazení $y = 0$ a $\rho_x : \mathbb{T}[x] \to T[x]$ dosazení $x = 0$. Pak $\Omega = \rho_x \rho_y$ je homomorfismus, protože jde o složení homomorfismů.

   $\Omega(\mathbb{T}[x,y]) = \mathbb{T}$ a $\mathbf{K}\mathrm{er}\,\Omega = (x,y) = \{xa + yb|\ a, b \in \mathbb{T}[x,y]\}$, což není hlavní ideál.

2. $\mathbb{Q}(i) \not\simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{s}) \Leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s}) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{r}{s} = q^2$.

3. $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \times \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$,

   $\mathbb{R}[x]/(x^4 - 4) \simeq \mathbb{R}[x]/(x - \sqrt{2}) \times \mathbb{R}[x]/(x + \sqrt{2}) \times \mathbb{R}[x]/(x^2 + 2) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$,

   $\mathbb{C}[x]/(x^4 - 4) \simeq \mathbb{C}[x]/(x - \sqrt{2}) \times \mathbb{C}[x]/(x + \sqrt{2}) \times \mathbb{C}[x]/(x - i\sqrt{2}) \times \mathbb{C}[x]/(x + i\sqrt{2}) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

   (p) označuje všude hlavní ideál okruhu $\mathbb{T}[x]$ generovaný polynomem p.

4. (a) $\mathbb{Z}[x]/(x - 1) \simeq \mathbb{Z}$, (b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$, (c) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1) \simeq \{(a + b, a - b)|(a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | 2/(a - b)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$.