2. cvičení

1. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e tak, aby následující čtveřice byla grupou:

(a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$

(b) $(\mathbb{Q}, *, ', e)$ kde $a * b = |a \cdot b|$.

(c) $(P(X), *, ', e)$, kde $P(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X a $*$ značí symetrickou diferenci, tj. $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Spočtěte řád prvku 7 v grupách
$(\mathbb{Z}_{15}, +, -, 0)$, $(\mathbb{Z}_{15}^{*}, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ a $(\mathbb{Q}^{*}, \cdot, ^{-1}, 1)$.

3. Najděte všechny prvky konečného řádu v grupách $(\mathbb{Q}^{*}, \cdot, ^{-1}, 1)$ a $(\mathbb{C}^{*}, \cdot, ^{-1}, 1)$.

4. Určete řád permutace (1 2 3)(4 6)(5 7 8 9).

Nechť $(G, \circ, ^{-1}, id) \leq (S_n, \circ, ^{-1}, id)$ a $p, q \in G$. Řekneme, že je permutace p konjugovaná s permutací q v G (podle permutace s) jestliže existuje $s \in G$, pro které $s \circ p \circ s^{-1} = q$. Všimněme si, že pokud $p(a) = b$, pak $[s \circ p \circ s^{-1}](s(a)) = s(b)$, tedy v cyklickém zápisu $s \circ \dots (\dots ab \dots) \dots \circ s^{-1} = \dots (\dots s(a)s(b) \dots) \dots$

5. Najděte všechny permutace v $\mathbf{S}_6$, podle kterých je (1 2 3)(4 6) konjugovaná s (1 3)(2 5 4).

6. Buď $\mathbf{G}$ grupa, kde pro každé $a \neq 1$ platí $ord(a) = 2$. Dokažte, že $\mathbf{G}$ je abelovská.

Řešení:

1. (a) ne, protože operace $-$ není asociativní,

   (b) ne, protože $a * b \geq 0$, tedy pro záporná a nemůžeme najít neutrální prvek,

   (c) ano, neutrální prvek je $\emptyset$ a každý prvek je sám k sobě inverzní.

2. 15, 4, ∞, ∞.

3. v $\mathbb{Q}^*$ jen $\{1, -1\}$, $\mathbb{C}^*$ odmocniny z jedné $\{e^{\frac{2\pi ik}{n}} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_n\}$.

4. 12.

5. (1 2 5 6 3 4), (1 2 5 6)(3 4), (1 5 6 3 2 4), (1 5 6)(3 2 4), (1 4 3 5 6), (1 4)(3 5 6)

6. Z předpokladu $a^2 = 1$ plyne, že $a^{-1} = a$ pro každý prvek a. Proto $a \cdot b = (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = b \cdot a$ pro každé a, b.