7. cvičení

1. Uvažujte působení grupy všech izometrií G na eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. (a) Která zobrazení obsahuje grupa G_x pro daný bod x? Které prvky patří do $\mathbb{R}^2_g$, kde g je (b) posunutí o nenulový vektor, (c) netriviální rotace, (d) osová symetrie?

2. Kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu k barvami, až na otočení?

3. Uvažujte barvení vrcholů pravidelného p-úhelníka a barvami až na otočení. Napište vzorec pro počet obarvení a odvoďte z něj malou Fermatovu větu.

4. Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých destiček ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký trojúhelník o čtyřnásobné hraně, (a) až na otočení, (b) až na otočení a převrácení?

Řešení:

1. (a) všechny rotace se středem v x a rotace složené s osovou symetrií podle osy procházející bodem x,

   (b) $\emptyset$,

   (c) pouze střed rotace,

   (d) osa symetrie.

2. $\frac{1}{12}(k^4 + 11k^2)$

3. $\frac{1}{p}\sum_{d/p} a^d \varphi(\frac{n}{d})$.

   Je-li p prvočíslo, pak $\frac{1}{p}(a^p + a \cdot (p-1)) = \frac{1}{p}(a^p\varphi(1) + a\varphi(p)) \in \mathbb{N}$, a proto $0 \equiv a^p + a \cdot (p-1) \equiv a^p - a \pmod{p}$.

4. (a) $\frac{1}{3}\binom{16}{8} = 4290$,

   (b) $\frac{1}{6}(\binom{16}{8} + 3 \cdot (\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{6}{2})) = 2220$.